第 30 卷 第 2 期
2004 年 3 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 30, No. 2
Mar., 2004

广义系统的 H_2 次优控制问题的一个 LMIs 条件[1)]

杨冬梅 张庆灵 沙成满 翟 丁

（东北大学理学院 沈阳 110004）

（E-mail: neuress@mail. sy. ln. cn）

摘 要 研究具有动态输出反馈的连续广义系统的 H_2 次优控制问题. 在 H_2 范数的时域计算方法的基础上，关于连续广义系统进行了 H_2 次优性能分析，得到了满足 H_2 次优性能的线性矩阵不等式组的充要条件. 其次，利用线性矩阵不等式(LMI)方法设计了 H_2 次优动态输出反馈控制器. 最后，通过数值例子进一步说明了该文的设计方法.

关键词 广义系统，H_2 次优控制，H_2 范数，LMI

中图分类号 TP13

An LMIs Condition of the H_2 Suboptimal Control Problem for Descriptor Systems

YANG Dong-Mei ZHANG Qing-Ling SHA Cheng-Man ZHAI Ding

(*School of Science, Northeastern University, Shenyang* 110004)

(E-mail: neuress@mail. sy. ln. cn)

Abstract The H_2 suboptimal control for continuous-time descriptor systems with dynamic output feedback is studied. Based on the time domain method of computing H_2 norm, H_2 suboptimal performance analysis for the descriptor systems is presented. The necessary and sufficient conditions of the linear matrix inequalities that make the above systems satisfy the H_2 suboptimal performance are obtained. An H_2 suboptimal dynamic output feedback controller for continuous-time descriptor systems is designed using linear matrix inequality (LMI) approach. Finally, a numerical example is given to illustrate the design method.

Key words Descriptor system, H_2 suboptimal control, H_2 norm, LMI

1 引言

广义系统是一类更一般化，并有着广泛应用背景的动力系统. 自 Rosenbrock 首次提出

1) 高等学校骨干教师资助计划项目(2000-2001)资助

Supported by Key Teacher Research Grants by National Ministry of Education and Liaoning Province of P. R. China(2000-2001)

收稿日期 2002-11-24 收修改稿日期 2003-03-17

Received November 24, 2002; in revised form March 17, 2003

广义系统的概念以来，许多正常系统的结论被相继地推广到广义系统上来[1~4]. 然而在广义系统的 H_2 优化控制方面，只是得到一些初步的结果[5,6]. 其中 Takaba 研究了一类不确定广义系统的鲁棒 H_2 状态反馈控制问题，但仅考虑了 $Ker(E)\subset Ker(C)$ 的特殊情形[5].

本文首次研究了连续广义系统的 H_2 次优动态输出反馈控制问题，进行了 H_2 次优性能分析，得到了 H_2 范数界的线性矩阵不等式组(LMIs)的充要条件，放宽了 $Ker(E)\subset Ker(C)$ 的限制条件为系统的传递函数矩阵严格真. 在此基础上，设计了 H_2 次优动态输出反馈控制器，给出了实用中更为高效的 LMI 设计方法[7].

2 H_2 次优控制的问题分析

考虑线性连续广义系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{w}(t) \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = C\boldsymbol{x}(t) \tag{1b}$$

上式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$, $\boldsymbol{w}(t)\in R^l$, $\boldsymbol{z}(t)\in R^m$ 分别为状态、输入和输出；$E\in R^{n\times n}$ 为奇异矩阵，$A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times l}$, $C\in R^{m\times n}$ 为常数矩阵. 为确保广义系统解的存在性和唯一性，总假定广义系统是正则的. 设 $\mathrm{degdet}(sE-A)=r$，则存在非奇异实矩阵 P 和 Q 使得[2]

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},\ PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},\ PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\ CQ = [C_1 \quad C_2] \tag{2}$$

其中 $A_1\in R^{r\times r}$, $N\in R^{(n-r)\times(n-r)}$ 是幂零阵. 记系统(1)的传递函数矩阵为 $G(s)$.

引理 1. 传递函数矩阵 $G(s)$ 是严格真的(即 $G(\infty)=0$)的充要条件是

$$C_2N^iB_2 = 0, \quad i = 0,1,2\cdots,h-1$$

引理 2. 设系统(1)是容许的，传递函数矩阵 $G(s)$ 是严格真的. 则 $G(s)$ 的 H_2 范数为

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\mathrm{trace}(\bar{B}^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}X\bar{B})}$$

其中 $\bar{B}=QPB$，实矩阵 X 满足广义 Lyapunov 方程

$$A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A + C^{\mathrm{T}}C = 0 \tag{3a}$$

$$E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geqslant 0 \tag{3b}$$

注 1. "$G(s)$ 是严格真的"是 $\|G(s)\|_2$ 存在且有界的必要条件.

引理 3[4]. 设系统(1)正则，(E, A, C) 有限动态可检测且脉冲能观. 则系统(1)是容许的当且仅当存在解 X 满足广义 Lyapunov 方程(3).

定理 1. 设传递函数矩阵 $G(s)$ 是严格真的，(E, A, C) 有限动态可检测且脉冲能观. 则下列命题等价：

i) 系统(1)是容许的且 $\|G(s)\|_2<\gamma$；

ii) 存在实矩阵 X 满足

$$A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A + C^{\mathrm{T}}C \leqslant 0 \tag{4a}$$

$$E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geqslant 0 \tag{4b}$$

$$\mathrm{trace}(\bar{B}^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}X\bar{B}) < \gamma^2 \tag{4c}$$

iii) 存在实矩阵 X 及 W 满足如下 LMIs

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A & C^{\mathrm{T}} \\ C & -I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{5a}$$

$$\begin{bmatrix} E^{\mathrm{T}}X & E^{\mathrm{T}}X\bar{B} \\ \bar{B}^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}E & W \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{5b}$$

$$\mathrm{trace}(W) < \gamma^2 \tag{5c}$$

证明. 由引理 2 和引理 3 可推出结论，从略.

3　H_2次优问题的控制器设计

考虑如下广义系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{w}(t) + B_2\boldsymbol{u}(t) \tag{6a}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = C_1\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) \tag{6b}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C_2\boldsymbol{x}(t) \tag{6c}$$

上式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 为状态；$\boldsymbol{w}(t)\in R^l$，$\boldsymbol{u}(t)\in R^p$ 分别为干扰和控制输入；$\boldsymbol{z}(t)\in R^m$，$\boldsymbol{y}(t)\in R^q$ 分别为控制和测量输出；B_i、$C_j(i,j=1,2)$，D 为适维常数矩阵.

如果动态输出反馈控制器 $K(s)$的状态空间实现为

$$K(s) = \left\{E, \left[\begin{array}{c:c} A_k & B_k \\ \hdashline C_k & 0 \end{array}\right]\right\} \tag{7}$$

则系统(6)在控制器(7)作用下形成的闭环系统为

$$E_c\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_c\boldsymbol{x}(t) + B_c\boldsymbol{w}(t) \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = C_c\boldsymbol{x}(t) + D_c\boldsymbol{w}(t) \tag{8b}$$

H_2次优控制问题是，寻找一个动态输出反馈控制器(7)，使闭环系统(8)是容许的且闭环传递函数 $T_{zw}(s)$的 H_2范数小于给定的正数 γ，即 $\|T_{zw}(s)\|_2<\gamma$，其中 $K(s)\in R^{p\times q}$.

定理 2. 考虑系统(6)，给定性能指标 $\gamma>0$，如果存在矩阵 $X=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$($X$ 非奇异，$X_i\in R^{n\times n}$，$i=1,2,3,4$)，$Y=\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix}\in R^{(n+p)\times 2n}$ ($Y_i\in R^{p\times n}$，$i=1,2$)，$[X_3\quad X_4]=\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ \Delta_1 & \Delta_2 \end{bmatrix}$及 $\bar{W}\in R^{l\times l}$满足如下 LMIs

$$\begin{bmatrix} \bar{A}X + \bar{B}_2Y + (\bar{A}X + \bar{B}_2Y)^{\mathrm{T}} & X^{\mathrm{T}}\bar{C}_1^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}\bar{D}^{\mathrm{T}} \\ \bar{C}_1X + \bar{D}Y & -I \end{bmatrix} \leqslant 0 \tag{9a}$$

$$\begin{bmatrix} E_cX & E_c\bar{Q}\bar{P}\bar{B}_1 \\ \bar{B}_1^{\mathrm{T}}\bar{P}^{\mathrm{T}}\bar{Q}^{\mathrm{T}}E_c^{\mathrm{T}} & \bar{W} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{9b}$$

$$\mathrm{trace}(\bar{W}) < \gamma^2 \tag{9c}$$

及 $\mathrm{rank}(\bar{C}_2)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \bar{C}_2 \\ YX^{-1} \end{bmatrix}$，并使得系统($E_c$，$\bar{A}+\bar{B}_2YX^{-1}$，$\bar{B}_1$，$\bar{C}_1+\bar{D}YX^{-1}$)有限动态可检测及脉冲能观，且其传递函数矩阵是严格真的，其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \bar{C}_1 = [C_1 \quad 0], \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \bar{D} = [D \quad 0]$$

非奇异矩阵 $\bar{P},\bar{Q}$ 使$(E_c,\bar{A}+\bar{B}_2YX^{-1})$分解为式(2)的形式,则存在反馈控制器(7)使得闭环系统(8)是容许的,且$\|T_{zw}(s)\|_2<\gamma$.

进一步地,所求的一个容许的控制器增益(7)可由下式给出

$$\bar{K}=\begin{bmatrix}0 & C_k\\ B_k & A_k\end{bmatrix},\quad \overline{KC}_2=YX^{-1} \tag{10}$$

证明. 利用定理1和适当的变量代换不难推出结论,从略.

4 仿真算例

设系统(6)的系数矩阵为

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&1&-2\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}-0.01&0.01\\0&0\\0&0\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$C_1=[1\quad 0\quad -1],C_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0.7\end{bmatrix},D=1$$

如果取 $\gamma=0.9$,则有

$$X=\begin{bmatrix}1.4304&0&0&-1.2074&0&0\\-0.5953&1.0761&0.3660&0.0342&0&0\\-0.4398&-0.0097&1.0498&0.6219&0&0\\-1.2074&0&0&2.4123&0&0\\0&0&0&0&2.0756&0\\0&0&0&0&0&2.0756\end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}-1.2074&0&0&2.4123&0&0\\-1.9908&-2.6079&0&-1.2073&0&0\\0&0&0&0&-1.0378&0\\0&0&0&0&0&-1.0378\end{bmatrix},\bar{W}=\begin{bmatrix}0.66&0\\0&0.01\end{bmatrix}$$

满足定理2的条件,于是存在动态输出反馈控制器(7),其中

$$A_k=\begin{bmatrix}-3.0336&0&0\\0&-0.5&0\\0&0&-0.5\end{bmatrix},B_k=\begin{bmatrix}-4.6989&1.2079\\0&0\\0&0\end{bmatrix},C_k=[1\quad 0\quad 0]$$

使闭环广义系统是容许的且$\|T_{zw}(s)\|_2<0.9$.

5 结束语

本文主要研究连续广义系统的 H_2 次优控制问题. 首先进行了广义系统的 H_2 次优性能指标分析,给出了一个矩阵不等式组的充要条件. 其次提出了 H_2 次优问题的动态输出反馈控制器的设计,得到了该问题可解的一个充分条件.

References

1 Rosenbrock H H. Structural properties of dynamical systems. *International Journal Control* , 1974, **20**(2): 191～202

2 Dai L. Singular Control Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 231～259

3 Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, Suda N. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach. *Automatica*, 1997, **33**(4): 669～673

4 Takaba K, Morihira N, Katayama T. H_∞ control for descriptor systems—A J-spectral factorization approach. In: Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista: IEEE, 1994. 2251～2256

5 Takaba K. Robust H_2 control of descriptor system with time-varying uncertainty. *International Journal Control*, 1998, **71**(4): 559～579

6 Yang D M, Zhang Q L, Sha C M. H_2 Optimal control for descriptor systems. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(6): 920～926(in Chinese)

7 Gahinet P, Nemirowskii A, Laub A J, Chilali M. The LMI control toolbox. In: Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista: IEEE, 1994. 2038～2041

杨冬梅 1988 年于天津大学获学士学位，1996 年和 2003 年在东北大学分别获得硕士和博士学位，现为东北大学副教授. 研究领域为广义系统，H_2/H_∞控制理论及应用.

(**YANG Dong-Mei** Received her bachelor degree from Tianjin University in 1988, received master and Ph. D. degree from Northeastern University in 1996 and 2003, respectively. She is an associate professor at Northeastern University. Her research interests include descriptor system, H_2/H_∞ control theory and application.)

张庆灵 东北大学理学院院长，教授，博士生导师. 研究领域为广义系统，鲁棒控制及分散控制.

(**ZHANG Qing-Ling** Professor, the Dean of School of Science at Northeastern University. His research interests include descriptor system, robust control, and decentralized control.)

沙成满 东北大学副教授，博士. 研究领域为结构控制，H_2/H_∞控制.

(**SHA Cheng-Man** Associate Professor and Doctor at Northeastern University. His research interests include structure control and H_2/H_∞ control.)

翟 丁 东北大学博士研究生. 研究领域为广义系统、分散控制和计算机网络.

(**ZHAI Ding** Ph. D. candidate at Northeastern University. His research interests include descriptor system, decentralized control, and computer network.)