输入饱和系统的离散增益调度控制及其在在轨交会中的应用

王 茜 [1] 周 彬 [1] 段广仁 [1]

摘 要 基于参量 Lyapunov 方法和不变集理论, 针对具有输入饱和非线性约束的线性系统, 提出了一种离散增益调度控制方法. 通过逐渐增大代表闭环系统收敛速率参数的值, 所提出的离散增益调度控制方法逐步加快闭环系统的收敛速度, 达到改善闭环系统动态性能的目的. 如果开环系统是非指数不稳定的, 则所提出的离散增益调度控制器可实现半全局镇定; 反之可实现局部镇定, 并均可保证闭环系统的指数稳定性. 最后, 将所提出的方法应用于空间合作目标在轨交会控制系统的控制器设计, 并直接在原始非线性系统模型上进行仿真, 结果验证了所提方法的有效性.

关键词 输入饱和非线性, 离散增益调度, 参量 Lyapunov 方程, 不变集, 在轨交会

引用格式 王茜, 周彬, 段广仁. 输入饱和系统的离散增益调度控制及其在在轨交会中的应用. 自动化学报, 2014, **40**(2): 208−218

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00208

Discrete Gain Scheduled Control of Input Saturated Systems with Applications in On-orbit Rendezvous

WANG Qian[1] ZHOU Bin[1] DUAN Guang-Ren[1]

Abstract This paper proposes a discrete gain scheduled approach to the control of linear systems with input saturation nonlinearity by utilizing the parametric Lyapunov equation based approach and the invariant set theory. The proposed discrete gain scheduled approach improves the dynamic performances of the closed-loop systems significantly by gradually increasing a design parameter representing the convergence rate of the closed-loop system. It is shown that the proposed discrete gain scheduled controller achieves semi-global stabilization if the open-loop system is not exponentially unstable, and achieves local stabilization if the open-loop system is exponentially unstable. The exponential stability of the closed-loop system is guaranteed in both cases. Numerical simulations on the nonlinear model of the spacecraft rendezvous system show the effectiveness of the proposed discrete gain scheduled approach.

Key words Input saturation nonlinearity, discrete gain scheduling, parametric Lyapunov equation, invariant set, on-orbit rendezvous

Citation Wang Qian, Zhou Bin, Duan Guang-Ren. Discrete gain scheduled control of input saturated systems with applications in on-orbit rendezvous. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(2): 208−218

实际控制系统的执行器都存在饱和非线性的约束, 其存在使得控制系统呈现出本质的非线性特征. 在控制器设计时忽略饱和非线性会导致系统性能变坏, 甚至会导致闭环系统不稳定. 但在控制器的设计中考虑输入饱和非线性会使得控制器设计变得非常困难. 对于具有饱和非线性的控制系统的设计问题, 已经有很多结果[1−7]. 在已有文献中, 具有饱和非线性的控制系统的全局镇定、半全局镇定和局部镇定得到了非常多的研究. 现在已经清楚, 只有开环系统不是指数不稳定的控制系统才可以实现全局或者半全局镇定[6, 8]. 如果开环系统是指数不稳定的, 则任何反馈控制律仅可实现局部镇定.

不变集是控制理论中一个非常重要的概念, 特别是研究具有饱和非线性的控制系统设计的一个非常重要的工具[9], 在约束控制理论中具有重要的地位. 一般地, 不变集可以利用相应的 Lyapunov 函数的水平集进行刻画, 主要用于估计非线性系统的吸引域, 而后者的精确描述往往是不可能的. 关于不变集在具有饱和非线性的控制系统的稳定性分析和控

收稿日期 2012-10-09 录用日期 2013-06-28
Manuscript received October 9, 2012; accepted June 28, 2013
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2012CB821205), 国家自然科学基金创新群体项目 (61021002), 国家自然科学基金 (61104124, 61273028, 61322305), 教育部新世纪优秀人才支持计划 (NCET-11-0815), 哈尔滨工业大学基础研究杰出人才培育计划 III 类 (HIT.BRETIII. 201210), 哈尔滨工业大学基础研究杰出人才 "跃升" 培育计划 (HIT.BRETIV.201305) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2012CB821205), the Innovative Team Program of National Natural Science Foundation of China (61021002), National Natural Science Foundation of China (61104124, 61273028, 61322305), the Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-11-0815), and Fundamental Research Funds for the Central Universities (HIT.BRETIII. 201210, HIT.BRETIV.201305)
本文责任编委 胡小平
Recommended by Associate Editor HU Xiao-Ping
1. 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心 哈尔滨 150001
1. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

制器设计中的应用, 可以参考文献 [4, 10−11] 及其中提及的文献.

针对具有饱和非线性控制系统的设计, 文献中存在三种增益调度控制方法、即连续静态增益调度控制方法、连续动态增益调度控制方法和离散增益调度控制方法. 在连续静态增益调度控制方法中, 反馈增益是根据关于状态向量的代数方程或者代数不等式的解连续地变化, 代表性的方法是文献 [12] 提出的连续特征值配置方法, Megretski 提出的增益调度方法[13−14] 以及文献 [15] 针对指数不稳定系统提出的增益调度控制方法. 这类方法的主要困难是需要对每个时刻 t 在线求解复杂的非线性方程, 实现起来非常困难. 在连续动态增益调度控制方法中, 反馈增益是根据与状态向量相关的微分方程的解来连续地变化. 关于这类方法, 可以参见文献 [16−18] 及其中引用的文献. 不同于连续增益调度控制方法, 在离散增益调度控制方法中, 反馈增益只在离散的时间点上发生变化. 这种方法也叫做分段线性反馈控制方法. 具体的介绍可以参见文献 [19−21]. 相比于前两种增益调度方法, 离散增益调度控制方法更容易实现.

本文利用作者之前提出的参量 Lyapunov 方法[22] 以及广泛应用的不变集 (椭球) 理论, 针对具有输入饱和非线性的控制系统, 提出了一种新的离散增益调度控制方法. 该方法通过在线更新控制增益来逐步增大系统的收敛速度, 达到改善系统动态性能的目的. 本文证明, 如果开环系统是有界输入渐近零能控的, 则所提出的增益调度控制器可实现半全局镇定; 如果开环系统是指数不稳定的, 则所提出的控制器可实现局部镇定. 但无论是哪种情形, 闭环系统均是指数稳定的.

空间合作目标在轨交会是指一个航天器 (追踪航天器) 主动追踪, 靠近另一个事先了解的航天器 (目标航天器) 并最终使得两者能实施对接的空间使命 (或空间技术) 的过程[23−24]. 空间合作目标在轨交会是实现一些高级空间操作, 如实现空间站、空间实验室、空间通信和遥感平台等大型空间基础设施在轨装配、回收、补给和维修以及国际空间救生艇救援服务等的先决条件. 轨道交会要受到总体约束条件, 如目标航天器轨道、追踪航天器初始轨道、交会时间等. 在所有的约束中, 推力器所能产生的加速度以及航天器推进系统的发动机所能提供的功率受到的约束至关重要. 这是因为如果根据控制算法计算而得到的所需的加速度/功率超出了推力器/发动机所能提供的最大加速度/最大功率, 那么实际系统将不是按照设计的方式运行, 这不但降低了交会控制的控制品质, 还可能引起不稳定, 导致交会任务的失败. 因此, 本文针对具有输入饱和非线性的空间合作目标在轨交会系统设计了一种离散增益调度控制器. 此控制器与连续控制器相比大大节省了交会时间, 且在整个交会的过程中, 在充分利用执行器控制能力的前提下, 实现相应闭环系统的半全局镇定, 成功地完成轨道交会任务.

本文的结构安排如下. 第 1 节给出了问题的介绍和一些必要的预备知识; 第 2 节给出了本文的主要结果; 在第 3 节中, 将本文所提出的离散增益调度控制方法应用于空间合作目标在轨交会任务中, 给出了相应的仿真结果并进行了比较分析; 第 4 节对本文所取得的结果进行了总结.

符号说明. 令 $\mathbf{R}$ 表示实数集合, $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧几里德空间, $\|\cdot\|$ 表示 2 范数, $|\cdot|$ 表示绝对值, A^{T} 表示 A 的转置, $\mathrm{tr}(A)$ 表示 A 的迹, $\lambda_{\max}(A)$ 表示对称矩阵 A 的最大特征值, $\mathrm{Re}\{\lambda_{\max}(A)\}$ 表示对称矩阵 A 的所有特征值的最大实部, 以及 $\boldsymbol{I}[p,q]$ 表示整数集合 $\{p,p+1,\cdots,q\}$. 对于任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^m,\alpha_i>0$, 向量值饱和函数 $\mathrm{sat}_\alpha(\cdot):\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 定义为

$$\mathrm{sat}_\alpha(\beta)=\left[\begin{array}{cccc}\mathrm{sat}_{\alpha_1}(\beta_1) & \mathrm{sat}_{\alpha_2}(\beta_2) & \cdots & \mathrm{sat}_{\alpha_m}(\beta_m)\end{array}\right]^{\mathrm{T}}$$

其中, $\mathrm{sat}_{\alpha_i}(\beta_i)=\mathrm{sgn}(\beta_i)\min\{\alpha_i,|\beta_i|\}$. 方便起见, $\mathrm{sat}(\cdot)$ 同时表示标量和向量值饱和函数. 如果 $\alpha_i=1,i\in\boldsymbol{I}[1,m]$, 则 $\mathrm{sat}_\alpha(\cdot)$ 简写成 $\mathrm{sat}(\cdot)$, 后者称之为单位饱和函数. 最后, 对于正定对称矩阵 $P>0$ 和给定的正数 ρ, 定义椭球 $O(P,\rho)=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\le\rho\}$.

1　问题介绍与预备知识

考虑具有输入饱和非线性的线性系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\mathrm{sat}(\boldsymbol{u}) \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$ 分别是状态向量和输入向量. 不失一般性, 这里假设输入受到单位饱和函数的限制. 非单位饱和函数可以通过对矩阵 B 和 $\boldsymbol{u}$ 进行变换而转化为单位饱和函数. 首先给出如下定义[6, 25].

定义 1. 线性系统 (A,B) 称为是有界输入渐近零可控的 (Asymptotically null controllable with bounded controls, ANCBC), 如果 (A,B) 是可稳的且 A 的所有极点均位于闭的左半平面.

对于具有输入饱和非线性的系统 (1) 而言, 如果要设计全局镇定或者半全局镇定控制器, 必要条件是 (A,B) 是 ANCBC 的. 所谓半全局镇定是指, 对于给定的任意大的有界集合 $\Omega\in\mathbf{R}^n$, 设计反馈控制律使得闭环系统是渐近稳定的且吸引域包含 Ω,

即任意起始于 Ω 的初始状态最终都 (指数) 收敛到原点. 在 (A, B) 是 ANCBC 的条件下, 线性低增益反馈就可实现半全局镇定的目的[25−26]. 线性低增益反馈设计的思想是, 对于任意给定的任意大但有界的初始条件集合 Ω, 设计一个范数尽可能小的线性静态反馈控制增益, 使得任意起始于集合 Ω 中的初始状态的状态轨线, 都保证执行器不发生饱和. 现有三种低增益反馈设计方法, 即基于特征结构配置的设计方法[25], 基于 Riccati 代数方程的方法[25] 和基于参量 Lyapunov 方程的设计方法[26], 其中基于参量 Lyapunov 方程的设计方法不但具有前两个设计方法的所有优点, 还有结构简单、便于计算和实现等特点[22].

如上所述, 低增益反馈的思想是设计尽量小的控制增益来保证控制器不发生饱和. 当初始条件离原点很远时, 控制器增益必须选得非常小. 但随着状态向原点的方向逐渐收敛, 控制信号的幅值必然变得越来越小 (虽然不一定单调减小), 因此, 闭环系统具有非常慢的收敛速度. 为了改善低增益反馈的控制效果, 低 – 高增益反馈方法被提出来[13, 16]. 其基本思想是利用最优控制器具有无穷大的幅值裕度这一特点, 将低增益反馈增益 F 乘以一个代表高增益的标量. 但由于在与 F 正交的方向上, 高增益参数并不起作用[16], 这种方法对于改善系统的动态性能能力非常有限.

本文利用作者之前建立的基于参量 Lyapunov 方程的低增益设计方法, 提出具有饱和非线性的控制系统 (1) 的一种基于增益调度的控制方法. 其基本思想简述如下. 设计一系列的反馈镇定增益 $F_i, i \in \boldsymbol{I}[0, N]$, 每一个增益对应一个 Lyapunov 函数 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q_i \boldsymbol{x}, Q_i > 0$, 在饱和存在的情况下, 闭环系统的吸引域可用该 Lyapunov 函数的水平集即椭球 $O(Q_i, \rho_i)$ 来进行估计. 如果这组椭球 $O(Q_i, \rho_i), i \in I[0, N]$ 是嵌套的[21], 即

$$O(Q_0, \rho_0) \supset O(Q_1, \rho_1) \supset \cdots \supset O(Q_N, \rho_N) \quad (2)$$

则可在状态进入到这些椭球的边界即 $\partial O(Q_i, \rho_i)$ 时, 切换到相应的反馈增益 F_i, 椭球 $O(Q_i, \rho_i)$ 的不变集特性保证了状态将不离开椭球 $O(Q_i, \rho_i)$, 并在有限的时间之后到达下一个更小的椭球 $O(Q_{i+1}, \rho_{i+1})$ 的边界上. 如果闭环系统在这些椭球 $O(Q_i, \rho_i)$ 中的收敛速度随着 i 的增加而增加, 则上述增益调度方法可通过逐步增加状态的收敛速度而改善闭环系统的动态性能. 上述增益调度过程直观地描述在图 1 中.

下面介绍基于参量 Lyapunov 方程的低增益设计方法. 该方法针对系统 (1) 设计形如:

$$\boldsymbol{u} = -B^{\mathrm{T}} P(\gamma) \boldsymbol{x} \quad (3)$$

的线性控制器, 其中, γ 表示低增益参数, 矩阵 $P(\gamma)$ 是下面参量 Riccati 方程的唯一对称正定解:

$$A^{\mathrm{T}} P + PA - PBB^{\mathrm{T}} P = -\gamma P \quad (4)$$

该解的存在性和性质可总结为下面的引理[26].

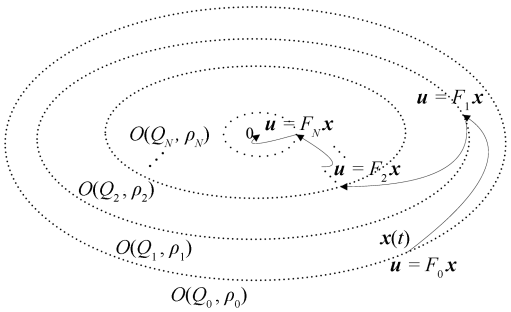


图 1 状态轨迹及控制切换示意图

Fig. 1 State trajectory and schematic diagram of control switch

引理 1. 假设 (A, B) 可控且 A 的所有极点均位于虚轴上, 则对于任意 $\gamma > 0$, 参量 Riccati 方程 (4) 存在唯一对称正定解 $P(\gamma) = W^{-1}(\gamma)$, 其中, $W(\gamma)$ 是下述 Lyapunov 代数方程的唯一对称正定解:

$$W(A + \frac{\gamma}{2} I_n)^{\mathrm{T}} + (A + \frac{\gamma}{2} I_n) W = BB^{\mathrm{T}} \quad (5)$$

另外, 该对称正定解 $P(\gamma)$ 具有下述性质:

1) $\lim_{\gamma \to 0^+} P(\gamma) = 0$;

2) $\mathrm{Re}\{\lambda_i(A - BB^{\mathrm{T}} P(\gamma))\} = -\gamma, \forall i \in \boldsymbol{I}[1, n]$;

3) $\mathrm{tr}(B^{\mathrm{T}} P(\gamma) B) = n\gamma$;

4) $P(\gamma)$ 是可微的有理分式矩阵, 且是关于 γ 的单调递增函数, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma} P(\gamma) > 0, \quad \forall \gamma > 0 \quad (6)$$

由上述引理给出的 P 的性质 2) 可知, 低增益参数 γ 作为闭环系统矩阵的实部, 表征了闭环系统的收敛速度. 因此, 可通过调度低增益参数 γ 来调度控制增益, 实现逐渐增加闭环系统收敛速度的目的. 另一方面, 上述引理给出的 P 的性质 4) 可保证相应的水平集 (不变集) 是嵌套的. 详细的设计和分析将在下一节给出.

2 增益调度控制方法

首先, 考虑 (A, B) 满足 ANCBC 的条件. 此时, A 的所有极点位于闭的左半平面. 由于 A 的稳定极

点不影响稳定性, 可不失一般性地假设 (A,B) 可控且 A 的所有极点均在虚轴上[26]. 根据引理 1, 参量 Riccati 方程 (4) 对于任意 $\gamma>0$ 具有唯一对称正定解. 令

$$P_\gamma = n\gamma P(\gamma),\quad \forall\gamma>0 \tag{7}$$

对于任意有界集合 $\Omega\in\mathbf{R}^n$, 定义

$$\gamma_0=\gamma_0(\Omega)=\min_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\left\{\gamma:\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_\gamma\boldsymbol{x}=1\right\} \tag{8}$$

由于 A 的极点位于虚轴上, 由引理 1 可知:

$$\lim_{\gamma\to0^+}P_\gamma=\lim_{\gamma\to0^+}n\gamma P(\gamma)=0$$

从而对于任意大但有界的集合 Ω, γ_0 都是存在的. 如果初始条件 $\boldsymbol{x}_0$ 已知, 则 γ_0 的求取可见后面注 2 的说明. 对于任意给定的正整数 N, 设

$$\Gamma_N=\{\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_N\},\ \gamma_{i-1}<\gamma_i,\ i\in\boldsymbol{I}[1,N] \tag{9}$$

对于任意 $\gamma_i\in\Gamma_N$, 定义椭球 $O(P_{\gamma_i})$. 由 $\frac{\mathrm{d}P(\gamma)}{\mathrm{d}\gamma}>0$ 可知

$$\frac{\mathrm{d}P_\gamma}{\mathrm{d}\gamma}=nP(\gamma)+n\gamma\frac{\mathrm{d}P(\gamma)}{\mathrm{d}\gamma}>0 \tag{10}$$

故椭球 $O(P_{\gamma_i})$ 是嵌套的, 即

$$O(P_{\gamma_0})\supset O(P_{\gamma_1})\supset\cdots\supset O(P_{\gamma_N}) \tag{11}$$

本文提出的增益调度控制方法可陈述如下.

定理 1. 假设 (A,B) 可控且 A 的所有极点均位于虚轴上. 设 $P(\gamma)$ 是参量 Riccati 方程 (4) 的唯一对称正定解. 则如下离散增益调度状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}=\begin{cases}\boldsymbol{u}_N=-B^{\mathrm{T}}P(\gamma_N)\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\in O(P_{\gamma_N})\\ \boldsymbol{u}_{N-1}=-B^{\mathrm{T}}P(\gamma_{N-1})\boldsymbol{x},\\ \qquad\boldsymbol{x}\in O(P_{\gamma_{N-1}})\backslash O(P_{\gamma_N})\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{u}_0=-B^{\mathrm{T}}P(\gamma_0)\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\in O(P_{\gamma_0})\backslash O(P_{\gamma_1})\end{cases} \tag{12}$$

使得具有输入饱和非线性的控制系统 (1) 指数稳定, 且闭环系统的吸引域包含给定的任意大的集合 Ω. 此外, 设控制律 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_{i-1},i\in\boldsymbol{I}[1,N]$ 的作用时间为 T_{i-1}, 则:

$$T_{i-1}\le\frac{1}{\gamma_{i-1}}\ln\left(\frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}}\lambda_{\max}\left\{P(\gamma_i)P^{-1}(\gamma_{i-1})\right\}\right) \tag{13}$$

即经过时间

$$T(N)=\sum_{i=1}^{N}T_{i-1} \tag{14}$$

之后, 控制律切换到 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_N$ 并不再切换, 闭环系统成为线性系统.

证明. 定义如下 N 个有界的集合

$$\mathscr{C}_{i-1}=O(P_{\gamma_{i-1}})\backslash O(P_{\gamma_i}),\ i\in\boldsymbol{I}[1,N] \tag{15}$$

则根据式 (1) 和 (12), 闭环系统可写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}-B\mathrm{sat}(B^{\mathrm{T}}P(\gamma_{i-1})\boldsymbol{x}),\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathscr{C}_{i-1} \tag{16}$$

假设在 $t=t_{i-1},i\in\boldsymbol{I}[1,N]$ 时刻, 状态 $\boldsymbol{x}(t_{i-1})$ 位于椭球 $O(P_{\gamma_{i-1}})$ 的边界上, 即 $\boldsymbol{x}(t_{i-1})\in\partial O(P_{\gamma_{i-1}})$, 或者等价地

$$V_{i-1}(\boldsymbol{x}(t_{i-1}))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_{i-1})P_{\gamma_{i-1}}\boldsymbol{x}(t_{i-1})=1,\ i\in\boldsymbol{I}[1,N] \tag{17}$$

显然 $\boldsymbol{x}(t_{i-1})\in\mathscr{C}_{i-1}$. 下面证明存在有限时间 $T_{i-1}>0$, 使得任意的初始状态 $\boldsymbol{x}(t_{i-1})\in\partial O(P_{\gamma_{i-1}})$ 经过 T_{i-1} 时间之后必然进入到椭球 $O(P_{\gamma_i})$ 的边界上.

对于任意 $i\in\boldsymbol{I}[0,N]$, 考虑下面的集合

$$\mathscr{L}_i:=\left\{\boldsymbol{x}:\left|\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}P(\gamma_i)\boldsymbol{x}\right|\le1,\ k\in\boldsymbol{I}[1,m]\right\} \tag{18}$$

其中, $\boldsymbol{B}_k$ 表示 B 的第 k 列. 由引理 1 可得:

$$\begin{aligned}&\left|\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}P(\gamma_i)\boldsymbol{x}\right|^2=\\ &\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}P(\gamma_i)\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P(\gamma_i)\boldsymbol{B}_k\le\\ &\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}P(\gamma_i)\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P(\gamma_i)\boldsymbol{B}_k=\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P(\gamma_i)BB^{\mathrm{T}}P(\gamma_i)\boldsymbol{x}\le\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P^{\frac12}(\gamma_i)\mathrm{tr}(P^{\frac12}(\gamma_i)BB^{\mathrm{T}}P^{\frac12}(\gamma_i))P^{\frac12}(\gamma_i)\boldsymbol{x}=\\ &n\gamma_i\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P(\gamma_i)\boldsymbol{x}=\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_{\gamma_i}\boldsymbol{x},\ \forall k\in\boldsymbol{I}[1,m]\end{aligned} \tag{19}$$

从而根据 $\mathscr{L}_i$ 和 $O(P_{\gamma_i})$ 的定义有:

$$O(P_{\gamma_i})\subseteq\mathscr{L}_i,\quad\forall i\in\boldsymbol{I}[0,N] \tag{20}$$

因此, 对于任意 $i\in\boldsymbol{I}[1,N]$, 如果 $\boldsymbol{x}\in O(P_{\gamma_{i-1}})$, 则从式 (20) 可知 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{L}_{i-1}$, 进而由式 (12) 可知控制律 (12) 简化成 $\boldsymbol{u}=-B^{\mathrm{T}}P(\gamma_{i-1})\boldsymbol{x}$ 且 $\|\boldsymbol{u}\|_\infty\le1$.

取 Lyapunov 函数

$$V_{i-1}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_{\gamma_{i-1}}\boldsymbol{x}=n\gamma_{i-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P(\gamma_{i-1})\boldsymbol{x},\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathscr{C}_{i-1} \tag{21}$$

对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{C}_{i-1}$, 上述函数 $V_{i-1}(\boldsymbol{x})$ 是时不变的, 且其水平集为 $O(P_{\gamma_{i-1}})$. 该函数沿着系统 (16) 的状态轨迹的导数满足:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{i-1}(\boldsymbol{x}) = {} & 2n\gamma_{i-1}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}P(\gamma_{i-1})\boldsymbol{x} = \\ & 2n\gamma_{i-1}(A\boldsymbol{x}-B\mathrm{sat}(B^{\mathrm{T}}P(\gamma_{i-1})\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}P(\gamma_{i-1})\boldsymbol{x} = \\ & \gamma_{i-1}n\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(P(\gamma_{i-1})A + A^{\mathrm{T}}P(\gamma_{i-1}))\boldsymbol{x}- \\ & 2\gamma_{i-1}n\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P(\gamma_{i-1})BB^{\mathrm{T}}P(\gamma_{i-1})\boldsymbol{x} \leq \\ & -n\gamma_{i-1}^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P(\gamma_{i-1})\boldsymbol{x} = \\ & -\gamma_{i-1}V_{i-1}(\boldsymbol{x}) < 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{C}_{i-1}\backslash\{0\}\end{aligned} \tag{22}$$

如果 $i = 1$, 上式即表明起始于 $\Omega \subseteq O(P_{\gamma_0})$ 的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 在经过有限的时间 $T_0 > 0$ 之后接触水平集 $O(P_{\gamma_1})$ 的边界. 如果 $i \in \boldsymbol{I}[2, N-1]$, 则表明状态 $\boldsymbol{x}(t_{i-1})$ 在经过有限的时间 $T_{i-1} > 0$ 之后接触水平集 $O(P_{\gamma_i})$ 的边界. 如果 $i = N$, 则表明起始于水平集 $O(P_{\gamma_N})$ 的边界的状态 $\boldsymbol{x}(t_N)$ 不再离开集合 $O(P_{\gamma_N})$. 而当状态 $\boldsymbol{x}$ 进入到 $O(P_{\gamma_N})$ 之后, 控制律式 (12) 不再切换. 另一方面, 根据式 (20) 可知控制器亦不再发生饱和, 即自此之后闭环系统成为线性系统.

由式 (22) 可知对于任意 $t \in [t_{i-1}, t_i)$ 成立:

$$V_{i-1}(\boldsymbol{x}(t)) \leq V_{i-1}(\boldsymbol{x}(t_{i-1}))\mathrm{e}^{-\gamma_{i-1}(t-t_{i-1})} \tag{23}$$

由于对于任意矩阵 $Q > 0$ 成立 $\lambda_{\min}\{Q\} \leq Q \leq \lambda_{\max}\{Q\}$, 对于任意 $i \in \boldsymbol{I}[1, N]$ 由式 (23) 可解得:

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \begin{cases} \kappa_{i-1}^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_{i-1}}{2}(t-t_{i-1})}\|\boldsymbol{x}(t_{i-1})\|, & t \in [t_{i-1}, t_i) \\ \kappa_N^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_N}{2}(t-t_N)}\|\boldsymbol{x}(t_N)\|, & t \in [t_N, \infty) \end{cases} \tag{24}$$

其中

$$\kappa_i = \frac{\lambda_{\max}\{P(\gamma_i)\}}{\lambda_{\min}\{P(\gamma_i)\}}, \quad i \in \boldsymbol{I}[1, N] \tag{25}$$

这表明对于任意 $i \in \boldsymbol{I}[1, N]$, 状态 $\boldsymbol{x}(t_{i-1})$ 从 $O(P_{\gamma_{i-1}})$ 的边界指数收敛到 $O(P_{\gamma_i})$ 的边界, 而当 $t \geq t_N$ 之后状态指数收敛到原点. 因此闭环系统是指数稳定的.

下面给出 T_{i-1} 上界的估计. 由于状态在 $t_i = t_{i-1} + T_{i-1}$ 时刻到达 $O(P_{\gamma_i})$ 的边界, 故有:

$$V_i(\boldsymbol{x}(t_{i-1} + T_{i-1})) = 1 \tag{26}$$

对任意 $i \in \boldsymbol{I}[1, N]$, 定义常数

$$\begin{aligned}\mu_{i-1} := {} & \frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}}\lambda_{\max}\left\{P^{-\frac{1}{2}}(\gamma_{i-1})P(\gamma_i)P^{-\frac{1}{2}}(\gamma_{i-1})\right\} = \\ & \frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}}\lambda_{\max}\left\{P(\gamma_i)P^{-1}(\gamma_{i-1})\right\}\end{aligned} \tag{27}$$

由于 $P^{-\frac{1}{2}}(\gamma_{i-1})P(\gamma_i)P^{-\frac{1}{2}}(\gamma_{i-1}) > 0$, 则有:

$$\mu_{i-1}I_n \geq \frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}}P^{-\frac{1}{2}}(\gamma_{i-1})P(\gamma_i)P^{-\frac{1}{2}}(\gamma_{i-1}) \tag{28}$$

或者等价地写成:

$$\gamma_{i-1}P(\gamma_{i-1}) \geq \frac{1}{\mu_{i-1}}\gamma_i P(\gamma_i) \tag{29}$$

从而根据式 (17)、(23) 和式 (26) 可知:

$$\begin{aligned}& \mathrm{e}^{-\gamma_{i-1}(t_i-t_{i-1})} = \\ & \quad \mathrm{e}^{-\gamma_{i-1}(t_i-t_{i-1})}V_{i-1}(\boldsymbol{x}(t_{i-1})) \geq \\ & \quad V_{i-1}(\boldsymbol{x}(t_{i-1}+T_{i-1})) = \\ & \quad n\gamma_{i-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_{i-1}+T_{i-1})P(\gamma_{i-1})\boldsymbol{x}(t_{i-1}+T_{i-1}) \geq \\ & \quad \frac{n}{\mu_{i-1}}\gamma_i\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_{i-1}+T_{i-1})P(\gamma_i)\boldsymbol{x}(t_{i-1}+T_{i-1}) = \\ & \quad \frac{1}{\mu_{i-1}}V_i(\boldsymbol{x}(t_{i-1}+T_{i-1})) = \frac{1}{\mu_{i-1}}\end{aligned} \tag{30}$$

由上式可解得:

$$\begin{aligned}T_{i-1} \leq {} & \frac{1}{\gamma_{i-1}}\ln(\mu_{i-1}) = \\ & \frac{1}{\gamma_{i-1}}\ln(\frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}}\lambda_{\max}\left\{P(\gamma_i)P^{-1}(\gamma_{i-1})\right\})\end{aligned} \tag{31}$$

□

注 1. 由上述定理的证明可知, 控制律 (12) 按照 $\boldsymbol{u}_0 \to \boldsymbol{u}_1 \to \cdots \to \boldsymbol{u}_{N-1} \to \boldsymbol{u}_N$ 的顺序依次作用在系统 (1) 上. 因此, 随着时间的增加, 参数 γ_i 越来越大, 从而由式 (24) 可知, 则闭环系统 (16) 指数收敛的速度也越来越快, 这说明增益调度控制律能有效地改善系统的动态性能.

根据定理 1 可给出离散增益调度控制器的设计步骤如下:

1) 根据初始状态求取满足式 (8) 的 γ_0;

2) 选定形如式 (9) 的集合 Γ_N;

3) 根据式 (12) 构造增益调度控制律 $\boldsymbol{u}$.

关于上述三个设计步骤, 有如下三个注释.

注 2. 对于任意给定的初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)$, γ_0 可通过求解非线性方程

$$n\gamma_0\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P(\gamma_0)\boldsymbol{x}_0 = 1 \tag{32}$$

得到. 由于 $P_\gamma = n\gamma P(\gamma)$ 关于 γ 是单调的 (见 (10)), 故上述非线性方程 (32) 可通过二分法求出唯一解. 首先选取任意充分大的正数 γ_a 和充分小的正数 γ_b 使得 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P(\gamma_a)\boldsymbol{x}_0 n\gamma_a > 1$ 和 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P(\gamma_b)\boldsymbol{x}_0 n\gamma_b < 1$. 计算

$$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}P(\frac{\gamma_a+\gamma_b}{2})\boldsymbol{x}_0 n(\frac{\gamma_a+\gamma_b}{2}) - 1 \tag{33}$$

若小于零, 则令 $\gamma_b = \frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)$, 否则令 $\gamma_a = \frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)$. 重复上述过程直至误差 $|n\gamma_a \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} P(\gamma_a)\ \boldsymbol{x}_0 - 1|$ 满足给定的精度要求, 并最终令 $\gamma_0 = \gamma_a$.

注 3. 满足式 (9) 的集合 Γ_N 可以任意设计. 下面给出两种简单的设计方法. 一种方法是令

$$\gamma_i = \gamma_0 \gamma_\Delta^i, \quad i \in \boldsymbol{I}\,[1, N] \tag{34}$$

其中, $\gamma_\Delta > 1$ 为指定的常数. 这表明 γ_i 按照指数的方式增加. 另一种方法是:

$$\gamma_i = \gamma_0 + \frac{i}{N}(\gamma_\infty - \gamma_0) := \gamma_0 + \frac{i}{N}\gamma_\delta, \quad i \in \boldsymbol{I}\,[1, N] \tag{35}$$

其中, $\gamma_\infty > \gamma_0$ 为指定的常数. 这表明 γ_i 按照线性的方式增加, 相邻两个元素的差为固定值 γ_δ/N, 且 $\gamma_N = \gamma_\infty$.

注 4. 根据定理 1 的证明或注 1 的说明, 控制律 (12) 按照 $\boldsymbol{u}_0 \to \boldsymbol{u}_1 \to \cdots \to \boldsymbol{u}_{N-1} \to \boldsymbol{u}_N$ 的顺序切换, 因此, 其实现非常简单. 具体方法如下. 设置一个当前变量 i, 其初始值为 $i = 0$, 相应的控制律为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$. 如果 $i \le N-1$, 对于每一个时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t)$, 计算

$$f(\boldsymbol{x}) = n\gamma_{i+1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P(\gamma_{i+1})\boldsymbol{x}(t) - 1 \tag{36}$$

如果 $f(\boldsymbol{x}) \le 0$, 则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{i+1}$ 并令 $i = i+1$. 否则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_i$.

容易理解, N 越大 (即切换次数越多), 相应于 γ_i (代表状态的收敛速度) 的控制律 $\boldsymbol{u}_i$ 作用的时间越短, 而 γ_i 是单调增加的, 从而较大的 γ_i 对应的控制律 $\boldsymbol{u}_i$ 作用的时间也越短, 进而状态收敛的速度也越快. 为了直观地说明这一点, 下面举一个数值例子. 为简便计算, 根据定理 1, 用

$$T_{i-1} = \frac{1}{\gamma_{i-1}} \ln\Big(\frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}} \lambda_{\max}\left\{P(\gamma_i)P^{-1}(\gamma_{i-1})\right\}\Big) \tag{37}$$

近似表示控制律 $\boldsymbol{u}_i$ 的作用时间. 另一方面, 为了便于比较, 固定 γ 的变化区间 (或等价地固定最终的参数 $\gamma_N = \gamma_\infty$), 即集合 Γ_N 按照式 (35) 的方式进行设计. 那么对于不同的切换次数 N, 状态从初始椭球 $O(P_{\gamma_0})$ 的边界收敛到终端椭球 $O(P_{\gamma_\infty})$ 的边界上的估计时间 $T(N)$ 可以根据 (14) 求得, 即

$$T(N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\gamma_{i-1}} \ln\Big(\frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}} \lambda_{\max}\left\{P(\gamma_i)P^{-1}(\gamma_{i-1})\right\}\Big)$$

算例 1. 设 (A, B) 如下式给出:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

容易看出 A 的所有极点位于虚轴上且 (A, B) 可控. 参量 Riccati 方程 (4) 的唯一对称正定解可求得:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & \dfrac{\gamma^5}{4} + 2\gamma & \dfrac{\gamma^5}{4} + \dfrac{\gamma^3}{2} \\ p_{13} & \dfrac{\gamma^5}{4} + \dfrac{\gamma^3}{2} & \dfrac{\gamma^5}{4} + \gamma^3 + \gamma \end{bmatrix} \tag{39}$$

其中, $p_{1j}, j \in \boldsymbol{I}\,[1, 3]$ 的表达式为

$$p_{11} = \frac{\gamma^5}{4} + 2\gamma^4 + 6\gamma^3 + 4\gamma^2 + 5\gamma$$
$$p_{12} = -\frac{\gamma^5}{4} - \gamma^4 - \frac{\gamma^3}{2} + \gamma^2$$
$$p_{13} = -\frac{\gamma^5}{4} - \gamma^4 - \gamma^3 - 2\gamma^2 - \gamma$$

令 $\gamma_0 = 0.01$ 以及 $\gamma_\infty = 10$. 那么对于不同的切换次数 N, 状态从初始椭球 $O(P_{\gamma_0})$ 的边界收敛到终端椭球 $O(P_{\gamma_\infty})$ 的边界上的估计时间 $T(N)$ 记录在图 2 上. $T(N)$ 的变化率即 $\nabla T(N) = T(N+1) - T(N)$ 也记录在该图上. 由图 2 可以看出, N 越大, $T(N)$ 越小. 但 $T(N)$ 的变化率 $\nabla T(N)$ 也越来越小, 这说明当 N 充分大之后, 增加切换次数对于改善收敛时间的效果变得不明显.

由上面的例子可以得出结论, 切换次数 N 不宜太大也不宜太小, 其选取应该在复杂程度和控制效率之间进行折中.

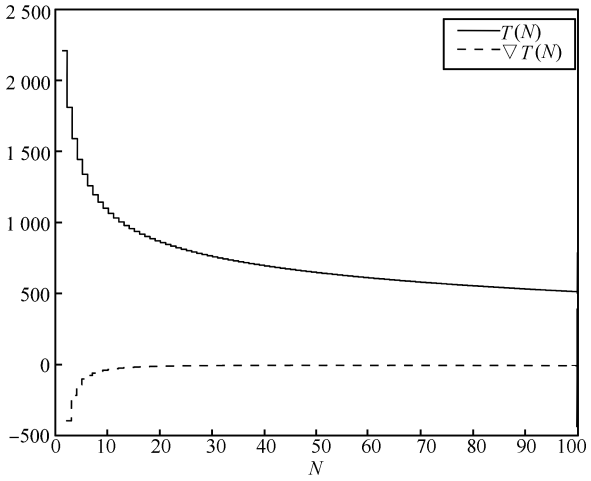


图 2　不同切换次数 N 对应的收敛时间 $T(N)$

Fig. 2　Convergence time $T(N)$ with different switching times N

定理 1 假设 A 的极点都位于虚轴上, 事实上这一假设并非必须的. 如果 A 具有位于右半平面的不稳定极点, 那么具有饱和非线性的控制系统 (1) 不可实现 (半) 全局镇定, 此时, 只能设计控制律实现局部镇定. 事实上只有位于系统 (1) 的渐近零能控域内的初始状态才能够被控制到原点[27]. 这种情况下吸引域的估计和极大化是主要关心的问题之一. 下面简单地说明定理 1 可以推广到 A 不稳定的情形, 即定理 1 提出的增益调度方法可实现局部镇定. 为此先介绍下面的引理[28].

引理 2. 设 $(A, B) \in (\mathbf{R}^{n\times n}, \mathbf{R}^{n\times m})$ 可控且

$$\gamma > \max\{0, 2\,\mathrm{Re}\{\lambda_{\max}\{-A\}\}\} := \gamma_A \tag{40}$$

则参量 Riccati 方程 (4) 具有唯一对称正定解 $P(\gamma)$, 且该解使得矩阵 $A - BB^{\mathrm{T}}P(\gamma)$ 渐近稳定.

对于任意有界集合 $\Omega \in \mathbf{R}^n$, 定义

$$\gamma_0 = \gamma_0(\Omega) = \min_{x\in\Omega}\left\{\gamma > \gamma_A : \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P_\gamma \boldsymbol{x} = 1\right\} \tag{41}$$

如前所述, 仅当 Ω 包含在系统 (1) 的渐近零能控域内 γ_0 才存在. 那么将定理 1 中的 γ_0 换成上述 γ_0, 结论依然成立. 为节省篇幅, 这里不给出完整的结论.

3 在空间合作目标在轨交会中的应用

3.1 问题描述

考虑空间合作目标在轨交会控制问题. 假设目标航天器运行在半径为 R 的圆轨道上, 目标航天器与追踪航天器的相对位置如图 3 所示. 假设目标航天器与追踪航天器的相对距离为 r. 为了便于描述与研究相对运动, 引入目标飞行器轨道坐标系 O-XYZ, 其原点 O 位于目标航天器的质心, X 轴沿着圆轨道半径 R 的方向, Y 轴沿着追踪航天器飞行的方向, Z 轴指向轨道平面外与 X 轴和 Y 轴构成右手坐标系. 目标轨道坐标系常用于描述两个航天器间的相对运动. 设引力常数 $\mu = GM$, 其中, M 为中心星体 (通常为地球) 质量, G 为万有引力常数. 则目标飞行器的轨道速度 $n = \mu^{\frac{1}{2}}/R^{\frac{3}{2}}$.

根据牛顿运动理论, 目标航天器与追踪航天器的相对运动方程可描述为[29]

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2n\dot{y} + n^2(R+x) - \sigma\mu(R+x) + \mathrm{sat}_{\alpha_X}(a_x) \\ \ddot{y} = -2n\dot{x} + n^2 y - \sigma\mu y + \mathrm{sat}_{\alpha_Y}(a_y) \\ \ddot{z} = -\sigma\mu z + \mathrm{sat}_{\alpha_Z}(a_z) \end{cases} \tag{42}$$

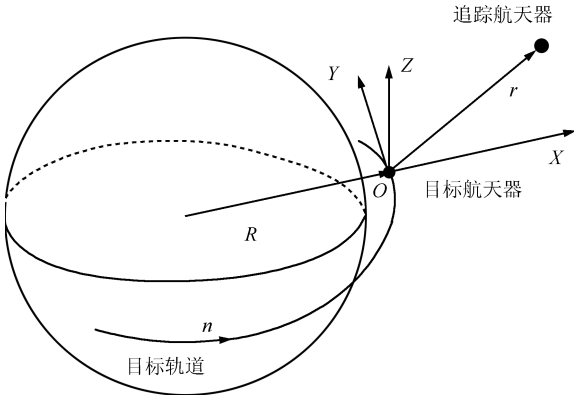


图 3 目标轨道坐标系及相关参数

Fig.3 The circular orbit and the coordinate system

其中, $\sigma = ((R+x)^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$,

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{43}$$

为施加在追踪航天器上的推力器产生的加速度向量, 其中, a_x, a_y 和 a_z 分别表示在三个坐标轴方向的加速度分量, α_X, α_Y 和 α_Z 分别表示推力器在三个坐标轴方向所产生的最大加速度分量. 方程 (42) 的线性化方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2n\dot{y} + 3n^2 x + \mathrm{sat}_{\alpha_X}(a_x) \\ \ddot{y} = -2n\dot{x} + \mathrm{sat}_{\alpha_Y}(a_y) \\ \ddot{z} = -n^2 z + \mathrm{sat}_{\alpha_Z}(a_z) \end{cases} \tag{44}$$

当 $\alpha = 0$ 时, 式 (44) 就是著名的 Hill 方程或 Clohessy-Wiltshire (CW) 方程[30].

令 $E = \mathrm{diag}\{\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z\}$, 则有:

$$\begin{aligned} u' := &\begin{bmatrix} \mathrm{sat}_{\alpha_X}(a_x) & \mathrm{sat}_{\alpha_Y}(a_y) & \mathrm{sat}_{\alpha_Z}(a_z) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \\ &E\begin{bmatrix} \mathrm{sat}(\dfrac{a_x}{\alpha_X}) & \mathrm{sat}(\dfrac{a_y}{\alpha_Y}) & \mathrm{sat}(\dfrac{a_z}{\alpha_Z}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \\ &E\mathrm{sat}(E^{-1}\boldsymbol{a}) \end{aligned} \tag{45}$$

如果选择控制向量 $\boldsymbol{U} = E^{-1}\boldsymbol{a}$ 和状态向量:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x & y & z & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{46}$$

则线性系统 (44) 可以写为

$$\dot{\boldsymbol{X}} = A\boldsymbol{X} + B\mathrm{sat}(\boldsymbol{U}) \tag{47}$$

其中, (A, B) 为下式给出的常数矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E \tag{49}$$

所谓空间合作目标的在轨交会就是将系统 (47) 的状态从非零初始值 $\boldsymbol{X}(t_0)$ 转移到最终值 $\boldsymbol{X}(t_f)=0$ 的过程, 这里 t_f 表示交会时间. 本文将利用所提出的离散增益调度控制方法来完成空间合作目标的在轨交会控制器设计任务.

容易看出系统 (47) 满足定理 1 的所有条件, 即 (A, B) 是可控的且 A 的所有极点均在虚轴上.

3.2　仿真结果

本节将本文所提出的控制方法应用于空间合作目标在轨交会控制系统的设计中. 不同于控制器的设计, 本节的仿真将直接针对非线性系统模型 (42) 进行.

假设目标航天器运行在地球同步卫星轨道上, 半径 $R=42\,241\,\mathrm{km}$, 运行周期为 24 小时. 目标航天器在地球同步卫星轨道上的角速度为 $7.2722\times10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$. 假设安装在追踪航天器上的推力器在三个坐标轴方向上所产生的加速度分别满足:

$$|a_x|\le 0.1,\ |a_y|\le 0.1,\ |a_z|\le 0.05$$

在目标轨道坐标系下, 选取状态初值为

$$\boldsymbol{X}(0)=\begin{bmatrix} 10\,000 & 10\,000 & -10\,000 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

即目标航天器与追踪航天器在三个坐标轴 (X, Y, Z) 方向的相对距离均为 $10\,000\,\mathrm{m}$, 在三个坐标轴 (X, Y, Z) 方向的相对速度分别为 $3\,\mathrm{m/s}$, $1\,\mathrm{m/s}$ 和 $-2\,\mathrm{m/s}$.

下面设计定理 1 中的离散增益调度控制器 (12). 根据控制器求解算法步骤首先求得 $\gamma_0=0.0011879235$. 这里采用式 (34) 中的方法设计集合 Γ_N. 当椭球个数 N 取为 50 时, $\gamma_\triangle$ 值取为 1.06, 根据式 (34) 计算出相应的 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{50}$, 进而可计算出参量 Riccati 方程 (4) 的唯一对称正定解 $P_1, P_2, \cdots, P_{50}$, 最后由式 (12) 计算控制器 $\boldsymbol{u}$.

图 4 ∼ 7 对系统 (42) 在 $N=50$ 时的离散增益调度控制和 $N=0$ 时的连续控制下的系统性能进行了比较. 由仿真图可以看出, 两种情况下, 目标航天器与追踪航天器最终的交会时间分别约为 $2\,900\,\mathrm{s}$ $(t_f\approx 2\,900\,\mathrm{s})$ 和 $7\,500\,\mathrm{s}$ $(t_f\approx 7\,500\,\mathrm{s})$. 图 7 显示在整个交会过程中, 所提出的离散增益调度控制器不仅充分利用了执行器的控制能力, 且控制输入 (推力器产生的加速度) 没有超出最大控制输入 (推力器所能产生的最大加速度). 本文所提出的离散增益调度控制方法较连续控制方法节省约 $4\,600\,\mathrm{s}$ 的交会时间.

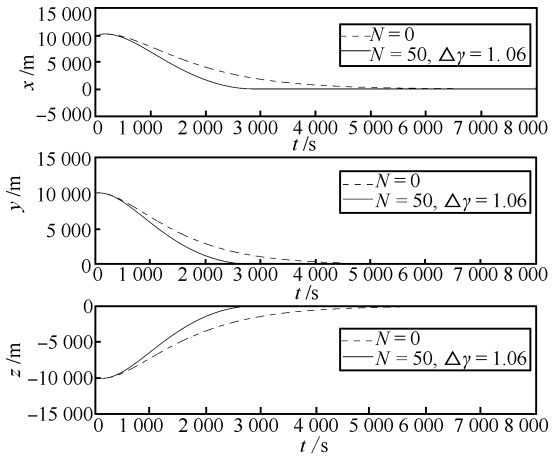


图 4　$N=50$ 和 $N=0$ 时, 两个航天器相对位置变化曲线

Fig. 4　The relative positions of the two spacecrafts with $N=50$ and $N=0$

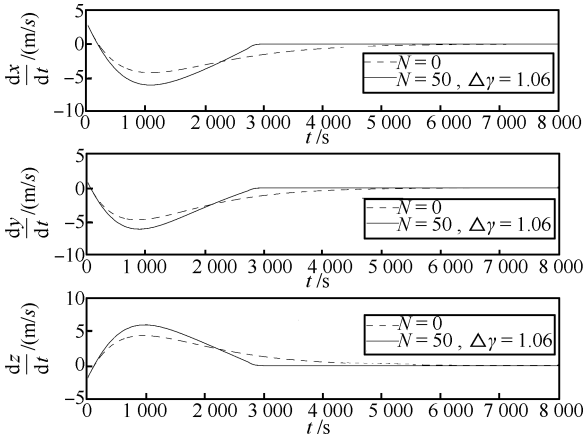


图 5　$N=50$ 和 $N=0$ 时, 两个航天器相对速度变化曲线

Fig. 5　The relative velocities of the two spacecrafts with $N=50$ and $N=0$

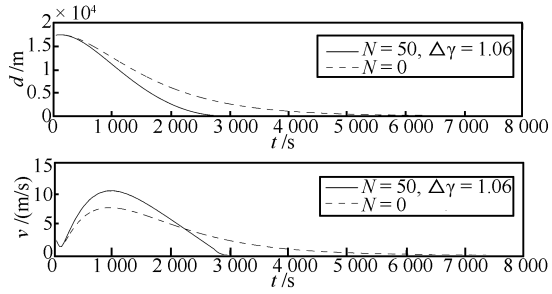


图 6 $N = 50$ 和 $N = 0$ 时, 两个航天器相对距离和相对速度变化曲线, 其中 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Fig. 6 The relative distances and velocities of the two spacecrafts with $N = 50$ and $N = 0$, where $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ and $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

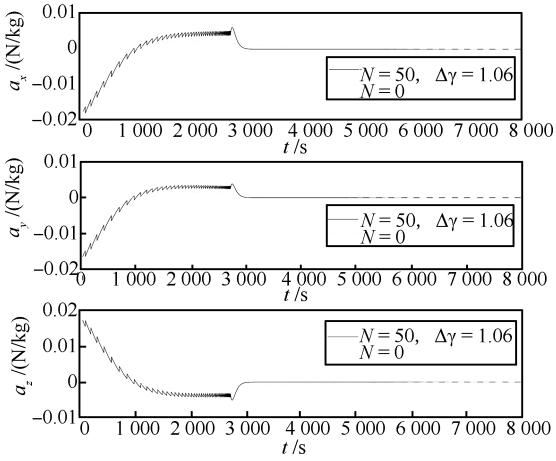


图 7 $N = 50$ 和 $N = 0$ 时, 追踪航天器的控制加速度变化曲线

Fig. 7 The curves of control acceleration with $N = 50$ and $N = 0$

为了说明椭球个数选取的越多 (即 N 值越大), 闭环系统的收敛速度越快, 将 $N = 0, N = 5, N = 50$ (当 $N = 50$ 时, $\gamma_\triangle$ 取为 1.06, 当 $N = 5$ 时, $\gamma_\triangle$ 取为 1.5) 三种情况下的系统状态曲线进行比较, 结果如图 8 和图 9 所示. 由这两个图可以看出, 当 $N = 5$ 时, 目标航天器与追踪航天器的交会时间约为 3 500 s ($t_f \approx 3\,500$ s), 较连续控制节省 4 000 s, 但较 $N = 50$ 情况下的交会时间多耗费了约 600 s. 另外图 9 表明在整个交会的过程中, 在充分利用执行器控制能力的前提下, 控制输入 (推力器产生的加速度) 没有超过最大控制输入 (推力器所能产生的最大加速度).

为了说明集合 Γ_N 的不同的设计方法将影响系统的收敛速度, 取 $N = 50$, $\gamma_\triangle = 1.06$, $\gamma_0 = 0.001\,187\,923\,5$, $\gamma_\infty = \gamma_N = \gamma_0 1.06^{50}$ 进行仿真比较, 所得结果如图 10 所示. 结果表明, 在相同的切换次数 N、相同的 γ_0 和相同的 γ_N 的情况下, $\gamma_i, i \in \boldsymbol{I}[0, N]$ 按照指数方式增加要比按照线性方式增加更能节省交会时间 (前者比后者大约节省 300 s).

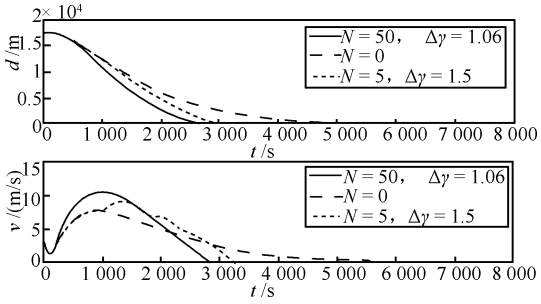


图 8 $N = 50, N = 5$ 和 $N = 0$ 时, 两航天器的相对距离和相对速度变化曲线, 其中 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Fig. 8 The relative distances and velocities of the two spacecrafts with $N = 50, N = 5$ and $N = 0$, where $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ and $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

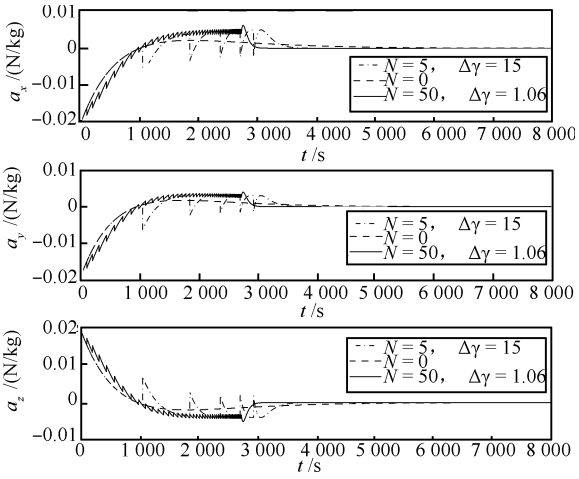


图 9 $N = 50, N = 5$ 和 $N = 0$ 时, 追踪航天器的控制加速度变化曲线

Fig. 9 The curves of control acceleration with $N = 50, N = 5$, and $N = 0$

4 结论

本文利用基于参量 Lyapunov 方程的设计方法, 提出了具有输入饱和非线性的控制系统的一种离散增益调度控制方法. 该方法通过在线更新控制增益逐步增大系统的收敛速度, 改善系统的动态性能. 如果开环系统是有界输入渐近零能控的, 则所提出的增益调度控制器可实现半全局镇定. 如果开环系统是指数不稳定的, 所提出的控制器可实现局部镇定. 最后, 将所提离散增益调度控制方法应用于空间合作目标圆轨道交会系统的控制器设计, 仿真结果验证了所提出控制方法的有效性.

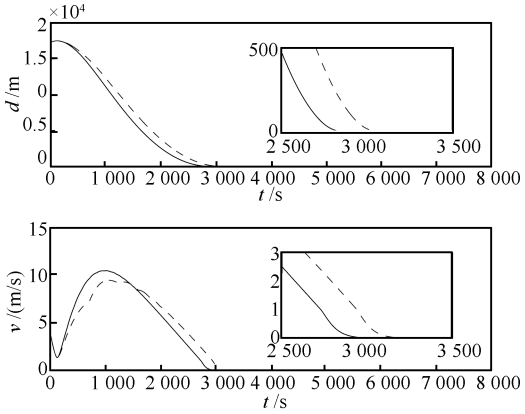


图 10 γ_N 分别按照指数方式增加 (实线) 和线性方式增加 (虚线) 时, 两航天器相对距离和相对速度变化曲线, 其中 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$

Fig. 10 The relative distances and velocities of the two spacecrafts when γ_N increases respectively under the way of index (solid line) and linearity (dotted line), where $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ and $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$

References

1 Chen B M, Lee T H, Peng K, Venkataramanan V. Composite nonlinear feedback control for linear systems with input saturation: theory and an application. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(3): 427−439

2 Du H P, Lam J. Energy-to-peak performance controller design for building via static output feedback under consideration of actuator saturation. *Computers & Structures*, 2006, **84**(31−32): 2277−2290

3 da Silva J M G Jr, Tarbouriech S. Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls: an LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(1): 119−124

4 Hu T S, Lin Z L. *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*. Boston, MA: Springer, 2001

5 Huang S D, Lam J. Saturated linear quadratic regulation of uncertain linear systems: stability region estimation and controller design. *International Journal of Control*, 2002, **75**(2): 97−110

6 Sussmann H J, Sontag E D, Yang Y. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(12): 2411−2425

7 Wu F, Lu B. Anti-windup control design for exponentially unstable LTI systems with actuator saturation. *Systems & Control Letters*, 2004, **52**(3−4): 305−322

8 Lin Z L, Saberi A, Stoorvogel A A. Semiglobal stabilization of linear discrete-Time systems subject to input saturation, via linear feedback — an ARE-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(8): 1203−1207

9 Burgat C, Tarbouriech S. *Nonlinear Systems*. London: Chapman & Hall, 1996

10 Blanchini F. Set invariance in control. *Automatica*, 1999, **35**(11): 1747−1767

11 Fu Jian, Wu Qing-Xian, Jiang Chang-Sheng, Wang Yu-Fei. Robust sliding mode positively invariant set for nonlinear continuous system. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(11): 1395−1401
(傅健, 吴庆宪, 姜长生, 王宇飞. 连续非线性系统的滑模鲁棒正不变集控制. 自动化学报, 2011, **37**(11): 1395−1401)

12 Suárez Z, Álvarez-Ramírez J, Solís-Daun J. Linear systems with bounded inputs: global stabilization with eigenvalue placement. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1997, **7**(9): 835−845

13 Lin Z L. Global control of linear systems with saturating actuators. *Automatica*, 1998, **34**(7): 897−905

14 Megretski A. BIBO output feedback stabilization with saturated control. In: Proceedings of the 13th IFAC World Congress. San Francisco, CA: IFAC, 1996. 435−440

15 Hu T S, Lin Z L. On improving the performance with bounded continuous feedback laws. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(9): 1570−1575

16 Grognard F, Sepulchre R, Bastin G. Improving the performance of low-gain designs for bounded control of linear systems. *Automatica*, 2002, **38**(10): 1777−1782

17 Teel A R. Linear systems with input nonlinearities: global stabilization by scheduling a family of H_∞ type controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1995, **5**(5): 399−411

18 Zhou B, Lin Z L, Duan G R. Robust global stabilization of linear systems with input saturation via gain scheduling. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, **20**(4): 424−447

19 De Dona J A, Reza Moheimani S O, Goodwin G C, Feuer A. Robust hybrid control incorporating over-saturation. *Systems & Control Letters*, 1999, **38**(3): 179−185

20 Hu T S, Lin Z L, Shamash Y. Semi-global stabilization with guaranteed regional performance of linear systems subject to actuator saturation. *Systems & Control Letters*, 2001, **43**(3): 203−210

21 Wredenhagen G F, Bélanger P R. Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints. *Automatica*, 1994, **30**(3): 403−416

22 Zhou Bin. Parametric Lyapunov Approach to the Design of Control Systems with Saturation Nonlinearity and Its Applications [Ph. D. dissertation], Harbin Institute of Technology, China, 2010
(周彬. 具有饱和非线性的控制系统设计的参量 Lyapunov 方法及其应用 [博士学位论文], 哈尔滨工业大学, 中国, 2010)

23 Lin Lai-Xing. *Space Rendezvous and Docking Technology*. Beijing: National Defence Industry Press, 1995
(林来兴. 空间交会对接技术. 北京: 国防工业出版社, 1995)

24 Wu Hong-Xin, Hu Hai-Xia, Xie Yong-Chun, Wang Ying. Several questions on autonomous rendezvous docking. *Journal of Astronautics*, 2003, **24**(2): 132−137, 143
(吴宏鑫, 胡海霞, 谢永春, 王颖. 自主交会对接若干问题. 宇航学报, 2003, **24**(2): 132−137, 143)

25 Lin Z L. *Low Gain Feedback*. London: Springer-Verlag, 1998. 354

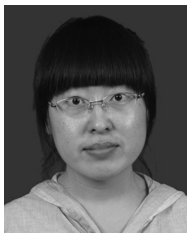
26 Zhou B, Duan G R, Lin Z L. A parametric Lyapunov equation approach to the design of low gain feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(6): 1548−1554

27 Hu T S, Lin Z L. On enlarging the basin of attraction for linear systems under saturated linear feedback. *Systems & Control Letters*, 2000, **40**(1): 59−69

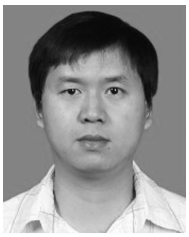
28 Zhou B, Duan G R. On analytical approximation of the maximal invariant ellipsoids for linear systems with bounded controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 346−353

29 Carter T E. State transition matrices for terminal rendezvous studies: brief survey and new example. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, **21**(1): 148−155

30 Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1960, **27**(9): 653−658



王 茜 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心博士研究生. 主要研究方向为约束控制, 非线性系统, 鲁棒控制.
E-mail: wq@hit.edu.cn
(**WANG Qian** Ph. D. candidate at the Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology. Her research interest covers constrained control, nonlinear system, and robust control.)



周 彬 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心教授. 2010 年于哈尔滨工业大学获得博士学位. 主要研究方向为约束控制, 时滞系统, 非线性系统以及鲁棒控制理论. 本文通信作者.
E-mail: binzhoulee@163.com
(**ZHOU Bin** Professor at the Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology. He received his Ph. D. degree from Harbin Institute of Technology in 2010. His research interest covers constrained control, time-delay systems, nonlinear system, and robust control. Corresponding author of this paper.)

段广仁 哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心教授, 长江学者. 主要研究方向为控制系统设计的参数化方法, 广义系统, 鲁棒控制, 容错控制.
E-mail: g.r.duan@hit.edu.cn
(**DUAN Guang-Ren** Professor at the Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology. He is Chang Jiang Scholar. His research interest covers parametric method for control system design, generalized system, robust control, and fault-tolerant control.)