含局部空间约束的 t 分布混合模型的点集配准

周志勇[1] 李莉华[2] 郑 健[1] 蒯多杰[1] 胡 粟[3] 张 涛[4]

摘 要 基于高斯混合模型 (Gaussian mixture model, GMM) 的点集非刚性配准算法易受重尾点和异常点影响, 提出含局部空间约束的 t 分布混合模型的点集非刚性配准算法. 通过期望最大化 (Expectation maximization, EM) 框架将高斯混合模型推广为 t 分布混合模型; 把 Dirichlet 分布作为浮动点的先验权重, 并构造含局部空间约束性质的 Dirichlet 分布参数. 使用 EM 算法获得配准参数的闭合解; 计算浮动点的自由度, 改变其概率密度分布, 避免异常点水平估计误差. 实验表明, 本文提出的配准算法具有配准误差小、鲁棒性好、抗干扰能力强等优点.

关键词 t 分布混合模型, Dirichlet 分布, 点集, 非刚性配准, 期望最大化算法

引用格式 周志勇, 李莉华, 郑健, 蒯多杰, 胡粟, 张涛. 含局部空间约束的 t 分布混合模型的点集配准. 自动化学报, 2014, **40**(4): 683−696

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00683

Point Sets Non-rigid Registration Using Student′s-t Mixture Model with Spatial Constraints

ZHOU Zhi-Yong[1] LI Li-Hua[2] ZHENG Jian[1] KUAI Duo-Jie[1] HU Su[3] ZHANG Tao[4]

Abstract A robust non-rigid registration framework using the student′s-t mixture model with spatial constraints is proposed in this paper. The Gaussian mixture model which is vulnerable to outliers and data longer than normal tails is a special case of the student′s-t mixture model in theory. The Dirichlet distribution is used as a prior distribution to reduce the impact of outliers. The Dirichlet parameter set with spatial constrains is structured to incorporate the spatial information into the decision process. The closed form solution of the parameter set of the student′s-t mixture model is solved by re-parameterizing the student′s-t mixture model in the expectation maximization (EM) algorithm. The degree of freedom of each moving point is calculated to change the probability density to reduce the registration error. It can also avoid estimating the outlier level of data sets that may bring additional error. The experiments showed that this non-rigid registration algorithm has features of high-accuracy and good robustness compared to other point set registration approaches.

Key words Student′s-t mixture model, Dirichlet distribution, point set, non-rigid registration, expectation maximization (EM) algorithm

Citation Zhou Zhi-Yong, Li Li-Hua, Zheng Jian, Kuai Duo-Jie, Hu Su, Zhang Tao. Point sets non-rigid registration using student′s-t mixture model with spatial constraints. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(4): 683−696

特征点配准是医学图像分析、计算机视觉和图像检索的重要研究方向. 迭代就近点 (Iteration close point, ICP) 算法[1] 使用最近距离准则, 通过最小化点集空间变换距离计算点的位移, 优点是结构简单、计算复杂度低, 缺点是要求参考点集和浮动点集的初始位置偏差较小. 通过在 ICP 中加入概率密度[2], Chui 等[3−4] 提出了鲁棒点匹配 (Robust point matching, RPM) 算法. Chui 等[5] 在 RPM 中用薄板样条 (Thin plate spline, TPS) 参数化形变场, 提出了 TPS-RPM 算法, 并指出 RPM 算法在浮动点集和参考点集中寻找对应点和位移量等价于高斯混合模型 (Gaussian mixture model, GMM) 的参数期望最大化算法 (Expectation maximization, EM)[3]. GMM 配准算法[5−6] 将两个点集分别看作

收稿日期 2012-06-28 录用日期 2013-01-06
Manuscript received June 28, 2012; accepted January 6, 2013
国家自然科学基金 (61301042, 61201117), 中国科学院 "百人计划" 项目, 江苏省自然科学基金 (BK2012189) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61301042, 61201117), the Hundred Talents Program of Chinese Academy of Sciences, and Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK2012189)
本文责任编委 刘一军
Recommended by Associate Editor LIU Yi-Jun
1. 中国科学院苏州生物医学工程技术研究所医学影像室 苏州 215163 2. 重庆市电子工程职业学院计算机学院 重庆 401331 3. 苏州大学附属第一医院 苏州 215006 4. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所 长春 130033
1. Medical Imaging Department, Suzhou Institute of Biomedical Engineering and Technology, Chinese Academy of Sciences, Suzhou 215163 2. School of Computer Science and Technology, Chongqing College of Electronic Engineering, Chongqing 401331 3. Suzhou First People′s Hospital, The First Affiliated Hospital of Soochow University, Suzhou 215006 4. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033

GMM 质心和数据点, 通过最大化配准参数的似然函数期望求解配准参数. Revow 等[4] 提出的 GMM 点集非刚性配准算法假设 GMM 质心均匀分布于目标边缘, 因此仅能配准目标边缘点. Bing 等[6] 改进 Tsin 等[7] 提出的基于相关性的配准算法, 并提出了参数化 GMM 的非刚性配准算法. 该算法将两个点集看作 GMM 质心并参数化其中一个点集, 通过最小化点集概率密度分布的 L_2 范数计算 GMM 的配准参数. Jiang 等[8] 在距离函数中增加形状约束, 能较好地配准简单形状的点集.

EM 算法计算 GMM 配准参数实质是使用最小二乘法拟合参数. 因此, 一定数量的外点会导致最小二乘法估计误差. 理想的 GMM 未考虑异常点和重尾点 (统称为外点) 的影响[9], 外点会影响配准精度和鲁棒性. Myronenko 等[10] 把均匀分布的外点概率密度分布加入到 GMM 中, 提高了 GMM 配准算法的鲁棒性. Myronenko 等[11] 在 EM 算法的条件期望函数中加入正则项, 提出了运动一致性 (Coherent points drift, CPD) 的配准算法 (GMM-CPD), 在一定程度上解决了点与点的对应关系. Wang 等[12] 在 EM 迭代中加入混合优化算法自适应地估计 GMM 中的外点数量水平, 避免了外点数量水平估计误差对配准结果的影响, 但混合优化算法降低了配准速度. David 等[13] 通过 EM 算法框架的隐含数据将 GMM 推广为 t 分布混合模型 (Student′s-t mixture model, TMM)[14], 应用于点集聚类分析[15]. 因为 t 分布的尾部比高斯分布更厚, 所以 TMM 抗外点干扰能力更好. Gerogiannis 等[16−17] 提出了 TMM 点集刚性配准算法, 其精度和鲁棒性都优于 GMM 刚性配准算法, 缺点是仅能计算平移向量, 无法计算旋转矩阵和放缩因子等其他刚性配准参数, 也不能用于非刚性配准. 为了去除外点影响, 可使用离群点识别算法作为点集配准的预处理[18].

在理论上, TMM 可以看作是 GMM 的推广[15]. 其优点是鲁棒性和抗干扰能力更好, 缺点是在 EM 算法中难以得到配准参数的闭合解[13, 19−22]. 为了获得闭合解, 需将 TMM 看作是加权 GMM 的积分形式, 使得有限混合模型变换成了无限混合模型, 从而造成各个点的独立性, 因此无法利用点集的局部邻域空间信息. 此外, GMM-CPD 均匀分布的先验权重不能配准含大量外点的点集. 因此本文提出含局部空间约束的 TMM 非刚性配准算法 (Dirichlet-TMM), 即使用 Dirichlet 分布作为先验权重分布[23−24]; 构造含局部空间约束性质的 Dirichlet 分布参数; 最小化 TMM 的似然函数期望求解配准参数的闭合解; 计算各个点的自由度, 改变点的概率密度分布模型, 避免了 GMM-CPD 算法中人为估计外点数量水平而引入额外误差, 提高配准的精度和鲁棒性.

1 含局部空间约束的 t 分布混合模型

1.1 点集配准的 t 分布混合模型

参考点集 $\boldsymbol{X}_{N\times D}=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_N)^{\mathrm{T}}$ 是待测的 D 维样本集合, 浮动点集 $Y_{M\times D}M\times D=(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_M)^{\mathrm{T}}$ 是观测到的 D 维数据点集合, $\boldsymbol{x}_n$ 的 GMM 概率密度为

$$f(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,w_m,\Sigma)=\sum_{m=1}^{M}w_m f_N(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,\Sigma) \tag{1}$$

其中,

$$f_N(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,\Sigma)=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m)\right]}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

w_m 是 $\boldsymbol{y}_m$ 的先验权重, 满足 $0<w_m<0$, $\sum_{m=1}^{M}w_m=1$; Σ 是协方差矩阵. 当 $\boldsymbol{X}_{N\times D}$ 中存在外点时, 定义一个服从伽马分布的隐含随机变量 u $f_\Gamma(\alpha,\beta)$. 根据文献 [13], 令 $\alpha=\beta=\gamma/2$, 则式 (1) 可写为

$$f(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,w_m,\Sigma)=\int w_m f_N\left(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,\frac{\Sigma}{u}\right)\mathrm{d}H(u) \tag{2}$$

其中, $H(u)$ 是 χ^2 分布, γ 是 t 分布的自由度. 因此, $\boldsymbol{x}_n$ 的 t 分布概率密度为

$$f_t(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,\Sigma,\gamma_m)=\frac{\Gamma(\frac{\gamma_m+D}{2})}{\left[\gamma_m\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{D}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma_m}{2}\right)}\frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}[1+d(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_m,\Sigma)]^{\frac{D+\gamma_m}{2}}} \tag{3}$$

其中, $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数, $d(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_m,\Sigma)=(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m)^{\mathrm{T}}\times\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m)$ 是马氏平方距离. 为计算简便, 设 $\Sigma=\sigma^2 I$. $\boldsymbol{x}_n$ 的 TMM 概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,w_m,\sigma^2,\gamma_m)=\sum_{m=1}^{M}w_m f_t(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,\sigma^2,\gamma_m)$$

当 $\gamma\to\infty$ 时, TMM 退化为高斯混合模型; 当 $\gamma=1$ 时, TMM 退化为柯西分布模型. 因此, γ 可改变分布模型以适应点集的分布. 因为当 $\gamma\in(0,\infty)$ 时, t 分布的尾部比高斯分布更重, 所以 TMM 对点集中的外点具有更好的抗干扰能力. 进一步地, 由式 (2)

可得:

$$f_T\left(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,w,\sigma^2,\gamma\right)=\int f_N\left(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,w,\frac{\sigma^2}{u}\right)f_\Gamma(u)\mathrm{d}u \tag{4}$$

因此, TMM 可以看作是以伽马分布作为权重的加权高斯混合模型.

1.2 含 Dirichlet 分布的 t 分布混合模型

为了在 EM 算法中得到 TMM 的闭合解, 需引入 EM 框架的隐含数据 u, 将 TMM 看作加权的高斯混合模型, 造成了各个浮动点 $\boldsymbol{y}_m$ 之间的独立性, 因而无法使用点集的局部邻域信息. 此外, GMM-CPD 均匀分布的先验权重也不能配准含大量外点的点集. 因此, 将 $\boldsymbol{x}_n$ 的 TMM 概率密度改写为

$$f(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,w_m,\sigma^2,\gamma_m)=\sum_{m=1}^{M}w_{mn}f_t(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,\sigma^2,\gamma_m) \tag{5}$$

其中, w_{mn} 是浮动点 $\boldsymbol{y}_m$ 对应参考点 $\boldsymbol{x}_n$ 的先验权重, 满足 $0<w_{mn}<1$, $\sum_{m=1}^{M}w_{mn}=1$. 为了在 TMM 中加入局部空间约束, 使用 Dirichlet 分布[25] 作为点集先验权重. 根据文献 [26], 有

$$p(z_m|\alpha_m)=\int_0^1 p(z_{mn}|w_{mn})p(w_{mn}|\alpha_{mn})\mathrm{d}w_{mn}$$

其中, $(z_m)_n=z_{mn}$, $z_{mn}=1$ 表示 $\boldsymbol{y}_m$ 和 $\boldsymbol{x}_n$ 有关联, $z_{mn}=0$ 表示 $\boldsymbol{y}_m$ 和 $\boldsymbol{x}_n$ 无关联; $\alpha_m=\{\alpha_{m1},\cdots,\alpha_{mN}\}$ 是 Dirichlet 分布参数, 满足 $0<\alpha_{mn}<1$; $p\left(z_{mn}|w_{mn}\right)$ 和 $p\left(w_{mn}|\alpha_{mn}\right)$ 分别为

$$p(z_{mn}|w_{mn})=\frac{\prod\limits_{m=1}^{M}\left(w_{mn}\right)^{z_{mn}}}{\prod\limits_{m=1}^{M}\left(z_{mn}\right)!} \tag{6}$$

$$p(w_{mn}|\alpha_{mn})=\frac{\Gamma(\sum\limits_{m=1}^{M}\alpha_{mn})}{\prod\limits_{m=1}^{M}\Gamma(\alpha_{mn})}\prod_{m=1}^{M}\left(w_{mn}\right)^{\alpha_{mn}-1} \tag{7}$$

为了构造具有局部空间约束性质的 Dirichlet 分布[27], 定义 Dirichlet 分布参数 α_{mn} 为

$$\alpha_{mn}=\exp\left[\frac{\hat{\alpha}}{N_m}\sum_{y_i\in\partial\boldsymbol{y}_m}p(\boldsymbol{y}_m;\boldsymbol{x}_n)\right]=\exp\left[\frac{\hat{\alpha}}{N_m}\sum_{y_i\in\partial\boldsymbol{y}_m}p_{mn}\right] \tag{8}$$

后验概率密度 p_{mn} 为

$$p_{mn}=\frac{w_{mn}f_t(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,\sigma^2,\gamma_m)}{\sum\limits_{m=1}^{M}w_{mn}f_t(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,\sigma^2,\gamma_m)} \tag{9}$$

其中, N_m 是 $\boldsymbol{y}_m$ 的 d-邻域内的浮动点数量; $\partial\boldsymbol{y}_m$ 表示 d-邻域中除 $\boldsymbol{y}_m$ 以外的浮动点; $\boldsymbol{y}_i\in\partial\boldsymbol{y}_m$ 表示 $\boldsymbol{y}_i$ 位于 $\boldsymbol{y}_m$ 的 d-邻域中; $\hat{\alpha}$ 是 Dirichlet 分布的局部空间约束系数. 通过式 (8) 构造的 α_{mn} 包含了浮动点的邻域信息, 使得配准具有局部空间约束性质. 进一步地, EM 算法只需求解系数 $\hat{\alpha}$, 而非原先 $M\times N$ 个参数 α_{mn}[26], 减少了计算量, 简化了计算复杂度.

2 含局部空间约束的 t 分布混合模型的配准参数求解

2.1 t 分布混合模型的似然函数

为在 EM 算法中求得 TMM 配准参数的闭合解, 需要引入 EM 框架的完整数据集合, 其定义为 $X_c=(X,z_1^{\mathrm{T}},\cdots,z_N^{\mathrm{T}},u_1,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$. 其中, u 是 EM 框架的隐含数据, $z_n=(z_1,\cdots,z_M)^{\mathrm{T}}$, 并且有

$$u_n|_{z_{mn}=1}\sim f_\Gamma\left(\frac{1}{2}\gamma_m,\frac{1}{2}\gamma_m\right) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{x}_n|_{u_n,z_{mn}=1}\sim f_N\left(\boldsymbol{y}_m,\frac{\sigma^2}{u_n}\right) \tag{11}$$

配准参数集合定义为 $\Psi=(w_1,\cdots,w_M,\gamma_1,\cdots,\gamma_M,\ y_1,\ \cdots,\ y_M)^{\mathrm{T}}$, $w_M=(w_{m1},\cdots,w_{mN})^{\mathrm{T}}$. 分离参数后的 TMM 似然函数为

$$\begin{aligned}L(\Psi)=L(\boldsymbol{y}_m,w_{mn},\sigma^2,\gamma_m)=\\-\sum_{n=1}^{N}\ln\sum_{m=1}^{M}w_{mn}f_t(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m,\sigma^2,\gamma_m)=\\L(w_{mn})+L(\gamma_m)+L(\boldsymbol{y}_m,\sigma^2)\end{aligned} \tag{12}$$

其中,

$$L(w_{mn})=-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}z_{mn}\ln w_{mn}$$

$$\begin{aligned}L(\gamma_m)=\\-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}z_{mn}\left[-\ln\Gamma\left(\frac{\gamma_m}{2}\right)+\frac{1}{2}\gamma_m\ln\left(\frac{\gamma_m}{2}\right)\right]=\\-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}z_{mn}\left[\frac{\gamma_m}{2}\left(\ln u_n-u_n\right)-\ln u_n\right]\end{aligned}$$

$$L(\boldsymbol{y}_m,\sigma^2)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}z_{mn}\left[\frac{D}{2}\ln\left(2\pi\right)\ln\sigma^2\right]+$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} z_{mn}\left[u_n\frac{\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m\|^2}{2\sigma^2}\right]$$

2.2 配准参数计算

在第 k 次迭代时最小化配准参数集合的条件期望[28], 可得:

$$\begin{aligned}Q\left(\Psi;\Psi^{(k-1)}\right)&=\mathrm{E}\left[L\left(\Psi;\Psi^{(k-1)}\right)\right]=\\&-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}p\left(\boldsymbol{y}_m^{(k)};\boldsymbol{x}_n\right)\times\\&\ln\left[w_{mn}^{(k)}f\left(\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_m^{(k)},\left(\sigma^2\right)^{(k)},\gamma_m^{(k)}\right)\right]\end{aligned}$$

对 $Q(\Psi;\ \Psi^{(k-1)})$ 分离参数, 可得 $Q(\Psi;\ \Psi^{(k-1)})=Q_1(w^{(k)};\ \Psi^{(k-1)})+Q_2(\gamma^{(k)};\ \Psi^{(k-1)})+Q_3(\boldsymbol{y}^{(k)},(\sigma^2)^{(k)};\Psi^{(k-1)})$. 其中有:

$$Q_1\left(w^{(k)};\Psi^{(k-1)}\right)=-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}p_{mn}^{(k)}\ln w_{mn}^{(k)}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&Q_3\left(\boldsymbol{y}^{(k)},\left(\sigma^2\right)^{(k)};\Psi^{(k-1)}\right)=\\&\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}p_{mn}\left[\frac{D}{2}\ln(2\pi)+\frac{1}{2}\ln\left(\sigma^{2D}\right)^{(k)}\right]-\\&\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}p_{mn}\left[\frac{1}{2}D\ln u_{mn}^{(k)}-\frac{u_{mn}^{(k)}\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m\|^2}{2\left(\sigma^2\right)^{(k)}}\right]\end{aligned}\tag{14}$$

$$u_{mn}^{(k)}=E_{\Psi^{(k)}}(u_n;\boldsymbol{x}_n,z_{mn}=1)=\frac{\gamma_m^{(k)}+D}{\gamma_m^{(k)}+d\left(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_m^{(k)},\left(\sigma^2\right)^{(k)}\right)}\tag{15}$$

其中,

$$u_{mn}^{(k)}=E_{\Psi^{(k)}}(u_n;\boldsymbol{x}_n,z_{mn}=1)=\frac{\gamma_m^{(k)}+D}{\gamma_m^{(k)}+d\left(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_m^{(k)},\left(\sigma^2\right)^{(k)}\right)}\tag{16}$$

$\varphi\left(\frac{\gamma_m^{(k)}+D}{2}\right)-\ln\frac{\gamma_m^{(k)}+D}{2}$ 是 $\ln u_m$ 的校正项, $\varphi(\cdot)$ 是 Digamma 函数. 由式 (6) 和式 (7) 可得:

$$\begin{aligned}&p\left(z_{mn}|\alpha_{mn}\right)=\\&\frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{M}(z_{mn})!}\frac{\Gamma\left(\sum\limits_{m=1}^{M}\alpha_{mn}\right)}{\prod\limits_{m=1}^{M}\Gamma(\alpha_{mn})}\frac{\prod\limits_{m=1}^{M}\Gamma(\alpha_{mn}+z_{mn})}{\Gamma\left[\sum\limits_{m=1}^{M}(\alpha_{mn}+z_{mn})\right]}=\\&\frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{M}(z_{mn})!}\frac{\Gamma\left(\sum\limits_{m=1}^{M}\alpha_{mn}\right)}{\prod\limits_{m=1}^{M}\Gamma(\alpha_{mn})}\frac{\prod\limits_{m=1}^{M}\Gamma(\alpha_{mn}+z_{mn})}{\Gamma\left[\sum\limits_{m=1}^{M}(\alpha_{mn}+z_{mn})\right]}\end{aligned}\tag{17}$$

将 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 代入式 (12), 并和式 (16) 联立可得先验权重 w_{mn}:

$$w_{mn}^{(k)}=p\left(z_{mn}=1|\alpha_{mn}^{(k)}\right)=\frac{\alpha_{mn}^{(k)}}{\sum\limits_{m=1}^{M}\alpha_{mn}^{(k)}}\tag{18}$$

最小化式 (13) 可得 $\hat{\alpha}^{(k)}$ 是式 (19) 的迭代解; 最小化式 (14) 可得 $\gamma_m^{(k)}$ 是式 (20) 的迭代解. 点集非刚性配准的位移向量为 $T(Y,v)=Y+v(Y)$. 在 $Q(\Psi;\Psi^{(k-1)})$ 中加入点集位移的正则项 $\phi(v)$ 使浮动点集具有运动一致性[10]. 因此式 (14) 可改写为式 (21).

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{p_{mn}^{(k)}\sum\limits_{y_i\in y_n}p_{im}^{(k)}}{N_m}-\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{p_{mn}^{(k)}\sum\limits_{m'=1}^{M}\left[\left(\frac{1}{N_m}\sum\limits_{y_i\in\boldsymbol{y}_m}p_{im'}^{(k)}\right)\exp\left(\frac{\hat{\alpha}^{(k)}}{N_m}\sum\limits_{y_i\in\boldsymbol{y}_m}p_{im'}^{(k)}\right)\right]}{\sum\limits_{m'=1}^{M}\exp\left(\frac{\hat{\alpha}^{(k)}}{N_m}\sum\limits_{y_i\in\boldsymbol{y}_m}p_{im'}^{(k)}\right)}=0\tag{19}$$

$$-\varphi\left(\frac{\gamma_m^{(k)}}{2}\right)+\ln\frac{\gamma_m^{(k)}}{2}+\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}p_{mn}^{(k)}\left(\ln u_{mn}^{(k)}-u_{mn}^{(k)}\right)}{\sum\limits_{n=1}^{N}p_{mn}^{(k)}}+\varphi\left(\frac{\gamma_m^{(k-1)}+D}{2}\right)-\ln\frac{\gamma_m^{(k-1)}+D}{2}+1=0\tag{20}$$

$$\hat{Q}_3 = Q_3\left(y,\sigma^2;\Psi^{(k-1)}\right)+\frac{\lambda}{2}\phi(\nu) = -\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left[-\frac{D}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln\sigma^{2D}+\frac{1}{2}D\ln u_{mn}\right] = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{u_{mn}\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m\|^2}{2\sigma^2}+\frac{\lambda}{2}\phi(\nu) \tag{21}$$

其中, $\lambda>0$ 是正则项的权重因子. λ 越大, 配准结果的正则性越强; λ 越小, 配准结果越精确. 求解式 (20) 中的配准参数 $v(Y)$ 和 σ^2, 当且仅当最小化式 (20). 根据文献 [10] 可得:

$$\hat{Q}_3^{(k)} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}p_{mn}^{(k)}\left[\frac{D}{2}\ln(2\pi)+\frac{1}{2}\ln\left(\sigma^{2D}\right)^{(k)}\right]- \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{2}D\ln u_{mn}^{(k)}- \frac{u_{mn}^{(k)}\left\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_{mn}^{(k-1)}-G(m,\cdot)W^{(k)}\right\|^2}{2\left(\sigma^2\right)^{(k)}}\right]+ \frac{\lambda}{2}\mathrm{tr}\left[\left(W^{\mathrm{T}}\right)^{(k)}GW^{(k)}\right] \tag{22}$$

其中, $G_{M\times M}$ 是高斯核矩阵, 作用等价于低通滤波器, 用于减小点集位移的高频摆动能量[29−30], 使点集具有运动一致性, $G(m,\cdot)$ 表示 G 的第 m 行向量; $W_{M\times D}$ 是 G 的权重矩阵; β ($\beta>0$) 是平滑性参数, β 越大则浮动点集的位移向量越平滑. 令 $\frac{\partial\hat{Q}_3^{(k)}}{\partial W^{(k)}}=0$, 可得:

$$W^{(k)} = \left[\mathrm{diag}\{\hat{P}^{(k)}1\}G+\lambda\{\sigma^2\}^{(k-1)}I\right]^{-1}\times \left[\hat{P}^{(k)}X-\mathrm{diag}\{\hat{P}^{(k)}1\}Y^{(k-1)}\right] \tag{23}$$

其中, $\hat{P}^{(k)}$ 是由 $\hat{p}_{mn}^{(k)}$ ($\hat{p}_{mn}=p_{mn}^{(k)}u_{mn}^{(k)}$) 组成的 $M\times N$ 矩阵, 表示后验概率密度矩阵 P 经过隐含数据 u 修正后的矩阵; 1 是全 1 列向量; $\mathrm{diag}\{\cdot\}$ 是对角矩阵; I 是单位矩阵. 令 $\frac{\partial\hat{Q}_3^{(k)}}{\partial(\sigma^2)^{(k)}}=0$, 可得:

$$\left(\sigma^2\right)^{(k)} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}p_{mn}^{(k)}u_{mn}^{(k)}\left\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m^{(k-1)}-G(m,\cdot)W^{(k)}\right\|^2}{D\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}p_{mn}^{(k)}u_{mn}^{(k)}} \tag{24}$$

综上所述, 含局部空间约束的 TMM 点集非刚性配准算法为:

步骤 1. 初始化配准参数集合 Ψ: γ_m, w_{mn}^0, $\left(\sigma^2\right)^{(0)}$, 其中, $\left(\sigma^2\right)^{(0)}=\frac{1}{DMN}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m^0\|^2$.

步骤 2. 初始化 β, λ, d 和误差收敛阈值 τ; 构造低通滤波器 G: $g_{ij}=\exp\left(-\frac{1}{2}\left\|\frac{\boldsymbol{y}_i^{(0)}-\boldsymbol{y}_j^{(0)}}{\beta}\right\|^2\right)$, g_{ij} 是 G 的第 i 行第 j 列元素.

步骤 3. E-step: 使用式 (9) 计算后验概率密度 $p_{mn}^{(k)}$.

步骤 4. M-step:

1) 分别使用式 (18) 和式 (8) 计算局部空间约束系数 $\hat{\alpha}^{(k)}$ 和 Dirichlet 分布参数 $\alpha_{mn}^{(k)}$;

2) 分别使用式 (17) 和式 (19) 计算数据先验权重 $w_{mn}^{(k)}$ 和自由度 $\gamma_{mn}^{(k)}$;

3) 分别使用式 (22) 和式 (23) 计算 $W^{(k)}$ 和 $W^{(k)}$.

步骤 5. 计算 Y 移动后的坐标 $Y^{(k+1)}=Y^{(k)}+GW$, 计算配准误差 $Er^{(k)}$.

步骤 6. 重复步骤 3 ∼ 5, 直至 $\left\|\frac{Er^{(k+1)}-Er^{(k)}}{Er^{(k+1)}}\right\|<\tau$.

3　实验与分析

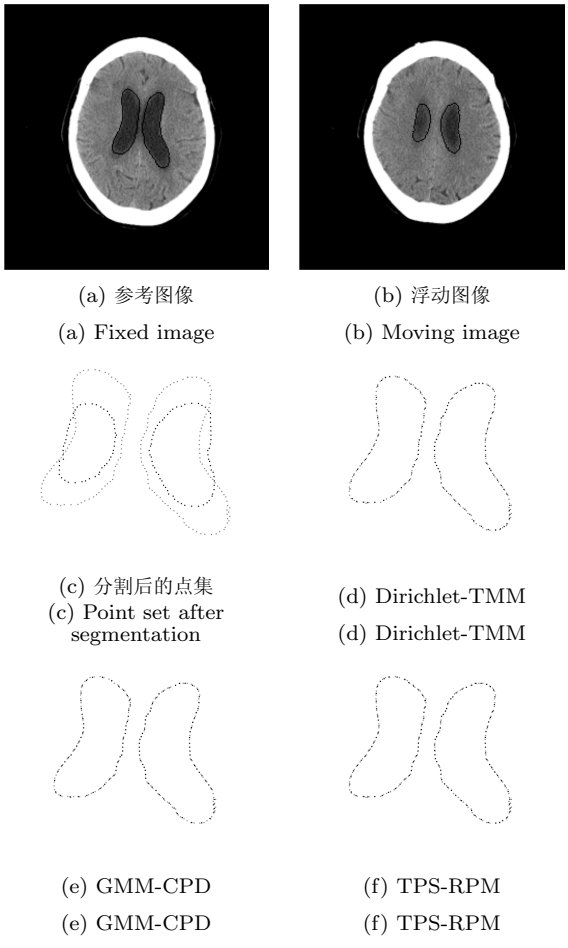
在数学上, TPS-RPM 的交替寻优方法等价于 GMM 的 EM 算法, 而 GMM 是 TMM 的特例, 因此 TPS-RPM、GMM-CPD 和 Dirichlet-TMM 可看作是同一类型算法, 因此本文将三者进行比较. 为论述方便, 当点集中含有外点时, 将点集细分为目标点集、重尾点集和异常点集. 当参考点和浮动点数量相等时, 配准误差定义为 $Er=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{y}_m\|$. 当参考点和浮动点数量不同时无法指定对应关系, 因此配准误差[12] 定义为 $Er=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}w_{mn}p_{mn}\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m\|$. 其中, $\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_m\|$ 是 $\boldsymbol{x}_n$ 和 $\boldsymbol{y}_m$ 之间的欧氏距离. 实验中发现, 当 Dirichlet-TMM 和 GMM-CPD 的配准误差最小时, 两者的配准参数 β, λ 基本相同, 因此本文实验将两者设置为相同的 β, λ. GMM-CPD 的外点数量水平 ω 与外点数量成正相关, 且有 $0\le\omega<1$, 因此文中 ω 的最优值搜索范围定位在 $[N_c/N_e-0.35, N_c/N_e+0.35]$, 其中 N_c 是外点的数量, N_e 是浮动点的数量. 本文实验中, 配准参数 β, λ 和 ω 在一定范数内是最优值. 因为实验中外点分布范围和目标点集分布差异不大, 所以 Dirichlet-TMM 的 d-邻域使用固定值, 大小选为点集内相距最远点的 1/3. 若外点分布范围远大于目标点集, 可

以使用 σ 构造 d-邻域大小.

3.1 二维点集配准

3.1.1 理想点集配准

图 1 所示为脑脊液 CT 图像的分割数据及配准结果. 图 1 (a) 和图 1 (b) 分别是参考图像和浮动图像, 大小为 512 像素 × 512 像素, 空间分辨率为 1 mm × 1 mm. 图 1 (c) 为参考点集和浮动点集的相对位置. 图 1 (d) ∼ 1 (f) 分别为 Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的配准结果, 配准参数取值为 $\beta = 2$, $\lambda = 0.6$, $\omega = 0.05$. 由图 1 可知, 三种算法的配准结果都很理想.



(a) 参考图像 (a) Fixed image

(b) 浮动图像 (b) Moving image

(c) 分割后的点集 (c) Point set after segmentation

(d) Dirichlet-TMM (d) Dirichlet-TMM

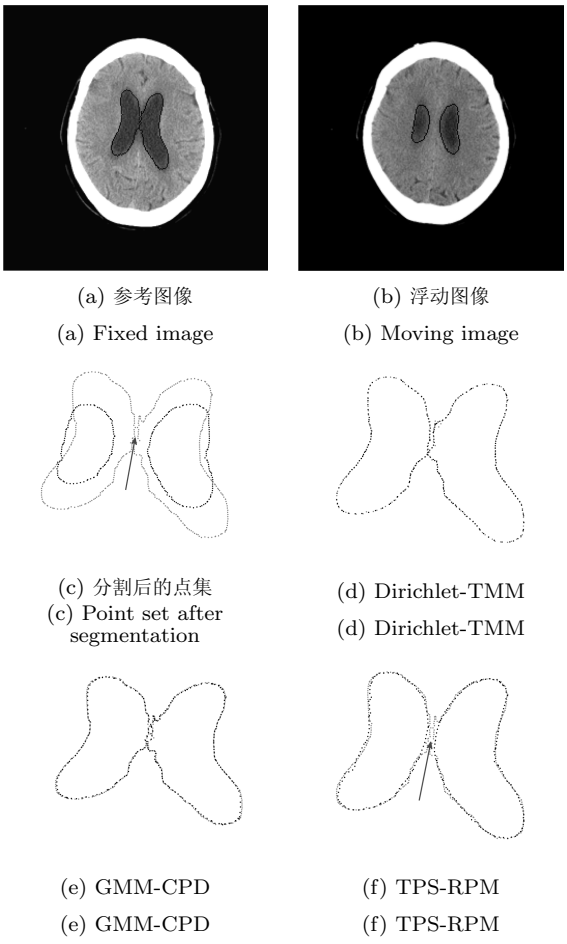
(e) GMM-CPD (e) GMM-CPD

(f) TPS-RPM (f) TPS-RPM

图 1 理想的分割数据和配准结果

Fig. 1 Registration results of the ideal data

图 2 (a) 和 2 (b) 所示为分割参数略有变化后的分割结果, 参考点集和浮动点集的相对位置如图 2 (c) 所示. 参考图像中, 脑脊液边缘曲线存在曲折部分 (图 2 (c) 箭头所示), 且左右间距很小, 这给配准带来了困难. 图 2 (d) ∼ 2 (f) 分别是 Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的配准结果, 配准参数取值为 $\beta = 2$, $\lambda = 0.6$, $\omega = 0.05$. Dirichlet-TMM 配准后, 浮动点集分布平滑, 在四个边缘区域保持了合理数量; 浮动点在中间区域没有过分平滑, 没有出现左右混叠现象. GMM-CPD 配准后, 浮动点集整体上很好地对齐到了参考点集, 分布均匀、合理, 但是在中间区域 (图 2 (e) 箭头所示) 出现了交叠, 破坏了曲线的拓扑结构. TPS-RPM 配准后, 浮动点平滑性良好, 分布均匀、合理. 但是由于 TPS-RPM 使用 TPS 参数化形变场, 使得中间区域的点分布过于平滑, 不能配准曲折部分 (图 2 (f) 箭头所示). 图 2 说明, Dirichlet-TMM 比 GMM-CPD 的配准结果更加合理, 曲线的拓扑结构保持能力更好; Dirichlet-TMM 比 TPS-RPM 具有更好的细节配准能力, 配准精度更高.



(a) 参考图像 (a) Fixed image

(b) 浮动图像 (b) Moving image

(c) 分割后的点集 (c) Point set after segmentation

(d) Dirichlet-TMM (d) Dirichlet-TMM

(e) GMM-CPD (e) GMM-CPD

(f) TPS-RPM (f) TPS-RPM

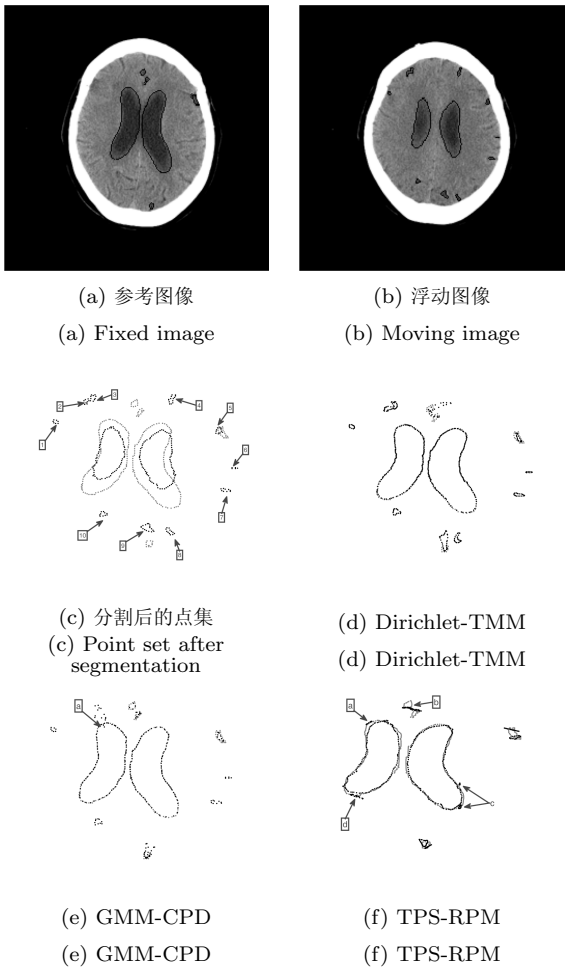
图 2 含曲折边缘的分割数据和配准结果

Fig. 2 Registration results of tortuous edge point set

3.1.2 含重尾点的点集配准

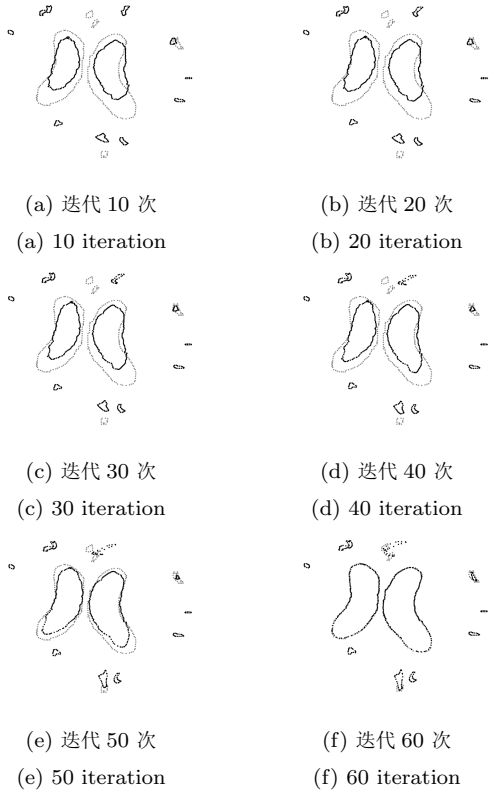
由于成像设备、分割算法参数选择等因素, 医学图像分割后往往存在离群闭合曲线. 离群闭合曲线构成了点集中的重尾点集, 如图 3 (a) 和图 3 (b) 所示. 图 3 (a) 存在 4 个离群闭合曲线, 图 3 (b) 存在 10 个离群闭合曲线. 图 3 (c) 为参考点集和浮动点

集的相对位置, 参考点集含 286 个点; 浮动点集含 265 个点. 图 3 (d) ∼ 3 (f) 分别是 Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的配准结果, 配准参数取值为 $\beta = 2$, $\lambda = 0.6$, $\omega = 0.31$. Dirichlet-TMM 配准后, 配准结果不受重尾点影响, 重尾点集 2、3、4、8 和 9 发生了移动, 但是位移向量较小, 没有对齐到目标点集. GMM-CPD 配准后, 重尾点集 10 向上移动, 误对齐到了目标点集内部 (图 3 (e) 中箭头 a 所示). TPS-RPM 配准后, 因为重尾点影响了 TPS 参数化形变场, 所以 TPS-RPM 的配准结果存在很大误差: 重尾点集 1、7 和 10 移动到了目标点上 (图 3 (f) 中箭头 a、c 和 d 所示); 重尾点集 2 和 3 基本退化成直线段 (图 3 (f) 中箭头 b 所示). 图 3 说明 Dirichlet-TMM 的配准效果最好, GMM-CPD 次之, TPS-RPM 最差. 当点集中存在重尾点时, Dirichlet-TMM 可以准确地配准点集, 具有很好的抗重尾点干扰能力; GMM-CPD 受到重尾点影响, 把重尾点误对齐到目标点集, 从而引起配准误差; TPS-RPM 无法配准浮动点集, 重尾点被误对齐到目标点集, 配准误差很大. 配准结果说明, Dirichlet-TMM 配准算法在配准过程中利用了相邻点的空间信息, 提高了抗重尾点干扰能力. 图 4 ∼ 6 分别是 Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的迭代过程.



(a) 参考图像　(b) 浮动图像
(a) Fixed image　(b) Moving image
(c) 分割后的点集　(d) Dirichlet-TMM
(c) Point set after segmentation　(d) Dirichlet-TMM
(e) GMM-CPD　(f) TPS-RPM
(e) GMM-CPD　(f) TPS-RPM

图 3　含重尾点的分割数据及配准结果
Fig. 3　Registration results of the point set containing data longer than normal tails



(a) 迭代 10 次　(b) 迭代 20 次
(a) 10 iteration　(b) 20 iteration
(c) 迭代 30 次　(d) 迭代 40 次
(c) 30 iteration　(d) 40 iteration
(e) 迭代 50 次　(f) 迭代 60 次
(e) 50 iteration　(f) 60 iteration

图 4　Dirichlet-TMM 的迭代过程
Fig. 4　Iteration of Dirichlet-TMM

3.1.3　含外点的点集配准

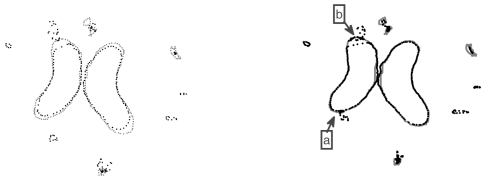
由于图像噪声等因素, 分割或特征提取后的点集往往还存在异常点. 为验证存在异常点时 Dirichlet-TMM 的鲁棒性和精度, 参考点集和浮动点集中加入均匀分布和高斯分布的异常点. 图 7 (a) 所示为加入 100 个均匀分布异常点的参考点集和浮动点集. 图 7 (b) ∼ 7 (d) 分别为 Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的配准结果, 配准参数取值为 $\beta = 2$, $\lambda = 0.6$, $\omega = 0.47$. Dirichlet-TMM 配准后, 浮动点对齐到了参考点; 重尾点集 1、5、8 和 9 基本没有移动; 重尾点集 2、3、4、6 和 7 虽有移动, 但是都没有对齐到目标点; 重尾点集 10 误对齐到了目标点边缘 (图 7 (b) 中箭头所示). GMM-CPD 配准后, 重尾点集 1 和 10 被误配准到了脑脊液边缘点上 (图 7 (c) 中箭头 a 所示); 右下角的浮动点没有对齐 (图 7 (c) 中箭头 b 所示). TPS-RPM 配准后, 外点影响了 TPS 参数化形变场的准确性, 使得

(a) 迭代 10 次 (b) 迭代 20 次

(a) 10 iteration (b) 20 iteration

(c) 迭代 30 次 (d) 迭代 40 次

(c) 30 iteration (d) 40 iteration



(e) 迭代 50 次 (f) 迭代 60 次

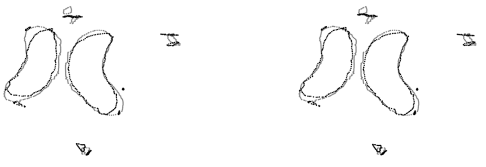
(e) 50 iteration (f) 60 iteration

图 5 GMM-CPD 的迭代过程

Fig. 5 Iteration of GMM-CPD

(a) 迭代 10 次 (b) 迭代 20 次

(a) 10 iteration (b) 20 iteration



(c) 迭代 30 次 (d) 迭代 40 次

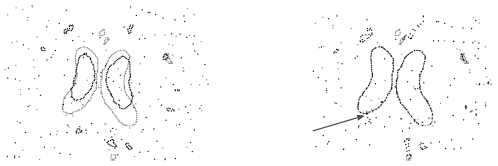
(c) 30 iteration (d) 40 iteration

(e) 迭代 50 次 (f) 迭代 60 次

(e) 50 iteration (f) 60 iteration

图 6 TPS-RPM 的迭代过程

Fig. 6 Iteration of TPS-RPM



(a) 配准前 (b) Dirichlet-TMM

(a) Data before registration (b) Dirichlet-TMM

(c) GMM-CPD (d) TPS-RPM

(c) GMM-CPD (d) TPS-RPM

图 7 含均匀分布异常点的配准结果

Fig. 7 Registration results of the data containing uniform outliers

浮动点集不能对齐到参考点集.

图 8 (a) 所示为加入 150 个高斯分布异常点后的参考点集和浮动点集, 高斯分布标准差 $\sigma_x = \sigma_y = 1.5$. 图 8 (b) ~ 8 (d) 所示为 Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的配准结果, 配准参数取值为 $\beta = 2$, $\lambda = 0.6$, $\omega = 0.54$. Dirichlet-TMM 配准后, 浮动点对齐参考点, 各重尾点集未误对齐到目标点集. GMM-CPD 配准后, 重尾点集 1 和 10 被误配准到了目标点边缘 (图 8 (c) 中箭头 a 所示); 大量浮动点被误对齐到参考点集中部 (图 8 (c) 中箭

(a) 配准前 (b) Dirichlet-TMM

(a) Data before registration (b) Dirichlet-TMM

(c) GMM-CPD (d) TPS-RPM

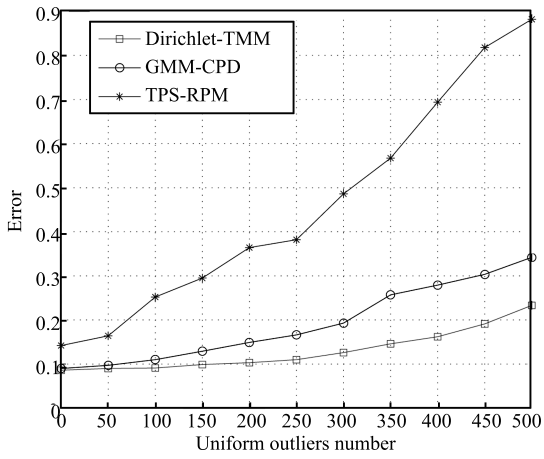
(c) GMM-CPD (d) TPS-RPM

图 8 含高斯分布异常点的配准结果

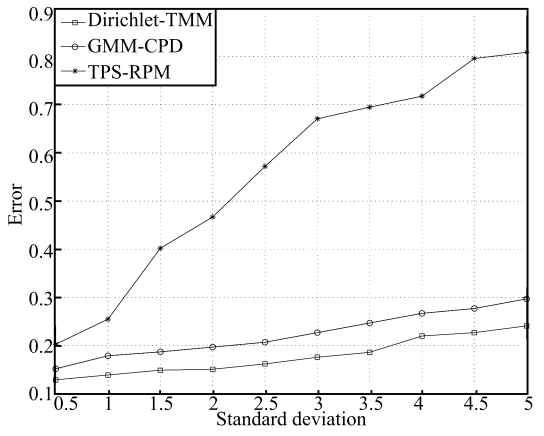
Fig. 8 Registration results of the data containing Gaussian outliers

头 b 所示) 且边缘部分 (图 8 (c) 中方框所示) 无浮动点分布. TPS-RPM 无法对齐浮动点, 并且重尾点集 1 被误对齐到了目标点集附近.

图 9 所示为含有外点时 Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的配准误差. 图 9 (a) 为加入不同数量均匀分布异常点的配准误差; 图 9 (b) 为加入不同标准差的高斯分布异常点的配准误差, 数量为 150. 图 9 (a) 所示, 当异常点数量等于零, 即点集中只含有重尾点时, Dirichlet-TMM 的误差略小于 GMM, TPS-RPM 的误差约为前两者的 1.5 倍. 当异常点数量增加时, TPS-RPM 和 GMM-CPD 的误差迅速增大, Dirichlet-TMM 的误差增速最慢. 当异常点数量小于 200 时, Dirichlet-TMM 的误差基本保持不变. 图 9 (b) 所示, 当 σ 增加时, TPS-RPM 的配准误差迅速增加, Dirichlet-TMM 的误差增速略小于 GMM-CPD. 由图 9 可知, Dirichlet-TMM 比 TPS-RPM 和 GMM-CPD 具有更好的抗异常点干扰能力, 表现出良好的鲁棒性.



(a) 含均匀分布异常点的点集配准误差
(a) Registration error of the data containing uniform outliers



(b) 含高斯分布异常点的点集配准误差
(b) Registration error of the data containing Gaussian outliers

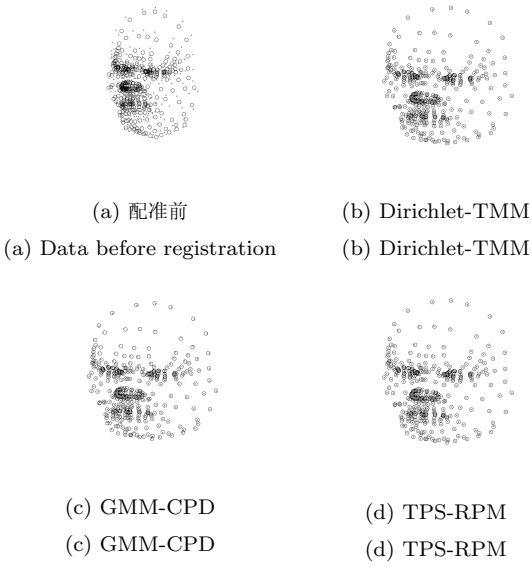
图 9　加入异常点后的配准误差

Fig. 9　Registration errors of the data containing outliers

3.2　三维点集配准

3.2.1　理想三维点集配准

图 10 (a) 所示三维人脸特征点集、参考点集和浮动点集都含有 392 个点. 图 10 (b) ∼ 10 (d) 分别是 Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的配准结果, 配准参数取值为 $\beta = 2$, $\lambda = 2.3$, $\omega = 0.04$. 三种算法都的配准结果都很理想.



(a) 配准前
(a) Data before registration

(b) Dirichlet-TMM
(b) Dirichlet-TMM

(c) GMM-CPD
(c) GMM-CPD

(d) TPS-RPM
(d) TPS-RPM

图 10　三维人脸特征点配准

Fig. 10　Registration of 3D face points

3.2.2　含异常点的三维点集配准

图 11 (a) 是含 100 个均匀分布异常点的三维人脸特征点集. 图 11 (b) ∼ 11 (d) 分别是 Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的配准结果, 配准参数取值为 $\beta = 2$, $\lambda = 2.3$, $\omega = 0.43$. Dirichlet-TMM 配准后, 浮动点集出现了配准误差, 但仍旧较好地对齐了 “眼”、“鼻” 和 “嘴” 等特征点密集区域. GMM-CPD 配准后, “眼”、“鼻” 和 “嘴” 等特征点密集区域的浮动点集对齐到了参考点, 但是整体结果略差于 Dirichlet-TMM. TPS-RPM 配准后, 异常点影响 TPS 参数化形变场, 点集在 “鼻” 区域出现了配准误差 (图 11 (d) 中箭头所示). 图 12 (a) 为含 150 个高斯分布异常点的三维人脸特征点集, 高斯分布的标准差 $\sigma_x = \sigma_y = 1.5$. 图 12 (b) ∼ 12 (d) 分别是 Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的配准结果, 配准参数取值为 $\beta = 2$, $\lambda = 2.3$, $\omega = 0.49$. Dirichlet-TMM 基本配准了人脸的主要特征区域. GMM-CPD 配准后, 在 “眼”、“鼻” 区域出现

了配准误差. TPS-RPM 配准后, 浮动点集在 "嘴" 和 "鼻" 区域出现了明显的配准误差 (图 12 (d) 箭头所示), 且整体误差较大.

(a) 配准前 (b) Dirichlet-TMM

(a) Data before registration (b) Dirichlet-TMM

(c) GMM-CPD (d) TPS-RPM

(c) GMM-CPD (d) TPS-RPM

图 11 含均匀分布异常点的三维人脸特征点配准

Fig. 11 Registration of 3D face points containing uniform outliers

(a) 配准前 (b) Dirichlet-TMM

(a) Data before registration (b) Dirichlet-TMM

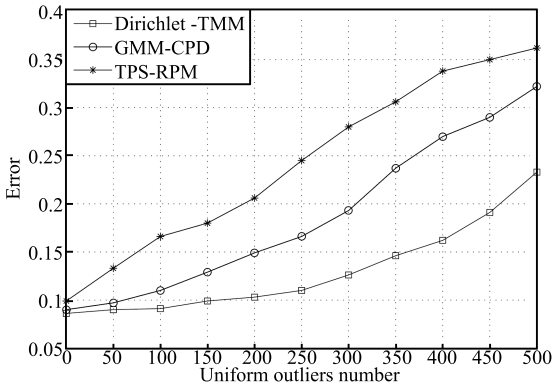
(c) GMM-CPD (d) TPS-RPM

(c) GMM-CPD (d) TPS-RPM

图 12 含高斯分布异常点的三维人脸特征点配准

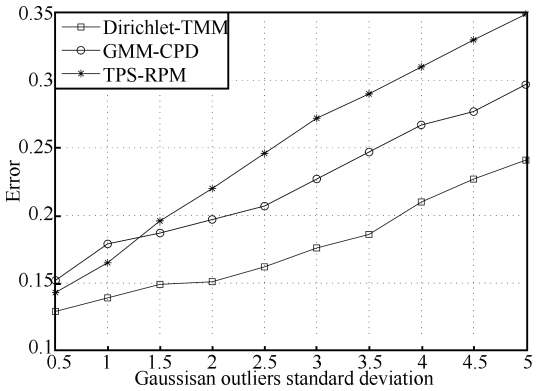
Fig. 12 Registration of 3D face points containing Gaussian outliers

图 13 (a) 是加入不同数量均匀分布异常点的配准误差; 图 13 (b) 是加入不同标准差的高斯分布异常点的配准误差, 数量为 150. 在图 13 (a) 中, 无异常点时, Dirichlet-TMM、GMM-CPD 和 TPS-RPM 的误差都较小. 当异常点数量增加后, 三种算法的误差都有所增加, 但是 Dirichlet-TMM 的误差增速最小. 在图 13 (b) 中, 当高斯分布的 σ 较小时, Dirichlet-TMM 的误差最小, TPS-RPM 误差次之, GMM-CPD 的误差略大于 TPS-RPM; 当 σ 增加时, 即异常点的分布范围扩大, Dirichlet-TMM 的误差增速最小, TPS-RPM 的误差增速最大. 由图 13 可知, Dirichlet-TMM 抗异常点干扰能力优于 GMM-CPD 和 TPS-RPM.



(a) 含均匀分布异常点的点集配准误差

(a) Registration error of the data containing uniform outliers



(b) 含高斯分布异常点的点集配准误差

(b) Registration error of the data containing Gaussian outliers

图 13 含异常点的三维数据配准误

Fig. 13 Registration error of the data containing outliers

4 结论

EM 算法的 M-step 计算 GMM 配准参数实质是使用最小二乘法拟合参数. 因此, 一定数量的外点会导致最小二乘法估计误差. 为了拟合外点分布, GMM 中需要加上表征外点的附加项, 外点数量水平估计误差会影响配准结果. t 分布具有比高斯分布更厚的尾部, 因此具有更好的抗外点干扰能力. 为了进一步提高 TMM 抗外点干扰能力, 引入含局部空间约束的 Dirichlet 分布作为先验权重来识别外点, 利用点集邻域空间信息减少外点对配准结果的影响, 进一步提高了 TMM 的鲁棒性. 在 Dirichlet 分布

中, 取代 α_{mn}, 避免了在 EM 算法中使用最小二乘法, 减小了外点对配准结果的影响. 通过计算浮动点集各个点的自由度 γ, 自适应地改变每个点的概率密度分布函数, 避免了 GMM-CPD 中外点数量水平估计误差影响配准结果. EM 算法通过最大化似然函数的条件期望求得除和 γ 以外参数的闭合解. 实验表明, 相比于 GMM-CPD 和 TPS-RPM 算法, Dirichlet-TMM 配准算法具有配准误差小、鲁棒性好、抗外点干扰能力强等优点.

附录

M-step 中引入正则项后主要影响参数 $\boldsymbol{y}_m$ 和 σ^2, 其收敛性证明如下.

证明.

$$\boldsymbol{y}^{(k+1)} = \boldsymbol{y}^{(k)} + GW$$

所以残差

$$\boldsymbol{d}^{k+1} = \boldsymbol{y}^{k+1} - \boldsymbol{y}^{k} = GW$$

根据式 (23), 有:

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{y}_m}^{(k+1)} = \sum_{m=1}^{M} G_{mm} \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k)} u_{mn}^{(k)} (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k)})}{G_{mm} \sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k)} u_{mn}^{(k)} + \lambda(\sigma^2)^{(k)}} \tag{A1}$$

同理可得:

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{y}_m}^{(k)} = \sum_{m=1}^{M} G_{mm} \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k-1)} u_{mn}^{(k-1)} (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k-1)})}{G_{mm} \sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k-1)} u_{mn}^{(k-1)} + \lambda(\sigma^2)^{(k-1)}} \tag{A2}$$

若

$$\frac{\boldsymbol{d}_m^{(k+1)}}{\boldsymbol{d}_m^{(k)}} < 1$$

则可证明 $\boldsymbol{y}_m$ 的位移量收敛. 令

$$W_{\boldsymbol{y}_m}^{(k)} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k)} u_{mn}^{(k)} (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k)})}{G_{mm} \sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k)} u_{mn}^{(k)} + \lambda(\sigma^2)^{(k)}}$$

$$W_{\boldsymbol{y}_m}^{(k-1)} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k-1)} u_{mn}^{(k-1)} (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k-1)})}{G_{mm} \sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k-1)} u_{mn}^{(k-1)} + \lambda(\sigma^2)^{(k-1)}}$$

因此式 (A1) 和式 (A2) 分别可写为

$$\boldsymbol{d}_m^{(k+1)} = \sum_{m=1}^{M} G_{mm} W_{\boldsymbol{y}_m}^{(k)} \tag{A3}$$

$$\boldsymbol{d}_m^{(k)} = \sum_{m=1}^{M} G_{mm} W_{\boldsymbol{y}_m}^{(k-1)} \tag{A4}$$

由式 (A3) 和式 (A4), 可得:

$$W_m^{(k)} < W_m^{(k-1)} \Rightarrow \boldsymbol{d}_m^{(k+1)} < \boldsymbol{d}_m^{(k)} \tag{A5}$$

即

$$W_m^{(k)} < W_m^{(k-1)}$$

是

$$\boldsymbol{d}_m^{(k+1)} < \boldsymbol{d}_m^{(k)}$$

的充分条件. 有

$$\frac{W_m^{(k)}}{W_m^{(k-1)}} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k)} u_{mn}^{(k)} (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k)})}{G_{mm} \sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k)} u_{mn}^{(k)} + \lambda(\sigma^2)^{(k)}} \times \frac{G_{mm} \sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k-1)} u_{mn}^{(k-1)} + \lambda(\sigma^2)^{(k-1)}}{\sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k-1)} u_{mn}^{(k-1)} (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k-1)})} \tag{A6}$$

当 $\lambda = 0$ 时, Dirichlet-TMM 退化为无正则项的 EM 算法. 由文献 [31] 可知, 无正则项的 EM 算法收敛. 因此, 当 $\lambda = 0$ 时 $\boldsymbol{y}_m$ 的位移量收敛. 因此有

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k)} u_{mn}^{(k)} (\boldsymbol{x}_n - y_m^{(k)})}{\sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k-1)} u_{mn}^{(k-1)} (\boldsymbol{x}_n - y_m^{(k-1)})} \frac{G_{mm} \sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k-1)} u_{mn}^{(k-1)}}{G_{mm} \sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k)} u_{mn}^{(k)}} < 1 \tag{A7}$$

由函数连续性, 可得: $\exists \lambda \in (0, \delta)$, 使得:

$$\frac{W_m^{(k)}}{W_m^{(k-1)}} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k)} u_{mn}^{(k)} (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k)})}{\sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k-1)} u_{mn}^{(k-1)} (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k-1)})} \times \frac{G_{mm} \sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k-1)} u_{mn}^{(k-1)} + \lambda(\sigma^2)^{(k+1)}}{G_{mm} \sum\limits_{n=1}^{N} p_{mn}^{(k)} u_{mn}^{(k)} + \lambda(\sigma^2)^{(k)}} < 1 \tag{A8}$$

因此由式 (A5), 可得:

$$\boldsymbol{d}_m^{(k+1)} < \boldsymbol{d}_m^{(k)}$$

式 (A8) 说明 λ 取值在一定范围内时, $\boldsymbol{y}_m$ 的位移量是收敛的.

由式 (24), 可得:

$$\boldsymbol{d}_{\sigma^2}^{(k+1)} = (\sigma^2)^{(k+1)} - (\sigma^2)^{(k)} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k+1)} u_{mn}^{(k+1)} \left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k)} - G(m,\cdot)W \right\|^2}{D\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k+1)} u_{mn}^{(k+1)}} - (\sigma^2)^{(k)} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k+1)} u_{mn}^{(k+1)} \left(\left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)} \right\|^2 - D(\sigma^2)^{(k)} \right)}{D\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k+1)} u_{mn}^{(k+1)}} \tag{A9}$$

又因为

$$d_{\sigma^2}^{(k+1)} = (\sigma^2)^{(k+1)} - (\sigma^2)^{(k)} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k+1)} u_{mn}^{(k+1)} \left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k)} - G(m,\cdot)W \right\|^2}{D\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k+1)} u_{mn}^{(k+1)}} - (\sigma^2)^{(k)} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k+1)} u_{mn}^{(k+1)} \left(\left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)} \right\|^2 - D(\sigma^2)^{(k)} \right)}{D\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k+1)} u_{mn}^{(k+1)}} \tag{A10}$$

所以令

$$\boldsymbol{d}_{\sigma^2}^{(k+1)} = (\sigma^2)^{(k+1)} - (\sigma^2)^{(k)} = P_{\sigma^2}^{(k)} \frac{\partial \hat{Q}_3}{\partial (\sigma^2)^{(k)}}$$

可得:

$$P_{\sigma^2}^{(k)} = -\frac{1}{\left(D\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k+1)} u_{mn}^{(k+1)} \right)} \times \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k+1)} u_{mn}^{(k+1)} \left(\left\| \boldsymbol{x}_n - y_m^{(k+1)} \right\|^2 - D(\sigma^2)^{(k)} \right)}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{mn}^{(k)} \left(\frac{u_{mn}^{(k)} \left\| \boldsymbol{x}_n - y_m^{(k+1)} \right\|^2 - D(\sigma^2)^{(k)}}{2(\sigma^4)^{(k)}} \right)} \tag{A11}$$

因为参数 D, $p_{mn}^{(k+1)}$, $u_{mn}^{(k+1)}$ 和 $(\sigma^2)^{(k)}$ 都大于零, 所以 $d_{\sigma^2}^{(k+1)}$ 的正负性仅与 $\|\boldsymbol{x}_n - y_m^{(k+1)}\|^2 - D(\sigma^2)^{(k)}$ 和 $u_{mn}^{(k)}\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)}\|^2 - D(\sigma^2)^{(k)}$ 相关. 令 $\Lambda = u_{mn}^{(k)}\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)}\|^2 - D(\sigma^2)^{(k)}$, Λ 可改写为

$$\Lambda = u_{mn}^{(k+1)} \left(\left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)} \right\|^2 - \frac{D}{u_{mn}^{(k+1)}} (\sigma^2)^{(k)} \right) \tag{A12}$$

将式 (16) 代入式 (A12) 可得:

$$\begin{aligned}
\Lambda &= u_{mn}^{(k+1)} \left(\left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)} \right\|^2 - \frac{D(\gamma_m^{(k+1)} + d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_m^{(k+1)}, (\sigma^2)^{(k)}))}{\gamma_m^{(k+1)} + D} (\sigma^2)^{(k)} \right) = \\
&u_{mn}^{(k+1)} Bigg(\left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)} \right\|^2 - \frac{D\left(\gamma_m^{(k+1)} + \frac{\left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)} \right\|^2}{(\sigma^2)^{(k)}} \right)}{\gamma_m^{(k+1)} + D} (\sigma^2)^{(k)} \Bigg) = \\
&u_{mn}^{(k+1)} \left(\left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)} \right\|^2 - \frac{D\left[\gamma_m^{(k+1)} (\sigma^2)^{(k)} + \left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)} \right\|^2 \right]}{\gamma_m^{(k+1)} + D} \right) = \\
&u_{mn}^{(k+1)} \left(\frac{\left\| \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_m^{(k+1)} \right\|^2 - D(\sigma^2)^{(k)}}{1 + D/\gamma_m^{(k+1)}} \right)
\end{aligned} \tag{A13}$$

因此, $P_{\sigma^2}^{(k)} < 0$, 由文献 [31] 可得, σ^2 收敛. 至此, $\boldsymbol{y}_m$ 的位移量和 σ^2 的收敛性得证. □

References

1 Paul J B, Neil D M. A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, **14**(2): 239−256

2 Bin L, Hancock E R. Structural graph matching using the EM algorithm and singular value decomposition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2001, **23**(10): 1120−1136

3 Chui H, Rangarajan A. A feature registration framework using mixture models. In: Proceedings of the 2000 IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis. South Carolina, USA: IEEE, 2000. 190−197

4 Revow M, Milliams C K I, Hinton G E. Using generative models for handwritten digit recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996, **18**(6): 592−606

5 Chui H, Rangarajan A. A new point matching algorithm for non-rigid registration. *Computer Vision and Image Understanding*, 2003, **89**(2−3): 114−141

6 Bing J, Vemuri B C. A robust algorithm for point set registration using mixture of Gaussians. In: Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Computer Vision. Beijing, China: IEEE, 2005. 1246−1251

7 Tsin Y, Kanade T. A correlation-based approach to robust point set registration. *Computer Vision*, 2004, **3023**: 558−569

8 Jiang Y, Xie J, Sun D, Tsui H. Shape registration by simultaneously optimizing representation and transformation. In: Proceedings of the 2007 Medical Image Computing and Computer-assisted Intervention. Brisbane, Australia: Springer, 2007. 809−817

9 Nie Hong-Bin, Hou Qing-Yu, Zhao Ming, Zhang Wei. IR/visible image registration based on EM iteration of log-likelihood function. *Optics and Precision Engineering*, 2011, **19**(3): 657−663
(聂宏宾, 侯晴宇, 赵明, 张伟. 基于似然函数 EM 迭代的红外与可见光图像配准. 光学精密工程, 2011, **19**(3): 657−663)

10 Myronenko A, Song X B, Miguel A. Non-rigid point set registration: coherent point drift. In: Proceedings of the 2007 Neural Information Processing Systems. Vancouver, Canada: MIT Press, 2007. 1009−1016

11 Myronenko A, Song X B. Point set registration: coherent point drift. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, **32**(12): 2262−2275

12 Wang P, Wang P, Qu Z G, Gao Y H, Shen Z K. A refined coherent point drift (CPD) algorithm for point set registration. *Science China*, 2011, **54**(12): 2659−2666

13 David P, Geoffrey M. Robust mixture modelling using the t distribution. *Statistics and Computing*, 2000, **10**(4): 339−348

14 Geoffrey M, David P. Robust cluster analysis via mixtures of multivariate t-distributions. *Advances in Pattern Recognition*, 1998, **1451**: 658−666

15 Wang H X, Zhang Q B, Luo B, Wei S. Robust mixture modeling using multivariate t-distribution with missing information. *Pattern Recognition Letters*, 2004, **25**(6): 701−710

16 Gerogiannis D, Nikou C, Likas A. Robust image registration using mixtures of t-distributions. In: Proceedings of the 2007 IEEE 11th International Conference on Computer Vision. Rio de Janeiro. Brazil: IEEE, 2007. 1−8

17 Gerogiannis D, Nikou C L A. The mixtures of student′s t-distributions as a robust framework for rigid registration. *Image and Vision Computing*, 2009, **27**(9): 1285−1294

18 Nie Jian-Hui, Hu Ying, Ma Zi. Outlier detection of scattered point cloud by classification. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 2011, **23**(9): 1526−1532
(聂建辉, 胡英, 马孜. 散乱点云离群点的分类识别算法. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, **23**(9): 1526−1532)

19 Sfikas G, Nikou C, Galatsanos N. Edge preserving spatially varying mixtures for image segmentation. In: Proceedings of the 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Minnesota, USA: IEEE, 2008. 1−7

20 Sfikas G, Nikou C, Galatsanos N. Robust image segmentation with mixtures of student′s t-distributions. In: Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Image Processing. Texas, USA: IEEE, 2007. 273−276

21 Chatzis S P, Kosmopoulos D I, Varvarigou T A. Robust sequential data modeling using an outlier tolerant hidden markov model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, **31**(9): 1657−1669

22 Sfikas G, Nikou C, Galatsanos N, Heinrich C. Spatially varying mixtures incorporating line processes for image segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2010, **36**(2): 91−110

23 Madsen R E, Kauchak D, Elkan C. Modeling word burstiness using the Dirichlet distribution. In: Proceedings of the 22nd International Conference on Machine Learning. Bonn, Germany: ACM Press, 2005. 545−552

24 Bouguila N, Ziou D. A hybrid SEM algorithm for high-dimensional unsupervised learning using a finite generalized Dirichlet mixture. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **15**(9): 2657−2668

25 Blei D, Ng A Y, Jordan M I. Latent dirichlet allocation. *The Journal of Machine Learning Research*, 2003, **3**: 993−1022

26 Nikou C, Likas C, Galatsanos N P. A Bayesian framework for image segmentation with spatially varying mixtures. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, **19**(9): 2278−2289

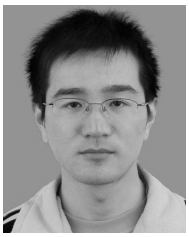
27 Nguyen T M, Wu Q M J. Robust student′s-t mixture model with spatial constraints and its application in medical image segmentation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2012, **31**(1): 103−116

28 Chui H, Rangarajan A. A new algorithm for non-rigid point matching. In: Proceedings of the 2000 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. South Carolina, USA: IEEE, 2000. 44−51

29 Zhe C, Simon H. On different facets of regularization theory. *Neural Computation*, 2002, **14**(12): 2791−2846

30 Girosi F, Jones M, Poggio T. Regularization theory and neural networks architectures. *Neural Computation*, 1995, **7**(2): 219−269

31 Lei X, Michael I J. On convergence properties of the EM algorithm for Gaussian mixtures. *Neural Computation*, 1996, **8**(1): 129−151

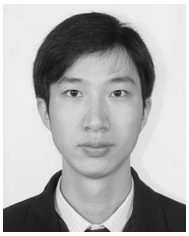


周志勇 中国科学院苏州生物医学工程技术研究所助理研究员. 主要研究方向为医学图像配准和处理方面的研究.
E-mail: zhouzhiyong1638@163.com
(**ZHOU Zhi-Yong** Ph. D., research assistant at Suzhou Institute of Biomedical Engineering and Technology, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers medical images registration and analysis.)

李莉华 学士, 重庆市电子工程职业学院助教. 主要研究方向为医学图形图像处理算法和软件开发.
E-mail: cqlilihua@163.com
(**LI Li-Hua** Bachelor, teaching assistant at Chongqing College of Electronic Engineering. Her research interest covers medical graphic and image processing algorithms and software.)

郑 健 博士, 中国科学院苏州生物医学工程技术研究所副研究员. 主要研究方向为医学影像处理与分析算法研究.
E-mail: zhengj@sibet.ac.cn
(**ZHENG Jian** Ph. D., associate professor at Suzhou Institute of Biomedical Engineering and Technology, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers medical images processing and analysis.)

蒯多杰 博士, 中国科学院苏州生物医学工程技术研究所副研究员. 主要研究方向为医学成像系统研制, 图像处理, 软件和算法设计.
E-mail: kuaidj@sibet.ac.cn
(**KUAI Duo-Jie** Ph. D., associate professor at Suzhou Institute of Biomedical Engineering and Technology, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers medical imaging system, image processing, and software and algorithm.)



胡 粟 硕士, 苏州大学附属第一医院工作. 主要研究方向为 CT 和 MRI 影像诊断. E-mail: husu1022@126.com
(**HU Su** Master at the First Affiliated Hospital of Soochow University, Suzhou First People′s Hospital. His research interest covers CT and MRI images diagnostic.)

张 涛 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所研究员. 主用研究方向为医学影像处理和手术精确导航定位. 本文通信作者.
E-mail: zhangt@ciomp.ac.cn
(**ZHANG Tao** Professor at Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers medical images processing and surgical precision navigation. Corresponding author of this paper.)