具有正弦扰动的时滞系统前馈 – 反馈次优控制: 灵敏度法[1)]

唐功友 马 慧
(中国海洋大学信息科学与工程学院 青岛 266071)
(E-mail: gtang@ouc.edu.cn, mahui@ouc.edu.cn)

摘 要 研究线性时滞系统在外部正弦扰动作用下的前馈 – 反馈最优减振问题, 提出了一种最优控制律的灵敏度设计方法. 通过引入灵敏度参数并围绕它展开幂级数, 将系统的最优控制问题简化为不含超前项和时滞项的两点边值问题族. 通过截取最优控制级数的有限和获得原系统的前馈 – 反馈次优控制律. 仿真结果表明, 与经典状态反馈最优控制相比, 本文的算法更加鲁棒, 能更加有效地抑制正弦扰动.

关键词 时滞系统, 灵敏度法, 正弦扰动, 最优控制, 前馈 – 反馈控制
中图分类号 TP13

Feedforward and Feedback Suboptimal Control for Time-Delay Systems with Sinusoidal Disturbances: A Sensitivity Approach

TANG Gong-You MA Hui
(*College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao* 266071)
(E-mail: gtang@ouc.edu.cn, mahui@ouc.edu.cn)

Abstract The optimal disturbance rejection problem for linear time-delay systems affected by sinusoidal disturbances is considered. The paper proposes a sensitivity approach to design of feedforward and feedback optimal control law. By introducing a sensitivity parameter and expanding power series around it, the optimal control problem is reduced to a series of two-point boundary value problems without time-advance or time-delay terms. By intercepting finite sum of the optimal control series, a suboptimal control law for the system is obtained. Simulations show that the algorithm presented in this paper is more efficient to damp external sinusoidal disturbances than the classical feedback optimal control law.

Key words Time-delay systems, sensitivity approach, sinusoidal disturbances, optimal control, feedforward and feedback control

1 引言

严格地讲, 任何系统都存在时滞现象. 时滞系统的分析与综合问题是难解决的无穷维问题, 也是控制理论与控制工程研究的热点之一. 常规的扩维方法[1] 简单易行, 但对于大

1) 国家自然科学基金项目 (60574023), 山东省自然科学基金重点项目 (Z2005G01), 青岛市自然科学基金 (05-1-JC-94) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60574023), the Key Natural Science Foundation of Shandong Province (Z2005G01), and the Natural Science Foundation of Qingdao City (05-1-JC-94)
收稿日期 2004-5-27 收修改稿日期 2006-4-19
Received May 27, 2004; in revised form April 19, 2006

时滞或者高阶系统，容易带来 “维数灾难 ”. 基于二次型性能指标的时滞系统最优控制问题，由极大值原理得到含有超前滞后项的两点边值问题. 对这类问题，无论求其精确解还是数值解都是非常困难的. 这激励人们寻求近似最优控制 (次优控制) 策略以避免求最优控制律的困难. 例如，Yue 等[2] 研究了具有分布时滞的不确定性广义系统的混合 H_2/H_∞ 鲁棒最优控制问题，给出了一种次优控制器的设计方法. Tang 等[3] 针对离散时滞系统二次型性能指标最优控制问题，提出了次优控制器设计的逐次逼近方法. Michael 等[4] 则利用一个降维变换研究了具有输入时滞的线性系统的最优控制问题.

另外，一般的系统都是在外界持续干扰的作用下工作[5,6]. 正弦扰动在实际控制系统中广泛存在，例如在飞机飞行姿态控制系统中，机翼承受风剪应力，其谐波振动呈现正弦力的形式[7]; 在海洋平台的振动控制系统中，结构物承受的随机海浪力的组成波为正弦波[8,9] 等等. 对于在外界正弦扰动作用下的时滞系统的最优控制问题，用常规初值问题得到的经典反馈最优控制对在外界正弦扰动作用下的系统不是最优的，它对扰动的鲁棒性较差. 在控制系统中加入前馈控制可以补偿干扰对系统输出的影响[10,11]. 在以往的定值系统最优控制研究中，一般只考虑系统的初值问题，而很少考虑外界扰动对系统的影响. 研究在外界持续扰动作用下系统的最优控制问题比只考虑系统初值的最优控制问题有更重要的实际意义[12~14].

本文研究状态变量含有时滞的线性系统在外部正弦扰动下的最优减振控制问题，提出了前馈 – 反馈最优控制器设计的灵敏度法. 通过引入灵敏度参数并围绕它展开幂级数，通用灵敏度法将含有超前滞后项的两点边值问题简化为不含超前滞后项的两点边值问题族. 系统的最优控制律是幂级数和的形式，通过截取级数的前有限项之和得到原系统的前馈 – 反馈次优控制律. 通过仿真实例，我们将本文提出的前馈 – 反馈最优控制律与经典状态反馈最优控制律进行比较. 仿真结果表明，本文的方法对正弦扰动有更好的鲁棒性，能够更加有效的抑制外来扰动.

2　问题描述

考虑下列带有正弦扰动的线性时滞系统

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau)+B\boldsymbol{u}(t)+D\boldsymbol{v}(t),\quad t>0\\&\boldsymbol{x}(t)=\phi(t),\quad t\in[-\tau,0]\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 是状态向量，$\boldsymbol{u}\in R^r$ 是控制向量，$\boldsymbol{v}\in R^m$ 是正弦扰动向量，A,A_1,B,D 是具有适当维数的常量矩阵，$\tau>0$ 是时滞项，$\phi(t)$ 是连续的初始向量函数. 假定 (A,B) 能控，$\boldsymbol{v}$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\sin(\omega_1t+\varphi_1)\\\alpha_2\sin(\omega_2t+\varphi_2)\\\vdots\\\alpha_m\sin(\omega_mt+\varphi_m)\end{bmatrix}\tag{2}$$

其中频率 $0\leqslant\omega_i<\pi$ 是已知的. 在以下的研究中，我们假设 $\boldsymbol{v}$ 是可测量的.

对于受外界持续扰动的系统的最优控制问题，由于系统的状态向量和控制向量的稳态值至少有一个不趋于零，所以经典最优控制的无穷时间二次型性能指标是不收敛的. 又由于系统的状态向量和控制向量的稳态值一般是振荡过程，其幅值和相位无法预先确定，所以采用经典最优控制的有限时间二次型性能指标无法确定状态向量的终值. 为解决经典最

优控制二次型性能指标的局限性，我们将问题转化为要寻找一个控制 $\boldsymbol{u}^*(t)$, 使得下列二次型平均性能指标 J 极小

$$J=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)R\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t \tag{3}$$

其中矩阵 Q 和 R 满足通常的状态调节器条件.

我们知道，系统 (1) 关于 (3) 的最优控制问题的必要条件导致下列两点边值问题

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau)-S\boldsymbol{\lambda}(t)+D\boldsymbol{v}(t)\\&-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=Q\boldsymbol{x}(t)+A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t)+A_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t+\tau),\quad t>0\\&\boldsymbol{x}(t)=\phi(t),\ t\in[-\tau,0],\quad\lim_{T\to\infty}\boldsymbol{\lambda}(T)=0\end{aligned} \tag{4}$$

系统的最优控制律为

$$\boldsymbol{u}(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{5}$$

其中 $S=BR^{-1}B^{\mathrm{T}}$. 注意到问题 (4) 是一个既含有超前项 $\boldsymbol{\lambda}(t+\tau)$ 和时滞项 $\boldsymbol{x}(t-\tau)$, 又含有外部扰动 $\boldsymbol{v}(t)$ 的两点边值问题，对这一问题无论是求精确解还是求数值解都是非常困难的. 因此，研究这类系统最优控制问题的近似解是非常有意义的.

3 前馈 – 反馈最优控制器的近似设计

本节我们针对系统 (1) 关于性能指标 (3) 的最优控制问题，提出一种利用级数和近似求解前馈 – 反馈最优控制律的灵敏度设计方法.

首先，基于 (4) 和 (5), 构造下列含有灵敏度参数 ε 的两点边值问题

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t,\varepsilon)=A\boldsymbol{x}(t,\varepsilon)-S\boldsymbol{\lambda}(t,\varepsilon)+\varepsilon A_1\boldsymbol{x}(t-\tau,\varepsilon)+D\boldsymbol{v}(t)\\&-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t,\varepsilon)=Q\boldsymbol{x}(t,\varepsilon)+A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t,\varepsilon)+\varepsilon A_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t+\tau,\varepsilon),\quad t>0\\&\boldsymbol{x}(t,\varepsilon)=\phi(t),\ t\in[-\tau,0],\quad\lim_{T\to\infty}\boldsymbol{\lambda}(T,\varepsilon)=0\end{aligned} \tag{6}$$

和最优控制律

$$\boldsymbol{u}(t,\varepsilon)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t,\varepsilon) \tag{7}$$

其中 $0\leqslant\varepsilon\leqslant1$ 是与 t 无关的实标量灵敏度参数.

假设 $\boldsymbol{u}(t,\varepsilon)$, $\boldsymbol{x}(t,\varepsilon)$, $\boldsymbol{\lambda}(t,\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 处关于 ε 无限可微，它们关于 ε 的 Maclaurin 展开式为

$$\boldsymbol{u}(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^i}{i!}\boldsymbol{u}^{(i)}(t),\ \boldsymbol{x}(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^i}{i!}\boldsymbol{x}^{(i)},\ \boldsymbol{\lambda}(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^i}{i!}\boldsymbol{\lambda}^{(i)}(t) \tag{8}$$

上标 (i) 表示在 $\varepsilon=0$ 处关于 ε 的 i 阶导数.

在以下的讨论中，我们假设上述各级数在 $\varepsilon=1$ 处收敛. 显然, (6) 描述的两点边值问题在 $\varepsilon=1$ 处的级数解等价于 (4). 计算出 $\boldsymbol{u}^{(i)}(t)$ 后，由 (8) 可以得到最优控制 $\boldsymbol{u}^*(t)$, 即

$$\boldsymbol{u}^*(t)=\boldsymbol{u}(t,1)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\boldsymbol{u}^{(i)}(t) \tag{9}$$

对该问题的最优控制，我们给出下面的结果.

定理 1. 系统 (1) 关于性能指标 (3) 的最优控制律为

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P_1\boldsymbol{x}(t) + P_2\boldsymbol{v}(t) + P_3\boldsymbol{v}_\omega(t) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\boldsymbol{g}_i(t)] \tag{10}$$

其中 P_1 是下列 Riccati 矩阵方程的唯一正定解

$$A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A - P_1SP_1 + Q = 0 \tag{11}$$

P_2 和 P_3 是下列矩阵方程的唯一解

$$(A^{\mathrm{T}} - P_1S)^2P_2 + P_2\Omega^2 = -(A^{\mathrm{T}} - P_1S)P_1D, \quad (A^{\mathrm{T}} - P_1S)^2P_3 + P_3\Omega^2 = -P_1D\Omega \tag{12}$$

第 i 阶伴随向量 $\boldsymbol{g}_i$ 由下式求得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_0(t) = P_2\boldsymbol{v} + P_3\boldsymbol{v}_w\\
&\boldsymbol{g}_i(t) = i\int_t^{\infty} e^{(A-SP_1)^{\mathrm{T}}(r-t)}[P_1A_1\boldsymbol{x}^{(i-1)}(r-\tau) + A_1^{\mathrm{T}}P_1\boldsymbol{x}^{(i-1)}(r+\tau) + A_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{i-1}(r+\tau)]\mathrm{d}r\\
&i = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{13}$$

第 i 阶状态向量 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ 由下式确定

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}^{(0)}(t) = (A - SP_1)\boldsymbol{x}^{(0)}(t) + (D - SP_2)\boldsymbol{v}(t) - SP_3\boldsymbol{v}_w(t), \quad t > 0\\
&\boldsymbol{x}^{(0)}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \quad t \in [-\tau, 0]\\
&\dot{\boldsymbol{x}}^{(i)}(t) = (A - SP_1)\boldsymbol{x}^{(i)}(t) + iA_1\boldsymbol{x}^{(i-1)}(t-\tau) - S\boldsymbol{g}_i(t), \quad t > 0\\
&\boldsymbol{x}^{(i)}(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad i = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\Omega = \mathrm{diag}[\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m], \ \boldsymbol{v}_\omega(t) = \left[v_1(t - \frac{\pi}{2\omega_1}), v_2(t - \frac{\pi}{2\omega_2}), \cdots, v_m(t - \frac{\pi}{2\omega_m})\right]^{\mathrm{T}}$$

证明. 将 (8) 代入 (6), 并令等式两边无穷级数和的同次项对应相等, $\varepsilon \to 0$, 可得以下两点边值问题族

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}^{(0)}(t) = A\boldsymbol{x}^{(0)}(t) - S\boldsymbol{\lambda}^{(0)}(t) + D\boldsymbol{v}(t)\\
&-\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(0)}(t) = Q\boldsymbol{x}^{(0)}(t) + A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{(0)}(t)\\
&\boldsymbol{x}^{(0)}(0) = \boldsymbol{\phi}(0), \quad \lim_{T\to\infty}\|\boldsymbol{\lambda}^{(0)}(T)\| < \gamma_0
\end{aligned} \tag{15}$$

和

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}^{(i)}(t) = A\boldsymbol{x}^{(i)}(t) - S\boldsymbol{\lambda}^{(i)}(t) + iA_1\boldsymbol{x}^{(i-1)}(t-\tau)\\
&-\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(i)}(t) = Q\boldsymbol{x}^{(i)}(t) + A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{(i)}(t) + iA_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{(i-1)}(t+\tau)\\
&\boldsymbol{x}^{(i)}(0) = 0, \quad \lim_{T\to\infty}\|\boldsymbol{\lambda}^{(i)}(T)\| < \gamma_i, \ i = 1, 2, \cdots
\end{aligned} \tag{16}$$

其中 γ_i 为某正常数. 将 (8) 代入 (7), 可以得到控制项 $\boldsymbol{u}^{(i)}(i = 0, 1, \cdots)$ 的表达式

$$\boldsymbol{u}^{(i)}(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{(i)}(t), \quad i = 0, 1, 2, \cdots \tag{17}$$

下面讨论 $\boldsymbol{u}^{(i)}(i=0,1,\cdots)$ 的求法. 当 $i=0$ 时, 令

$$\boldsymbol{\lambda}^{(0)}(t)=P_1\boldsymbol{x}^{(0)}(t)+\boldsymbol{g}_0,\quad \boldsymbol{g}_0=P_2\boldsymbol{v}(t)+P_3\boldsymbol{v}_\omega(t) \tag{18}$$

注意到 $\boldsymbol{v}$ 的表达式 (2), 可得

$$\dot{\boldsymbol{v}}=-\Omega\boldsymbol{v}_\omega,\quad \dot{\boldsymbol{v}}_\omega(t)=\Omega\boldsymbol{v}(t) \tag{19}$$

由 (18) 和 (15) 的第一式, 并注意到 (19), 可得

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(0)}(t)=(P_1A-P_1SP_1)\boldsymbol{x}^{(0)}(t)+(P_1D-P_1SP_2+P_3\Omega)\boldsymbol{v}(t)-(P_2\Omega+P_1SP_3)\boldsymbol{v}_\omega(t) \tag{20}$$

将 (18) 代入 (15) 的第二式, 可得

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(0)}(t)=(Q+A^{\mathrm{T}}P_1)\boldsymbol{x}^{(0)}(t)+A^{\mathrm{T}}P_2\boldsymbol{v}(t)+A^{\mathrm{T}}P_3\boldsymbol{v}_\omega(t) \tag{21}$$

比较 (20) 和 (21) 的系数关系, 可得 Riccati 矩阵方程 (11) 和矩阵方程

$$P_1D+P_3\Omega-P_1SP_2+A^{\mathrm{T}}P_2=0,\quad A^{\mathrm{T}}P_3-P_2\Omega-P_1SP_3=0 \tag{22}$$

整理 (22), 可以得到矩阵方程 (12). 将 (18) 代入 (17), 可以得到

$$\boldsymbol{u}^{(0)}(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P_1\boldsymbol{x}^{(0)}(t)+P_2\boldsymbol{v}(t)+P_3\boldsymbol{v}_\omega(t)] \tag{23}$$

下面讨论 (23) 中 $\boldsymbol{u}^{(0)}(t)$ 的存在唯一性问题. 显然, 这等价于 P_1,P_2 和 P_3 的存在唯一性问题. 因为 Q 和 R 满足线性调节器条件, 所以 P_1 有唯一正定解. 由矩阵方程理论知, 矩阵方程 (12) 的解 P_2 和 P_3 存在且唯一的充分必要条件是 $(A-SP_1)^2$ 与 $-\Omega^2$ 无公共特征值[15], 即

$$\lambda_i(A-SP_1)^2\neq\lambda_j(-\Omega^2),\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m \tag{24}$$

由最优控制理论知, $\lambda_i(A-SP_1)=-\alpha_i+j\beta_i$, $(\alpha_i>0,\beta_i\in R,j=\sqrt{-1})$, 因此有

$$\lambda_i(A-SP_1)^2=[\lambda_i(A-SP_1)]^2=\alpha_i^2-\beta_i^2-j2\alpha_i\beta_i \tag{25}$$

注意到 $\boldsymbol{\lambda}_j(-\Omega^2)$ 为非正实数. 由 (25) 可知 $\beta_i=0$, 即 $\boldsymbol{\lambda}_i(A-SP_1)^2=\alpha_i^2>0$. 所以 $(A-SP_1)^2$ 与 $-\Omega^2$ 无公共特征值. 即 P_2 和 P_3 存在且唯一.

下面由递推算法计算 $\boldsymbol{u}^{(i)}(t)(i=1,2,\cdots)$. 令

$$\boldsymbol{\lambda}^{(i)}(t)=P_1\boldsymbol{x}^{(i)}(t)+\boldsymbol{g}_i(t) \tag{26}$$

由 (26) 和 (16) 的第一式, 可以得到求解 $\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$ 的状态向量微分方程族 (14), 并可以得到

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(i)}(t)=(P_1A-P_1SP_1)\boldsymbol{x}^{(i)}(t)-P_1S\boldsymbol{g}_i(t)+iP_1A_1\boldsymbol{x}^{(i-1)}(t-\tau)+\dot{\boldsymbol{g}}_i(t) \tag{27}$$

将 (26) 代入 (16) 的第二式, 得到

$$-\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(i)}(t)=(Q+A^{\mathrm{T}}P_1)\boldsymbol{x}^{(i)}(t)+A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_i(t)+iA_1^{\mathrm{T}}(P_1\boldsymbol{x}^{(i-1)}(t+\tau)+\boldsymbol{g}_{i-1}(t+\tau)) \tag{28}$$

将 (27) 和 (28) 等式两边相加, 可得求解 $\boldsymbol{g}_i$ 的方程

$$\dot{\boldsymbol{g}}_i(t)=-(A-SP_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_i(t)-iP_1A_1\boldsymbol{x}^{(i-1)}(t-\tau)-iA_1^{\mathrm{T}}[P_1\boldsymbol{x}^{(i-1)}(t+\tau)+\boldsymbol{g}_{i-1}(t+\tau)]$$

$$\lim_{T\to\infty}\|\boldsymbol{g}_i(T)\|<\eta_i,\quad \eta_i>0 \tag{29}$$

我们指出，之所以在 (29) 中将 $\boldsymbol{g}_i(T)$ 定义为有界的而没有给出其确定数值是因为 (29) 的解与终值条件无关. 事实上，对 (29) 反向积分可以求得其解的表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_i(t)=&\lim_{T\to\infty}e^{(A-SP_1)^{\mathrm{T}}(T-t)}\boldsymbol{g}_i(T)+i\int_t^{\infty}e^{(A-SP_1)^{\mathrm{T}}(r-t)}[P_1A_1\boldsymbol{x}^{(i-1)}(r-\tau)+\\&A_1^{\mathrm{T}}P_1\boldsymbol{x}^{(i-1)}(r+\tau)+A_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{i-1}(r+\tau)]\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{30}$$

由于 $\boldsymbol{g}_i$ 的终值有界且矩阵 $(A-SP_1)$ 稳定，从而对于任意的时间 t,

$$\lim_{T\to\infty}e^{(A-SP_1)^{\mathrm{T}}(T-t)}\boldsymbol{g}_i(T)=0 \tag{31}$$

综合 (18) 及 (29) 的解，得到 $\boldsymbol{g}_i$ 解的迭代表达式 (13).

将 $\boldsymbol{g}_i(t),\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$ 及 (26) 代入 (17) 可以求出 $\boldsymbol{u}^{(i)}$, 即

$$\boldsymbol{u}^{(i)}(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P_1\boldsymbol{x}^{(i)}(t)+\boldsymbol{g}_i(t)],\quad i=1,2,\cdots \tag{32}$$

将 (23) 和 (32) 代入 (8) 的第一式得

$$\boldsymbol{u}(t,\varepsilon)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P_1\boldsymbol{x}(t,\varepsilon)+P_2\boldsymbol{v}(t)+P_3\boldsymbol{v}_\omega(t)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^i}{i!}\boldsymbol{g}_i(t)] \tag{33}$$

令 $\varepsilon=1$, 得到系统 (1) 的前馈 – 反馈最优控制律 (10). □

注 1. 在系统 (1) 中，如果 $A_1=0$, 则由 (13) 和 (14) 知，$\boldsymbol{g}_i(t)\equiv 0,(i=1,2,\cdots)$. 由 (10) 得系统的前馈 – 反馈最优控制律为

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P_1\boldsymbol{x}(t)+P_2\boldsymbol{v}(t)+P_3\boldsymbol{v}_\omega(t)] \tag{34}$$

这一结果和文献 [13] 的结果是吻合的. 这也说明在前馈 – 反馈最优控制律 (10) 中最后一项的作用是补偿时滞对系统的影响.

注 2. 如果 Ω 为可逆矩阵，则求解 P_2 和 P_3 的矩阵方程 (12) 可以进一步简化为

$$(A^{\mathrm{T}}-P_1S)^2P_3+P_3\Omega^2=-P_1D\Omega,\quad P_2=(A^{\mathrm{T}}-P_1S)P_3\Omega^{-1} \tag{35}$$

并且如果 Ω 可逆，外部扰动 (2) 中 $\omega_i=0$ 对应于阶跃扰动. 所以本文的设计方法也适用于阶跃扰动下的时滞系统的近似最优控制设计.

注 3. 由迭代方程 (13) 和 (14) 知，求解 $\boldsymbol{g}_i$ 时，其中的 $\boldsymbol{x}^{(i-1)}$ 和 $\boldsymbol{g}_{i-1}$ 是已知的激励函数，所以求解 $\boldsymbol{g}_i$ 的过程是一个既无时滞项又无超前项的线性递推过程.

注 4. 在实际控制系统的前馈 – 反馈最优控制律设计中，精确求解最优控制律 (10) 的最后一项几乎是不可能的，我们只能在最优控制律 (10) 最后一项中截取级数的前 M 项和来近似其最优控制律，即得到系统 (1) 的 M 阶前馈 – 反馈次优控制律

$$\boldsymbol{u}_M(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P_1\boldsymbol{x}(t)+P_2\boldsymbol{v}(t)+P_3\boldsymbol{v}_\omega+\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{i!}\boldsymbol{g}_i(t)] \tag{36}$$

由 (36) 还可以得到计算次优控制律 $\boldsymbol{u}_M(t)$ 的递推算法

$$\boldsymbol{u}_0(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}[P_1\boldsymbol{x}(t)+P_2\boldsymbol{v}(t)+P_3\boldsymbol{v}_\omega]$$

$$\boldsymbol{u}_i(t) = \boldsymbol{u}_{i-1} - \frac{1}{i!}R^{-1}B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, M \tag{37}$$

由 (36) 可知, 其等号右边的前三项是最优控制组成部分的精确解, 其近似解只是第四项. 所以, 如果第四项数值相对较小或 $\boldsymbol{g}_i$ 衰减较快, 次优控制律 (36) 在较小的迭加次数时就可以逼近最优控制律 (10). 我们给出在实际应用中确定迭代次数的一种方法. 给定常量 $\delta > 0$, 当 $|(J_{i-1} - J_i)/J_i| < \delta$ 时, 取 $M = i$, 从而得到前馈 - 反馈次优控制律 $\boldsymbol{u}_M$.

4 仿真例子

本节通过对受外部正弦扰动作用的时滞系统的仿真例子来考察所提出的前馈 – 反馈最优控制律的有效性, 系统模型由 (1) 描述, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.4649 & -0.1570 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2742 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2742 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}(t) = 5\sin\frac{\pi t}{5}, \tau = 1$$

系统的二次型平均性能指标为

$$J = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}}[50x_1^2(t) + 0.23\boldsymbol{u}^2(t)]\mathrm{d}t \tag{38}$$

经计算得到, 采用经典的无限时域状态反馈最优控制律, 系统的性能指标值为 $J = 6.8973$, 而采用本文提出的前馈 - 反馈次优控制 (36), $i = 0, 1, 2$ 时, 系统的性能指标值分别为 $J_0 = 6.4266$, $J_1 = 2.4812$, $J_2 = 2.4661$. 若令 $\delta = 0.01$, 则 $|(J_1 - J_2)/J_2| = 0.0061 < \delta$. 即 $u_2(t)$ 已接近于系统的最优控制律.

图 1 和图 2 给出了状态变量 x_1 和控制变量 $\boldsymbol{u}$ 的仿真曲线, 其中点线表示采用经典的状态反馈最优控制律的仿真结果, 短划线、点划线和实线分别表示采用前馈 – 反馈次优控制律 (36) 时, $i = 0, i = 1$ 和 $i = 2$ 的结果. 由仿真结果可以看出, 前馈 – 反馈次优控制可以有效抑制外来正弦扰动对系统性能的影响, 明显优于经典的状态反馈最优控制. 随着迭代次数的增加, 系统性能不断提高. 用本文提出的控制算法, 可以用很少的迭代次数达到性能最优, 算法的收敛性好.

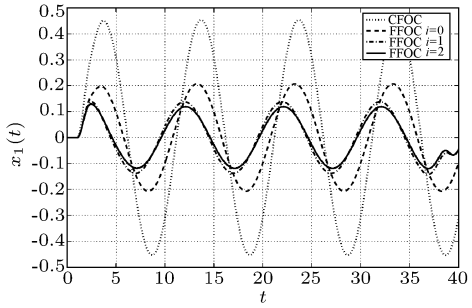

图 1 状态变量 x_1 曲线

Fig. 1 Curves of state variable x_1

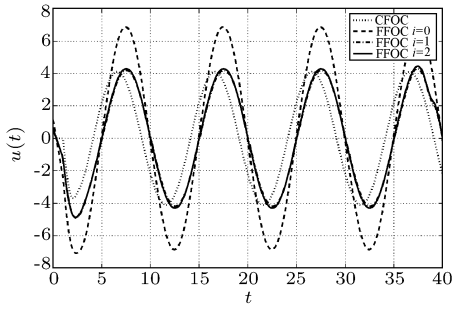

图 2 控制律曲线

Fig. 2 Curves of control law

5 结论

本文针对外部正弦扰动作用下的线性时滞系统, 提出了一种前馈 – 反馈最优控制器的灵敏度近似设计方法. 通过引进灵敏度参数, 进行幂级数展开, 得到最优控制律的级数

解. 该方法避免了直接求解带有超前滞后项的两点边值问题, 算法简单可行, 收敛速度较快. 经过仿真验证, 与经典状态反馈最优控制相比, 本算法能更有效地抑制外来正弦扰动, 其结果有更好的鲁棒性.

References

1 Hsiao F H, Pan S T, Teng C C. Optimal D-stable control for discrete multiple time-delay systems with parametric uncertainties. *Journal of the Franklin Institute*, 1996, **333B**(6): 991∼1000

2 Yue D, Lam J. Suboptimal robust mixed H_2/H_∞ controller design for uncertain descriptor systems with distributed delays. *Computers and Mathematics with Applications*, 2004, **47**(6,7): 1041∼1055

3 Tang G Y, Wang H H. Suboptimal control for discrete linear systems with time-delay: A successive approximation approach. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(3): 419∼426

4 Michael B, Jesus R G. Optimal control for linear systems with multiple time delays in control input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(1): 91∼97

5 Savkin A V, Petersen I R. Robust control with rejection of harmonic disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(11): 1968∼1971

6 Tang G Y, Zhang S M. Optimal rejection with zero steady-state error to sinusoidal disturbances for time-delay. *Asian Journal of Control*, 2006, **8**(2): 117∼123

7 Cao Y, Chen Y, Yuan K, Jin C. Nonlinear inverse dynamics control of the aircraft in the presence of windshear. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2004, **76**(6): 592∼599

8 Ma H, Tang G Y, Zhao Y D. Feedforward and feedback optimal control for offshore structures subjected to irregular wave forces. *Ocean Engineering*, 2006, **33**(8,9): 1105∼1117

9 Wang W, Tang G Y. Feedback and feedforward optimal control for offshore jacket platforms. *China Ocean Engineering*, 2004, **18**(4): 515∼526

10 Wu W, Chou Y S. Adaptive feedforward and feedback control of non-linear time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*, 1999, **72**(12): 1127∼1138

11 Goodzeit N E, Phan M Q. System and disturbance identification for feedforward and feedback control applications. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2000, **23**(2): 260∼268

12 Cai G P, Huang J Z, Yang S X. An optimal control method for linear systems with time delay. *Computers and Structures*, 2003, **81**(15): 1539∼1546

13 Tang G Y. Feedforward and feedback optimal control for linear systems with sinusoidal disturbances. *High Technology Letters*, 2001, **7**(4): 16∼19

14 Lindquist A, Yakubovich V A. Optimal damping of forced oscillations in discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(6): 786∼802

15 Sujit K M. The matrix equation AXB+CXD=E. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1977, **32**(4): 823∼825

唐功友 中国海洋大学教授、博士生导师. 1991 年毕业于华南理工大学自动化系, 获博士学位. 主要研究领域为时滞系统, 非线性系统及网络控制系统的分析与控制等.

(**TANG Gong-You** Professor of the College of Information Science and Engineering, Ocean University of China. He received his Ph. D. degree in control theory and application from the South China University of Technology in 1991. His main research interests include analysis and control for time-delay systems, nonlinear systems, and networked control systems.)

马 慧 中国海洋大学讲师. 2006 年毕业于中国海洋大学信息学院, 获博士学位. 研究领域为时滞系统与非线性系统的分析与控制.

(**MA Hui** Lecturer of the College of Information Science and Engineering, Ocean University of China. She received her Ph. D. degree from the Ocean University of China in 2006. Her main research interests include analysis and control for time-delay systems and nonlinear systems.)