H_∞ 逼近系统阶数的一个下界[1)]

王金枝 黄 琳
(北京大学力学与工程科学系 系统与控制研究中心 北京 100871)
(E-mail: jinzhi@yeah.net)

摘 要 文章研究了 H_∞ 模型降阶问题中 H_∞ 误差界与逼近系统最小阶数之间的关系. 对于事先给定的 H_∞ 误差界, 利用代数方法给出了逼近系统阶数的一个下界. 此下界由某个特定矩阵非负特征值的个数及系统的阶数来确定.

关键词 H_∞ 模型逼近, 线性矩阵不等式, 逼近系统阶数的下界
中图分类号 TP273

A Lower Bound of the Order for H_∞ Approximation System

WANG Jin-Zhi HUANG Lin
(*Center for Systems and Control, Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing* 100871)
(E-mail: jinzhi@yeah.net)

Abstract The relationship between H_∞ error bound and the minimal order of the approximation system of the H_∞ model approximation problems is considered. A lower bound of the order for the approximation system is given for a given H_∞ error bound, which is determined by the number of the nonnegative eigenvalues of some specific matrix and the order of the system.

Key words H_∞ model approximation, linear matrix inequality, lower bound of order

1 引言

模型降阶问题就是根据某种给定的性能要求用低阶模型逼近高阶模型. 利用原始系统的 Hankel 奇异值给出了 H_∞ 误差界的平衡结尾方法和最优 Hankel 范数逼近方法是研究模型降阶问题的重要方法[1,2]. 文献[1,2]给出了 r 阶逼近系统与原系统的 Hankel 奇异值之间的如下关系, 即系统 G 的任何一个 r 阶逼近系统 G_r 一定满足 $\| G-G_r \|_\infty \geqslant \sigma_{r+1}$, 其中 σ_{r+1} 是系统的第 $r+1$ 个 Hankel 奇异值, 系统的 Hankel 奇异值是递减排列的, 即 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant$

1) 国家重点基础研究专项经费(G1998020302)资助
Supported by National Key Basic Research Special Fund of P. R. China(G1998020302)
收稿日期 2001-11-26 收修改稿日期 2002-05-22
Received November 26, 2001; in revised form May 22, 2002

$\cdots \geqslant \sigma_r \geqslant \sigma_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$. 这一结果可以用来给出逼近系统阶数的一个下界,即如果 $\| G-G_0 \|_\infty < \sigma_{r+1}$,则逼近系统的 G_0 的阶数至少为 $r+1$. 对于事先给定的 H_∞ 误差界 $\gamma, \gamma>0$,本文用完全不同的方法导出了只与原始系统 G 和 γ 有关的逼近系统阶数的一个下界. 这一结果与上述结果比较并不保守.

本文使用的符号是标准的. A' 表示矩阵 A 的转置. $A>0(A\geqslant 0)$ 表示 A 是正定的(半正定). $A<0$ 表示 A 是负定的, $R^{m\times n}$ 是所有 $m\times n$ 实矩阵构成的集合, $C^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 复矩阵构成的集合. $R_r^{m\times n}=\{X:X\in R^{m\times n},\ \mathrm{rank}\ X=r\}$. $\mathrm{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵.

2 主要结果

考虑一个具最小状态空间实现的 n 阶线性时不变(LTI)系统 G

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du \tag{1}$$

其中 $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times m}$, $C\in R^{p\times n}$, $D\in R^{p\times m}$ 及 $G=C(sI-A)^{-1}B+D$. γ 次优 H_∞ 模型降阶问题就是寻找一个稳定的低阶系统 G_0,使得 $\| G-G_0 \|_\infty<\gamma$,其中 γ 为一给定的正数. 显然,对于给定的误差界 γ 希望能够确定满足 $\| G-G_0 \|_\infty<\gamma$ 的逼近系统 G_0 的最低阶数.

对于 $A\in C^{m\times n}$, 令 $A\{1\}=\{X:AXA=A, X\in C^{n\times m}\}$, 则有下列性质.

引理 1[3]. 令 $A\in R_r^{m\times n}$,则 $r=m$ 当且仅当对于任意 $A^{[1]}\in A\{1\}$ 有 $A A^{[1]}=I_m$.

引理 2[4]. 假定 A 是稳定的矩阵,则存在一个 r 阶系统 G_0 解 γ 次优 H_∞ 模型降阶问题当且仅当存在 n 阶对称矩阵 $X>0$ 和 $Y>0$,使得下列条件成立:

$$AX + XA' + BB' < 0, \quad YA + A'Y + C'C < 0 \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} X & \gamma I \\ \gamma I & Y \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} X & \gamma I \\ \gamma I & Y \end{bmatrix} \leqslant n+r \tag{3}$$

注 1. 式(2)及(3)可化为 $A_0Z+ZA_0+Q_0<0$, 其中

$$Z = \begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & Y_0 \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} BB' & -2A \\ -2A' & \frac{1}{\gamma^2}C'C \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}\ Z \leqslant n+r,\ X_0 > 0,\ Y_0 > 0 \tag{5}$$

不难证明下述引理成立.

引理 3. 假设 $X_1\geqslant 0$, $\mathrm{rank}\ X_1=r$, 并且 $Y_1>0$,则存在非奇异矩阵 S 及 r 阶对角矩阵 Σ_r 满足 $\Sigma_r>0$,使得

$$Y_1 = S'S,\ X_1 = S'\mathrm{diag}\{\Sigma_r,\ 0\}S \tag{6}$$

定理 1. 设 $A_1\in R^{n\times n}$, $Q=Q'\in R^{n\times n}$,则存在一个矩阵 $Z_1\geqslant 0$, $\mathrm{rank}\ Z_1=k$, $0\leqslant k\leqslant n$,满足 $A_1Z_1+Z_1A_1'+Q<0$ 当且仅当存在矩阵 $T_1\in R_k^{k\times n}$, $T_2\in R_{n-k}^{(n-k)\times n}$, $\overline{T}_1\in T_1\{1\}$, $\overline{T}_2\in T_2\{1\}$ 及 k 阶对角矩阵 $\Sigma_k>0$ 满足

$$T_2QT_2' = -I_{n-k}, \quad T_1A_1\overline{T}_1\Sigma_k + \Sigma_k\overline{T}_1'A_1'T_1' + T_1QT_1' + I_k = 0 \tag{7}$$

$$T_2A_1\overline{T}_1\Sigma_k + T_2QT_1' = 0, \quad T_2\overline{T}_1 = 0, \quad T_1\overline{T}_2 = 0 \tag{8}$$

进一步,如果存在矩阵 $T_1\in R_k^{k\times n}$, $T_2\in R_{n-k}^{(n-k)\times n}$, $\overline{T}_1\in T_1\{1\}$, $\overline{T}_2\in T_2\{1\}$ 及 k 阶对角矩阵 $\Sigma_k>0$ 满足式(7)和(8),则 $Z_1=\overline{T}_1\Sigma_k\overline{T}_1'$ 满足 $Z_1\geqslant 0$, $\mathrm{rank}\ Z_1=k$, $A_1Z_1+Z_1A_1'+Q<0$.

证明. 假设存在一个矩阵 $Z_1\geqslant 0$，rank $Z_1=k$ 满足 $A_1Z_1+Z_1A_1'+Q<0$，则由引理 3 知，存在一个非奇异矩阵 T 使得

$$Z_1 = T'\mathrm{diag}\{\Sigma_k,\ 0\}T,\ A_1Z_1+Z_1A'_1+Q=-T'T$$

令 $T^{-1}=[T_1'\quad T_2']$，$T'=[\overline{T}_1\quad \overline{T}_2]$，则可证明式(7)和(8)成立.

反之，利用引理 1 容易证明 $Z_1=\overline{T}_1\Sigma_k\overline{T}_1'$满足 $Z_1\geqslant 0$，rank $Z_1=k$ 及 $A_1Z_1+Z_1A_1'+Q=-T'T<0$，从而完成了证明.　　证毕.

令 $\overline{T}_1=T_1'(T_1T_1')^{-1}$和 $\overline{T}_2=T_2'(T_2T_2')^{-1}$，则有以下推论.

推论 1. 假设存在两个矩阵 $T_1\in R_k^{k\times n}$，$T_2\in R_{n-k}^{(n-k)\times n}$及 k 阶对角矩阵$\Sigma_k>0$ 满足

$$T_2QT'_2=-I_{n-k},\quad T_2T'_1=0,\quad T_2A_1T'_1(T_1T'_1)^{-1}\Sigma_k+T_2QT'_1=0$$

和

$$T_1A_1T'_1(T_1T'_1)^{-1}\Sigma_k+\Sigma_k(T_1T'_1)^{-1}T_1A'_1T'_1+T_1QT'_1+I_k=0$$

则 $Z_1=T_0\Sigma_kT_0'$满足 $Z_1\geqslant 0$ rank $Z_1=k$ 及 $A_1Z_1+Z_1A_1'+Q<0$. 其中 $T_0=T_1'(T_1T_1')^{-1}$.

如果 $Q\geqslant 0$，则对任何 $T_2\in R_{n-k}^{(n-k)\times k}$，等式 $T_2QT_2'=-I_{n-k}$都不成立. 由此可推出下列推论.

推论 2. 令 $Q\geqslant 0$，则对任意 k，$0\leqslant k<n$ 都不存在矩阵 $Z_1\geqslant 0$，rank $Z_1=k$ 满足 $A_1Z_1+Z_1A_1'+Q<0$.

定理 2. 对于给定的矩阵 $Q=Q'\in R^{n\times n}$，存在矩阵 $T_2\in R_{n-k}^{(n-k)\times n}$使得 $T_2QT_2'=-I_{n-k}$当且仅当 $k\geqslant r^+(Q)$，其中 $r^+(Q)$表示 Q 的非负特征值的个数.

证明. 假设存在一个矩阵 $T_2\in R_{n-k}^{(n-k)\times n}$满足 $T_2QT_2'=-I_{n-k}$，则存在矩阵 $T_1\in R_k^{k\times n}$使得$[T_1'\quad T_1']$是非奇异的. 因此

$$\begin{bmatrix}T_1\\T_2\end{bmatrix}Q[T_1'\quad T'_2]=\begin{bmatrix}T_1QT'_1 & T_1QT'_2\\ T_2QT'_1 & -I_{n-k}\end{bmatrix}$$

进而有

$$\begin{bmatrix}I_k & Q_1\\ 0 & I_{n-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\T_2\end{bmatrix}Q[T'_1\quad T'_2]\begin{bmatrix}I_k & 0\\ Q_1' & I_{n-k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_1QT'_1+Q_1Q_1' & 0\\ 0 & -I_{n-k}\end{bmatrix}$$

其中 $Q_1=T_1QT_2'$. 从而 $m\geqslant n-k$，其中 m 是 Q 的负特征值的个数，即 $k\geqslant n-m=r^+(Q)$.

反之，假设 $k\geqslant r^+(Q)$，即 $m\geqslant n-k$，则存在一个非奇异矩阵 $T\in R^{n\times n}$使得 $TQT'=\mathrm{diag}\{Q_2,\ -I_m\}$，令 $T'=[T_1'\quad T_2']$，其中 $T_1\in R_k{}^{k\times n}$和 $T_2\in R_{n-k}^{(n-k)\times n}$，则可以得到 $T_2QT_2'=-I_{n-k}$.　　证毕.

定理 3. 假定由式(1)描述的系统 G 是稳定的，并且对于给定的正数 γ，G_r是 G 的 r 阶稳定的逼近系统满足 $\|G-G_r\|_\infty<\gamma$，则 $r\geqslant r^+(Q_0)-n$，其中 $r^+(Q_0)$为 Q_0的非负特征值的个数，而 Q_0由式(4)确定.

证明. 根据注 1，并利用定理 1,2 即可证明本定理的结论成立.　　证毕.

推论 3. 假设 G 为 n 阶稳定的系统，并且对于给定的正数 γ，Q_0为正定矩阵. 则不存在 G 的阶数小于 n 的稳定的降阶系统 G_0，使得 $\|G-G_0\|_\infty<\gamma$.

注 2. 容易证明 Q_0的非负特征值独立于系统 G 的某个特定的状态空间实现，它只由数 γ 及系统 G 本身确定.

3　数值例子

例 1. 考虑系统(1)，其中

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \\ 1.6 & 0 & -8 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 1.5 & 1.6 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \mathrm{diag}\{-0.09, -0.08, -0.2, -4\}, \quad D = 0$$

系统的 Hankel 奇异值为 348.7060,166.7855,11.4192,7.3157,由文献[1,2]中的结果可以得到:当 $11.4192 < \gamma \leqslant 166.7855$ 时,降阶系统的阶数至少为二阶;当 $166.7855 < \gamma \leqslant 348.7060$ 时,降阶系统的阶数至少为一阶.但是,利用本文的定理 3 可以得到:当 $11.4192 < \gamma \leqslant 12.1693$ 时,降阶系统的阶数至少为三阶,即对位于这个区间上的误差界,任何二阶降阶系统都是达不到的;当 $166.7855 < \gamma \leqslant 167.980$ 时,降阶系统的阶数至少为二阶,即对位于这个区间上的误差界,任何一阶降阶系统都是达不到的.

此例子表明本文定理 3 的结果与文献[1,2]的结果比较,并不保守.

4 结论

本文给出了逼近系统阶数的一个下界,它只与原系统及事先给定的 H_∞ 误差界有关.所得结果与已有结果比较并不保守,数值例子也说明了这一事实.

References

1 Green M, Limebeer D J N. Linear Robust Control. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-hall,1995

2 Zhou K, Doyle J C, Glover K. Robust and Optimal Control. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1996

3 Huang Lin . Algebra in Systems and Control Theory. Beijing: Science Press, 1990(in Chinese)

4 Grigoridis K M. Optimal H_∞ model reduction via linear matrix inequalities: Continuous and discrete-time case. *Systems & Control Letters*, 1995, **26**(5): 321~333

王金枝 1998 年于北京大学获理学博士学位,之后在中科院系统科学所做博士后研究工作,现在北京大学力学与工程科学系工作. 研究方向为鲁棒控制,受限系统控制.

(**WANG Jin-Zhi** Received her Ph. D. degree from Peking University in 1998 and then did some researches as post-doctor in Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and System Science, Chinese Academy of Sciences. Now she is an associate professor in the Department of Mechanics and Engineering Science at Peking University. Her research interests include robust control and control of actuator saturation.)

黄 琳 简介见本刊第 19 卷第 2 期.

(**HUANG Lin** Professor in the department of mechanics and engineering science at Peking University. His research interests include stability theory and its applications, robust control, and complex control systems theory.)