一类非齐次高阶非线性系统的连续反馈控制设计

孙 丞 [1] 孙鹤旭 [1,2] 刁心薇 [1]

摘 要 研究了一类非齐次的高阶非线性系统的连续状态反馈控制设计问题. 通过定义一列适当的辅助函数, 放宽了对非线性项的约束条件. 利用传统的积分反推技术, 并增加一个积分项的方法, 得到了这类系统的稳定性, 给出了控制器的设计方法, 并通过一个例子验证了本文的理论结果.

关键词 连续状态反馈, 高阶非线性系统, 全局强稳定, 反推方法

引用格式 孙丞, 孙鹤旭, 刁心薇. 一类非齐次高阶非线性系统的连续反馈控制设计. 自动化学报, 2014, **40**(1): 149−155

DOI 10.3724/SP.J.1004.2014.00149

Continuous Feedback Control Design for a Class of Non-homogeneous High-order Nonlinear Systems

SUN Cheng[1] SUN He-Xu[1, 2] DIAO Xin-Wei[1]

Abstract This paper studies the design of continuous state feedback controllers for a class of non-homogeneous high order non-linear systems. We relex the restriction on non-linear term through defining a series of appropriate auxiliary functions. A systematic design method which combines integrator backstepping theory with the idea of adding a integral term is presented for globally stabilizing controllers of this class of systems. And we verify the theoretical results in the paper through an example.

Key words Continuous state feedback, high-order nonlinear systems, global strong stabilization, the backstepping approach

Citation Sun Cheng, Sun He-Xu, Diao Xin-Wei. Continuous feedback control design for a class of non-homogeneous high-order nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(1): 149−155

本文考虑一类如下形式的高阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = d_i(t)x_{i+1}^{p_i} + g_i(t, x_1, \cdots, x_{i+1}) \\ \dot{x}_n = d_n(t)u^{p_n} + g_n(t, x_1, \cdots, x_n, u) \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}$ 为系统状态和控制输入, 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, p_i 为奇的正整数, $g_i : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{i+1} \to \mathbf{R}$ 为连续函数, 且对 $\forall t \in \mathbf{R}$, 有 $g_i(t, 0, \cdots, 0) = 0$, $d_i(t)$ 为关于 t 的连续函数, 可以看作未知的时变参数.

收稿日期 2012-07-20 录用日期 2013-02-22
Manuscript received July 20, 2012; accepted February 22, 2013
国家自然科学基金 (61203142), 天津市自然科学基金 (11JCYBJC06500) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61203142) and Natural Science Foundation of Tianjin (11JCYBJC06500)
本文责任编委 刘允刚
Recommended by Associate Editor LIU Yun-Gang
1. 河北工业大学 天津 300401 2. 智能康复装置与检测技术教育部工程研究中心 天津 300130
1. Hebei University of Technology, Tianjin 300401 2. Engineering Research Center of Rehabilition Device and Detection Technology, Ministry of Education, Tianjin 300130

对于这种系统, 当 $p_i = 1$ 时, 系统 (1) 为具有严格反馈形式下的非线性系统, 可以利用反推设计方法[1] 进行处理[2−3]. 当 $p_i > 1$ 时, 由于其 Jacobian 线性化后, 特征根可能具有正实部, 从而原点不可控, 此时, 传统的反推方法就不适用了. 一个简单的例子就是 $\dot{x} = u^3 + x$, 在任何光滑反馈下都是不稳定的, 但是在连续反馈下可以稳定[4], 例如取 $u = -(2x)^{\frac{1}{3}}$. 目前常采用增加一个幂次积分的方法来考虑这种系统的连续反馈控制. 利用这一方法, 近十年来已经取得了丰硕的成果[5−7], Lin 等研究了控制系数 $d_i(t)$ 的下界为已知常数或光滑函数情况下的连续反馈的稳定和自适应问题[8−9], 随后的工作[10−13] 讨论了控制系数下界为未知常数或未知函数的情况, 文献 [14] 进一步讨论了具有零动态的高阶非线性系统.

目前已有的一些连续反馈控制的结果都要求非线性项满足 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) = 0$, 例如文献 [9] 中要求:

$$g_i(\cdot) = \sum_{j=0}^{p_i - 1} x_{i+1}^j a_{ij}(t, x_1, \cdots, x_i) \tag{2}$$

其中, $|a_{ij}(\cdot)| \le (|x_1| + \cdots + |x_i|)\gamma_{ij}(\cdot)$. 而当这个条件不满足时, 情况就很复杂, 其满足 $u(0) = 0$ 的连续的反馈控制器是不一定存在的. 例如对数量系统 $\dot{x} = u^3 + u^2 + x$ 和 $\dot{x} = u^3 + u + x$, 它们的非线性项分别为 $u^2 + x$ 和 $u + x$, 都不满足 $g(t, 0, u) = 0$, 对于第一个例子, 文献 [9] 证明了不存在满足 $u(0) = 0$ 的连续控制器使该系统渐近稳定. 而对第二个例子则存在, 例如取 u 满足 $u^3 + u = -2x$. 显然原有的增加幂次积分的方法不能直接用来处理这种 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) \ne 0$ 的情况.

本文在前面已有结果的基础上, 进一步研究了这种 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) \ne 0$ 的系统, 本文的主要贡献有以下几点:

1) 本文将目前已有的即 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) = 0$ 的结论推广到 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) \ne 0$ 的情况. 在一定条件下得到了这种情况下的连续反馈控制器的存在性及其设计方法.

2) 当 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) \ne 0$ 时, 从前面给出的两个简单例子可以看到, 其满足 $u(0) = 0$ 的连续的反馈控制器是不一定存在的. 本文给出了这种连续反馈控制器存在的一个充分条件.

3) 受文献 [9, 14] 等的设计方法启发, 本文通过引入一列适当的非齐次的辅助函数来处理这种非零的情况, 利用反推的思想, 将原有的增加一个幂次积分项的方法, 修改为增加一个关于辅助函数的积分项, 从而解决了这一问题, 这种处理方法也是本文的主要贡献之一.

1 问题的描述及预备知识

1.1 问题的描述

由式 (2), 记 $a_{ij}(t, 0, \cdots, 0) = c_{ij}(t)$, 若存在 $1 \le j \le p_i - 1$, 使得 $c_{ij}(t) \ne 0$, 则系统 (1) 的非线性项 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) \ne 0$. 取新的非线性函数:

$$f_i(t, x_1, \cdots, x_{i+1}) = \sum_{j=0}^{p_i - 1} x_{i+1}^j \left[a_{ij}(\cdot) - c_{ij}(t)\right]$$

先考虑仅在 $j = q_i > 1$ 为奇数时, $c_{ij}(t) \ne 0$ 的情况, 此时,

系统可以重新描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = d_i(t)x_{i+1}^{p_i} + c_i(t)x_{i+1}^{q_i} + f_i(\cdot) \\ \dot{x}_n = d_n(t)u^{p_n} + c_n(t)u^{q_n} + f_n(\cdot) \end{cases} \tag{3}$$

其中, $p_i > q_i > 1$ 均为奇的正整数, $f_i : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{i+1} \to \mathbf{R}$ 为连续函数, 且对 $\forall t \in \mathbf{R}$, 有 $f_i(t, 0, \cdots, 0) = 0$, $d_i(t)$, $c_i(t)$ 为关于 t 的连续函数. 为了讨论它的稳定问题, 做如下假设:

条件 1. 对 $i = 1, \cdots, n$, 存在正实数 λ_i 和 μ_i, 使得:

$$0 < \lambda_i < d_i(t), c_i(t) < \mu_i$$

条件 2. 对 $i = 1, \cdots, n$, 存在连续可微的函数 b_{ij}: $\mathbf{R}^i \to \mathbf{R}^+$, 满足 $b_{ij}(0, \cdots, 0) = 0$, 使得:

$$|f_i(t, x_1, \cdots, x_{i+1})| \le \sum_{j=0}^{p_i-1} |x_{i+1}|^j b_{ij}(x_1, \cdots, x_i)$$

其中, $x_{n+1} = u$.

注 1. 显然, 当 $c_i(t) \neq 0$ 时, 系统 (3) 的非线性项 $g_i(\cdot) = c_i(t)x_{i+1}^{q_i} + f_i(\cdot)$ 是不满足条件 2 的, 即对系统 (1) 的非线性项 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) \neq 0$. 而目前已有的一些连续反馈控制的结果如文献 [8−9, 11, 14], 均要求系统的非线性项满足条件 2, 即 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) = 0$.

注 2. 对于系统 (3), 由于 $d_i(t)x_{i+1}^{p_i} + c_i(t)x_{i+1}^{q_i}$ 是非齐次的, 所以即使在 q_i 为奇数的条件下, 增加幂次积分的方法[9] 也不适合处理这种系统. 下面的例子说明了这个问题.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2^5 + x_2^3 + x_1 \\ \dot{x_2} = u \end{cases}$$

按照增加幂次积分的方法, 取 $V = \frac{x_1^2}{2} + W$ 为 C^1 的, 其中, $W = \int_{x_2^*}^{x_2} \left(s^5 - x_2^{*5}\right)^{2-(1/5)} \mathrm{d}s$, 虚拟控制量 x_2^* 满足 x_2^{*5} 与 x_1 异号, 且 x_2^{*5} 对 x_1 连续可微, 则有:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + \left(x_2^5 - x_2^{*5}\right)^{2-\frac{1}{5}} u - \left(2 - \frac{1}{5}\right) \frac{\partial x_2^{*5}}{\partial x_1} \int_{x_2^*}^{x_2} \left(s^5 - x_2^{*5}\right)^{1-\frac{1}{5}} \mathrm{d}s\dot{x}_1$$

由 x_2^{*5} 与 x_1 异号, 故在 $x_1 = 0$ 处, $\frac{\partial x_2^{*5}}{\partial x_1} < 0$, 又 $\frac{\partial x_2^{*5}}{\partial x_1}$ 连续, 故存在 $x_1 = 0$ 的某个邻域 I 和常数 $M > 0$, 使得在 I 内有: $-M < \frac{\partial x_2^{*5}}{\partial x_1} < 0$, 记 $U_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in I, x_1 > 0, 2Mx_1 > x_2^5 > Mx_1\}$, 显然, 在 U_1 内 $x_2 > 0$, $x_1 > \frac{x_2^5}{2M}$. 对任意满足 $u(0, 0) = 0$ 的连续函数 $u(x_1, x_2)$, 显然存在 $(0, 0)$ 点的邻域 U_2, 使得 $\forall (x_1, x_2) \in U_2$, 有 $|u(x_1, x_2)| \le 1$. 则在 $U_1 \cap U_2$ 内, 由于 $\int_{x_2^*}^{x_2} \left(s^5 - x_2^{*5}\right)^{1-(1/5)} \mathrm{d}s \ge 0$, 容易得到:

$$-\left(2 - \frac{1}{5}\right) \frac{\partial x_2^{*5}}{\partial x_1} \int_{x_2^*}^{x_2} \left(s^5 - x_2^{*5}\right)^{1-\frac{1}{5}} \mathrm{d}s\dot{x}_1 \ge 0$$

注意到 $x_2^* < 0$, 故 $\left(x_2^5 - x_2^{*5}\right)^{2-(1/5)} > 0$, 从而

$$\dot{V} > x_1(x_2^5 + x_2^3) - \left(x_2^5 - x_2^{*5}\right)^{2-\frac{1}{5}}$$

由 $-M < \frac{\partial x_2^{*5}}{\partial x_1}$, 故 $Mx_1 > -x_2^{*5}$, 故 $x_2^5 > -x_2^{*5}$, 即

$$\dot{V} > \frac{x_2^5}{2M}(x_2^5 + x_2^3) - \left(2x_2^5\right)^{2-\frac{1}{5}} > \frac{1}{2M}x_2^8 - 4x_2^9$$

显然, 当 $x_2 < 1/(8M)$ 时, $\dot{V} > 0$. 实际上, 采用增加幂次积分的方法, 如果幂次大于 3, 则在 x_2 充分小时, 不能保证 $\dot{V} < 0$; 同样, 若幂次小于 5, 则在 x_2 充分大时, 不能保证 $\dot{V} < 0$. 所以该方法不能用来处理这种系统.

1.2 预备知识

考虑非自治系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(t, \boldsymbol{x}), \quad t \in \mathbf{R},\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \tag{4}$$

其中, $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是关于 $(t, \boldsymbol{x})$ 的连续函数, 且对任意 $t \in \mathbf{R}$, $f(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

定义 1[15]**.** 称式 (4) 的平凡解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 为全局强稳定的, 如果存在两个函数: $B : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 和 $T : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, 其中, B 是递增的, 且 $\lim_{s\to 0} B(s) = 0$, 使得对 $\forall \alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, 式 (4) 的所有定义在 $[0, t_1)$ 上的解 $\boldsymbol{x}(t)$, 其中, $0 < t_1 \le +\infty$, $\|\boldsymbol{x}(0)\| \le \alpha$, 都存在定义在 $[0, +\infty)$ 上的式 (4) 的解 $\boldsymbol{z}(t)$ 满足:

1) $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t)$, $t \in [0,\ t_1)$;

2) $\|\boldsymbol{z}(t)\| \le B(\alpha)$, $\forall t \ge 0$;

3) $\|\boldsymbol{z}(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \ge T(\alpha,\ \varepsilon)$.

本文把这种强稳定作为连续反馈控制器设计的基础, Kurzweil[15] 证明了 Lyapunov 第二定理作适当的修改后, 它对这种全局强稳定仍然可以成立, 即:

定理 1[15]**.** 若存在 C^1 函数 $V : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, 正定连续正则函数 $U_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, 和正定连续函数 $U_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 2, 3$, 满足: $U_1(\boldsymbol{x}) \le V(t, \boldsymbol{x}) \le U_2(\boldsymbol{x})$, $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} f(t, \boldsymbol{x}) \le -U_3(\boldsymbol{x})$, 则系统 (4) 的平凡解 $\boldsymbol{x} = 0$ 是全局强稳定的.

注 3[15]**.** 称非负函数 $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为正则 (Proper) 的, 若对 $\forall a > 0$, 都有集合 $V^{-1}([0, a])$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集.

引理 1[16]**.** 设 c, d 为正实数, $\gamma(x, y) > 0$ 为一个实值函数, 则有:

$$|x|^c |y|^d \le \frac{c}{c+d}\gamma(x, y) |x|^{c+d} + \frac{d}{c+d}\gamma^{-\frac{c}{d}}(x, y) |y|^{c+d}$$

定义 $\lambda = \min\{\lambda_i\}$, $\mu = \max\{\mu_i\}$, 由引理 1 及条件 2, 按照文献 [8−9] 的方法, 可以得到:

命题 1. 对 $\forall i = 1, \cdots, n$, 存在光滑函数 $\gamma_i(\cdot) \ge 0$, 使得:

$$|f_i(\cdot)| \le \frac{\lambda}{2} |x_{i+1}|^{p_i} + \sum_{l=1}^{i} |x_l|\, \gamma_i(\cdot)$$

然后, 引入辅助函数 $y_i(x) = y_{i-1}(x^{p_{i-1}} + x^{q_{i-1}})$, 其中 $y_1(x) = x$, 显然, 这样定义的函数 $y_i(x)$ 是单调增的, 故其反函数存在. 利用二项式定理, 易得 $y_i(x) = x^{p_1 \cdots p_{i-1}} + \cdots + x^{q_1 \cdots q_{i-1}}$, 注意到 $x \to 0$ 时, $x^l / y_k^{-1}(x) \to 0$, 其中, $l \ge 1$, 因此规定在可去间断点 $x = 0$ 处, $x^l / y_k^{-1}(x) = 0$. 显然 $x^l / y_k^{-1}(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调递增的. 对于这样定义的 $y_i(x)$ 及其反函数 $y_i^{-1}(x)$, 有如下命题:

命题 2. 对于任何实数 x_i, 有:

$$y_k^{-1}(|x_1| + \cdots + |x_m|) \le \sum_{i=1}^{m} y_k^{-1}(|x_i|)$$

$$2y_k^{-1}(|x_1 + x_2|) \ge \left|y_k^{-1}(x_1) + y_k^{-1}(x_2)\right|$$

命题 3. 当 $|x_1|\geq 1$ 时, 有:

$$y_k(|x_1x_2|)\geq |x_1|\,y_k(|x_2|)$$
$$y_k^{-1}(|x_1x_2|)\leq |x_1|\,y_k^{-1}(|x_2|)$$

命题 4. 对 $\forall x_1,\ x_2$, 有:

$$y_k(|x_1x_2|)\leq |y_k(x_1)y_k(x_2)|$$
$$y_k^{-1}(|x_1x_2|)\geq \left|y_k^{-1}(x_1)\,y_k^{-1}(x_2)\right|$$

命题 5. 设 l 为正整数, $\gamma(x_1,x_2)>0$ 为任意实值函数, 则存在实值函数 $\tau(x_1,x_2)>0$, $\phi(x_1,x_2)>0$, 使得:

$$\left|\frac{x_1^l}{y_k^{-1}(x_1)}\right|\left|y_k^{-1}(x_2)\right|\leq \gamma(\cdot)|x_1|^l+\tau(\cdot)|x_2|^l$$

$$\left|\frac{x_1^l}{y_k^{-1}(x_1)}\right|\left|y_k^{-1}(x_2)\right|\leq \phi(\cdot)|x_1|^l+\gamma(\cdot)|x_2|^l$$

证明. 由 $y_k(x)=x^{p_1\cdots p_{k-1}}+\cdots+x^{q_1\cdots q_{k-1}}$, 故存在正数 m_k, 当 $|x_1|\geq 1$ 时, 有 $|y_k(x_1)|\leq m_k|x_1|^{p_1\cdots p_{k-1}}$, 从而有 $|y_k^{-1}(x_1)|\geq \frac{1}{m_k}|x_1|^{\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}}$, 并且, 由 $|y_k(x)|\geq |x|^{p_1\cdots p_{k-1}}$, 有 $\left|y_k^{-1}(x)\right|\leq |x|^{\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}}$. 这样, 有:

$$\left|\frac{x_1^l}{y_k^{-1}(x_1)}\right||y_k^{-1}(x_2)|\leq m_k|x_1|^{l-\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}}|y_k^{-1}(x_2)|\leq m_k|x_1|^{l-\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}}|x_2|^{\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}}$$

由引理 1, 存在函数 $\tau_1(x_1,x_2)>0$, 使得:

$$\left|\frac{x_1^l}{y_k^{-1}(x_1)}\right|\left|y_k^{-1}(x_2)\right|\leq \gamma(\cdot)|x_1|^l+\tau_1(\cdot)|x_2|^l$$

同理, $|x_1|\leq 1$ 时, 存在函数 $\tau_2(x_1,x_2)>0$, 使得:

$$\left|\frac{x_1^l}{y_k^{-1}(x_1)}\right||y_k^{-1}(x_2)|\leq m_k|x_1|^{l-\frac{1}{q_1\cdots q_{k-1}}}|x_2|^{\frac{1}{q_1\cdots q_{k-1}}}\leq \gamma(\cdot)|x_1|^l+\tau_2(\cdot)|x_2|^l$$

取 $\tau(x_1,x_2)=\tau_1(x_1,x_2)+\tau_2(x_1,x_2)$ 即可得第一个不等式, 同理, 第二个不等式也成立. □

命题 6. 对任意的 $l\leq k$, 存在光滑函数 $\alpha_{kl}(x)>0$, 使得 $y_l^{-1}(|x|)\leq \alpha_{kl}(x)y_k^{-1}(|x|)$.

证明. $k=1$ 时显然成立, 不妨设 $k-1$ 时成立, 即当 $l\leq k-1$ 时, 存在光滑函数 $\alpha_{k-1,l}(x)>0$, 使得:

$$y_l^{-1}(|x|)\leq \alpha_{k-1,l}(x)y_{k-1}^{-1}(|x|)$$

成立, 则 k 时, 由 $y_k(\cdot)$ 的定义, 有:

$$y_{k-1}^{-1}(|x|)=\left(y_k^{-1}(|x|)\right)^{p_{k-1}}+\left(y_k^{-1}(|x|)\right)^{q_{k-1}}$$

由 $y_k^{-1}(|x|)\leq |x|^{\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}}$, 故存在光滑函数 $\psi_1(x)>0$ (例如, 取 $\psi_1(x)=1+x^2$), 使得:

$$\left(y_k^{-1}(|x|)\right)^{p_{k-1}-1}\leq |x|^{\frac{1}{p_1\cdots p_{k-2}}-\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}}<\psi_1(x)$$

同理, 存在光滑函数 $\psi_2(x)>0$, 使得:

$$\left(y_k^{-1}(|x|)\right)^{q_{k-1}-1}<\psi_2(x)$$

故

$$y_{k-1}^{-1}(|x|)\leq [\psi_1(x)+\psi_2(x)]\,y_k^{-1}(|x|)$$

取 $\alpha_{k,l}(x)=\alpha_{k-1,l}(x)\,[\psi_1(x)+\psi_2(x)]>0$, 即得 $l\leq k-1$ 成立, 而 $l=k$ 时显然成立, 即 k 时也成立. □

命题 7. 如下不等式成立:

$$\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}\,(y_k(x))'\leq \frac{y_k(x)}{x}$$
$$\left(\frac{x^2}{y_k^{-1}(x)}\right)'\leq\left(2-\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}\right)\frac{x}{y_k^{-1}(x)}$$
$$\left|\frac{x_1+x_2}{y_i^{-1}(x_1+x_2)}\right|\leq\left|\frac{x_1}{y_i^{-1}(x_1)}\right|+\left|\frac{x_2}{y_i^{-1}(x_2)}\right|$$

2　连续控制器的设计

下面的定理 2 是本文的主要结论, 它的证明过程同时给出了连续反馈控制器的设计方法.

定理 2. 对非线性系统 (3), 如果它满足条件 1 和 2, 则存在连续控制器 $u=u(\boldsymbol{x})$ 满足 $u(\mathbf{0})=0$, 使得式 (3) 的平凡解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是全局强稳定的.

证明.

步骤 1. 取 $V_1(x_1)=x_1^2/2$, 由命题 1 有:

$$\dot V_1(\cdot)\leq x_1d_1(t)x_2^{p_1}+x_1c_1(t)x_2^{q_1}+\frac{\lambda}{2}|x_1||x_2|^{p_1}+x_1^2\gamma_1(\cdot)$$

取虚拟控制器 x_2^*, 满足:

$$y_2(x_2^*)=-x_1\frac{2\,(n+\gamma_1(x_1))}{\lambda}=-x_1\beta_1(\cdot)$$

其中, $\beta_1(\cdot)>0$ 且光滑, 由 $x_1y_2(x_2^*)\leq 0$, 故 $x_1x_2^{*p_1}\leq 0$, $x_1x_2^{*q_1}\leq 0$, 由 $\frac{\lambda}{2}x_1y_2(x_2^*)=-nx_1^2-x_1^2\gamma_1(x_1)$, 容易得到:

$$\begin{aligned}\dot V_1(\cdot)\leq\ & x_1d_1(t)\left(x_2^{p_1}-x_2^{*p_1}\right)+x_1c_1(t)\left(x_2^{q_1}-x_2^{*q_1}\right)+\\ & x_1d_1(t)x_2^{*p_1}+x_1c_1(t)x_2^{*q_1}+\\ & \frac{\lambda}{2}|x_1|\,|x_2|^{p_1}-nx_1^2-\frac{\lambda}{2}x_1y_2(x_2^*)\leq\\ & -nx_1^2+|x_1|\mu(|x_2^{p_1}-x_2^{*p_1}|+|x_2^{q_1}-x_2^{*q_1}|)+\\ & \lambda x_1(x_2^{*p_1}+x_2^{*q_1})+\frac{\lambda}{2}|x_1|\,|x_2|^{p_1}-\frac{\lambda}{2}x_1y_2(x_2^*)=\\ & -nx_1^2+|x_1|\mu(|x_2^{p_1}-x_2^{*p_1}+x_2^{q_1}-x_2^{*q_1}|)+\\ & \frac{\lambda}{2}x_1y_2(x_2^*)+\frac{\lambda}{2}|x_1||y_2(x_2)|\leq\\ & -nx_1^2+c|x_1(x_2^{p_1}+x_2^{q_1}-x_2^{*p_1}-x_2^{*q_1})|\end{aligned}\tag{5}$$

其中, $c=\mu+\lambda/2$.

步骤 2. 利用递推的方法, 设在第 $k-1$ 步, 存在正定、正则, C^1 的 Lyapunov 函数 $V_{k-1}:\mathbf{R}^{k-1}\to\mathbf{R}$ 和一列 C^0 的虚拟控制器 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_k^*$, 定义如下:

$$\begin{aligned}&x_1^*=0, && \xi_1=x_1-x_1^*\\ &y_2(x_2^*)=-\xi_1\beta_1(\cdot), && \xi_2=y_2(x_2)-y_2(x_2^*)\\ &\quad\vdots && \quad\vdots\\ &y_k(x_k^*)=-\xi_{k-1}\beta_{k-1}(\cdot), && \xi_k=y_k(x_k)-y_k(x_k^*)\end{aligned}$$

其中, $\beta_i(x_1,\cdots,x_i)>0$ 且光滑, 使得:

$$\dot{V}_{k-1}(x_1,\cdots,x_{k-1})\le -(n-k+2)\sum_{l=1}^{k-1}\xi_l^2+ c\left|\frac{\xi_{k-1}^2}{y_{k-1}^{-1}(\xi_{k-1})}\left(x_k^{p_{k-1}}+x_k^{q_{k-1}}-x_k^{*p_{k-1}}-x_k^{*q_{k-1}}\right)\right| \tag{6}$$

定义 $V_k(x_1,\cdots,x_k)=V_{k-1}(\cdot)+W_k(x_1,\cdots,x_k)$, 其中 $W_k(\cdot)=\int_{x_k^*}^{x_k}\frac{\left(y_k(s)-y_k(x_k^*)\right)^2}{y_k^{-1}\left(y_k(s)-y_k(x_k^*)\right)}\mathrm{d}s$. 显然, 这样定义的 V_k 是 C^1 的, 且有:

$$\frac{\partial W_k}{\partial x_k}=\frac{\left(y_k(x_k)-y_k(x_k^*)\right)^2}{y_k^{-1}\left(y_k(x_k)-y_k(x_k^*)\right)}=\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(\xi_k)}$$

$$\frac{\partial W_k}{\partial x_l}=-\frac{\partial y_k(x_k^*)}{\partial x_l}\int_{x_k^*}^{x_k}\frac{\partial\left[\frac{\left(y_k(s)-y_k(x_k^*)\right)^2}{y_k^{-1}\left(y_k(s)-y_k(x_k^*)\right)}\right]}{\partial\left(y_k(s)-y_k(x_k^*)\right)}\mathrm{d}s$$

其中, $l<k$.

由 x_k^* 的定义有, 当 $x_1,\cdots,x_{k-1}$ 均为零时, $x_k^*=0$, 故 $W_k(0,\cdots,0)=0$. 由 $y_k^{-1}(|x|)\le|x|^{\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}}$, 从而, 当 $x_k\ge x_k^*$ 时有:

$$\begin{aligned}W_k\ge&\int_{x_k^*}^{x_k}\left(y_k(s)-y_k(x_k^*)\right)^{2-\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}}\mathrm{d}s\ge\\&\int_{x_k^*}^{x_k}\left(s^{p_1\cdots p_{k-1}}-x_k^{*p_1\cdots p_{k-1}}\right)^{2-\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}}\mathrm{d}s\ge\\&\int_{x_k^*}^{x_k}2^{-p_1\cdots p_{k-1}+1}\left(s-x_k^*\right)^{2p_1\cdots p_{k-1}-1}\mathrm{d}s=\\&m(x_k-x_k^*)^{2p_1\cdots p_{k-1}}\end{aligned}$$

其中, $m>0$ 为常数, 显然, 在 $x_k\le x_k^*$ 时, 上式也成立, 从而有:

$$V_k\ge V_{k-1}+m(x_k-x_k^*)^{2p_1\cdots p_{k-1}}$$

这样, 由 V_{k-1} 正定且正则, 有 V_k 正定且正则.

在第 k 步时, 有:

$$\begin{aligned}\dot{V}_k(\cdot)\le&-(n-k+2)\sum_{l=1}^{k-1}\xi_l^2+\\&c\left|\frac{\xi_{k-1}^2}{y_{k-1}^{-1}(\xi_{k-1})}\left(x_k^{p_{k-1}}+x_k^{q_{k-1}}-x_k^{*p_{k-1}}-x_k^{*q_{k-1}}\right)\right|+\\&\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(\xi_k)}\left(d_k(t)x_{k+1}^{p_k}+c_k(t)x_{k+1}^{q_k}\right)+\\&\left|\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(\xi_k)}f_k(t,x_1,\cdots,x_{k+1})\right|+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\partial W_k(\cdot)}{\partial x_l}\dot{x}_l\end{aligned} \tag{7}$$

下面对式 (7) 进行估计, 首先, 由命题 2,

$$\begin{aligned}&|x_k^{p_{k-1}}+x_k^{q_{k-1}}-x_k^{*p_{k-1}}-x_k^{*q_{k-1}}|=\\&\quad|y_{k-1}^{-1}\left(y_k(x_k)\right)-y_{k-1}^{-1}\left(y_k(x_k^*)\right)|\le\\&\quad2y_{k-1}^{-1}\left(|y_k(x_k)-y_k(x_k^*)|\right)=2y_{k-1}^{-1}|\xi_k|\end{aligned}$$

由命题 5, 容易得到: 存在常数 $c_k>0$, 使得:

$$c\left|\frac{\xi_{k-1}^2}{y_{k-1}^{-1}(\xi_{k-1})}\left(x_k^{p_{k-1}}+x_k^{q_{k-1}}-x_k^{*p_{k-1}}-x_k^{*q_{k-1}}\right)\right|\le\frac{1}{3}\xi_{k-1}^2+c_k\xi_k^2 \tag{8}$$

由 $y_l(x_l^*)$ 和 ξ_l 的定义容易得到 $|x_l|=y_l^{-1}\left(|\xi_l+y_l(x_l^*)|\right)$, 由命题 2 和 3 及 $y_l^{-1}(\cdot)$ 的单调性, 当 $2\le l\le k$ 时,

$$\begin{aligned}|x_l|\le&\,y_l^{-1}\left(|\xi_l|\right)+y_l^{-1}\left[y_l\left(\left|x_l^*\right|\right)\right]=\\&\,y_l^{-1}\left(|\xi_l|\right)+y_l^{-1}\left(|\xi_{l-1}\beta_{l-1}(\cdot)|\right)\le\\&\,y_l^{-1}\left(|\xi_l|\right)+\left(1+\beta_{l-1}(\cdot)\right)y_l^{-1}\left(|\xi_{l-1}|\right)\end{aligned}$$

而 $|x_1|=y_1^{-1}(|\xi_1|)$, 这样, 由 $\beta_i(\cdot)$ 光滑性和命题 6, 容易得到, 存在光滑函数 $\hat{\rho}_k(x_1,\cdots,x_k)>0$, 使得:

$$\sum_{l=1}^{k}|x_l|\le\sum_{l=1}^{k}y_k^{-1}\left(|\xi_l|\right)\hat{\rho}_k(x_1,\cdots,x_k) \tag{9}$$

从而, 由命题 1 和 5, 存在光滑函数 $\rho_k(x_1,\cdots,x_k)\ge0$, 使得:

$$\left|\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(\xi_k)}f_k(\cdot)\right|\le\frac{\lambda}{2}\left|\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(\xi_k)}x_{k+1}\right|^{p_k}+\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{k-1}\xi_l^2+\xi_k^2\rho_k(\cdot) \tag{10}$$

最后, 对于式 (7) 的最后一项, 由式 (9) 知:

$$|f_l(\cdot)|\le\frac{\lambda}{2}|x_{l+1}|^{p_l}+\sum_{j=1}^{l}y_l^{-1}\left(|\xi_j|\right)\hat{\rho}_l(\cdot)\gamma_l(\cdot)$$

从而 $|\dot{x}_l|\le c\left|x_{l+1}^{p_l}+x_{l+1}^{q_l}\right|+\sum_{j=1}^{l}y_l^{-1}\left(|\xi_j|\right)\hat{\rho}_l(\cdot)\gamma_l(\cdot)$, 其中,

$$\begin{aligned}\left|x_{l+1}^{p_l}+x_{l+1}^{q_l}\right|=&\left|y_l^{-1}\left[y_{l+1}(x_{l+1})\right]\right|\le\\&\,y_l^{-1}\left(|\xi_{l+1}|\right)+y_l^{-1}\left(\left|y_{l+1}(x_{l+1}^*)\right|\right)\le\\&\,y_l^{-1}\left(|\xi_{l+1}|\right)+y_l^{-1}\left(|\xi_l|\right)\left(1+\beta_l(\cdot)\right)\end{aligned}$$

故存在光滑函数 $C_l(\cdot)>0$, 使得:

$$|\dot{x}_l|\le\sum_{j=1}^{l+1}y_l^{-1}\left(|\xi_j|\right)\,C_l(\cdot) \tag{11}$$

由命题 7 和 $x/y_k^{-1}(x)$ 的单调性, 容易得到:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial W_k}{\partial x_l}\right|\le&\left|2-\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}\right|\left|\frac{\partial y_k(x_k^*)}{\partial x_l}\right|\times\\&\left|\frac{y_k(x_k)-y_k(x_k^*)}{y_k^{-1}\left(y_k(x_k)-y_k(x_k^*)\right)}\right|\left|x_k-x_k^*\right|\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\left|x_k-x_k^*\right|=&\left|y_k^{-1}\left(y_k(x_k)\right)-y_k^{-1}\left(y_k(x_k^*)\right)\right|\le\\&2y_k^{-1}\left(\left|y_k(x_k)-y_k(x_k^*)\right|\right)=2y_k^{-1}\left(|\xi_k|\right)\end{aligned}$$

记 $a_k=2\left|2-\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}\right|$, 由 $\xi_k=y_k(x_k)-y_k(x_k^*)$, 故:

$$\left|\frac{\partial W_k}{\partial x_l}\right|\le a_k\left|\frac{\partial y_k(x_k^*)}{\partial x_l}\right||\xi_k| \tag{12}$$

而对于上式中的 $\left|\frac{\partial y_k(x_k^*)}{\partial x_l}\right|$, 容易有: 存在光滑函数 $\varphi_{kl}(\cdot)\ge0$, 使得:

$$\left|\frac{\partial y_k(x_k^*)}{\partial x_l}\right|\le\sum_{i=1}^{k-1}\left|\frac{\xi_i}{y_l^{-1}(\xi_i)}\right|\varphi_{kl}(\cdot) \tag{13}$$

当 $k=2$ 时, 由 $y_2(x_2^*)=-x_1\beta_1(\cdot)$, 显然式 (13) 成立.

设 $k-1$ 时成立, 即存在光滑函数 $\varphi_{k-1,l}(\cdot)\geq 0$, 使得:

$$\left|\frac{\partial y_{k-1}(x_{k-1}^*)}{\partial x_l}\right|\leq\sum_{i=1}^{k-2}\left|\frac{\xi_i}{y_l^{-1}(\xi_i)}\right|\varphi_{k-1,l}(\cdot)$$

则 k 时:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial y_k(x_k^*)}{\partial x_l}\right|\leq&\left|\frac{\partial\xi_{k-1}}{\partial x_l}\right|\beta_{k-1}(\cdot)+\left|\xi_{k-1}\frac{\partial\beta_{k-1}(\cdot)}{\partial x_l}\right|\leq\\&\left[\left|\frac{\partial y_{k-1}(x_{k-1})}{\partial x_l}\right|+\left|\frac{\partial y_{k-1}(x_{k-1}^*)}{\partial x_l}\right|\right]\beta_{k-1}(\cdot)+\\&\left|\xi_{k-1}\frac{\partial\beta_{k-1}(\cdot)}{\partial x_l}\right|\end{aligned}$$

当 $l=1,\cdots,k-2$ 时, $\left|\frac{\partial y_{k-1}(x_{k-1})}{\partial x_l}\right|=0$, 故:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial y_k(x_k^*)}{\partial x_l}\right|\leq&\left|\xi_{k-1}\frac{\partial\beta_{k-1}(\cdot)}{\partial x_l}\right|+\left|\frac{\partial y_{k-1}(x_{k-1}^*)}{\partial x_l}\right|\beta_{k-1}(\cdot)\leq\\&\left|\xi_{k-1}\frac{\partial\beta_{k-1}(\cdot)}{\partial x_l}\right|+\sum_{i=1}^{k-2}\left|\frac{\xi_i}{y_l^{-1}(\xi_i)}\right|\varphi_{k-1,l}(\cdot)\beta_{k-1}(\cdot)\end{aligned}$$

显然, 存在光滑 $\varphi_{kl}(\cdot)\geq 0$ 使得式 (13) 成立.

当 $l=k-1$ 时, $\left|\frac{\partial y_{k-1}(x_{k-1}^*)}{\partial x_l}\right|=0$, 故:

$$\left|\frac{\partial y_k(x_k^*)}{\partial x_{k-1}}\right|\leq\left|\xi_{k-1}\frac{\partial\beta_{k-1}(\cdot)}{\partial x_{k-1}}\right|+\left|\frac{\partial y_{k-1}(x_{k-1})}{\partial x_{k-1}}\right|\beta_{k-1}(\cdot)$$

由命题 7,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1\cdots p_{k-1}}\left|\frac{\partial y_{k-1}(x_{k-1})}{\partial x_{k-1}}\right|\leq&\left|\frac{\xi_{k-1}+y_{k-1}(x_{k-1}^*)}{y_{k-1}^{-1}\left(\xi_{k-1}+y_{k-1}(x_{k-1}^*)\right)}\right|\leq\\&\frac{|\xi_{k-1}|}{y_{k-1}^{-1}\left(|\xi_{k-1}|\right)}+\frac{\left|y_{k-1}(x_{k-1}^*)\right|}{y_{k-1}^{-1}\left(\left|y_{k-1}(x_{k-1}^*)\right|\right)}\end{aligned}$$

又由 $x/y_i^{-1}(x)$, $y_i^{-1}(x)$ 的单调性, 有:

$$\begin{aligned}\frac{|\xi_{k-2}\beta_{k-2}(\cdot)|}{y_{k-1}^{-1}\left(|\xi_{k-2}\beta_{k-2}(\cdot)|\right)}\leq&\frac{|\xi_{k-2}\left(1+\beta_{k-2}(\cdot)\right)|}{y_{k-1}^{-1}\left(|\xi_{k-2}\left(1+\beta_{k-2}(\cdot)\right)|\right)}\leq\\&\frac{|\xi_{k-2}\left(1+\beta_{k-2}(\cdot)\right)|}{y_{k-1}^{-1}\left(|\xi_{k-2}|\right)}=\\&\frac{|\xi_{k-2}|}{y_{k-1}^{-1}\left(|\xi_{k-2}|\right)}\left(1+\beta_{k-2}(\cdot)\right)\end{aligned}$$

从而:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial y_k(x_k^*)}{\partial x_{k-1}}\right|\leq&\left|\xi_{k-1}\frac{\partial\beta_{k-1}(\cdot)}{\partial x_{k-1}}\right|+\left(\frac{|\xi_{k-1}|}{y_{k-1}^{-1}\left(|\xi_{k-1}|\right)}+\right.\\&\left.\frac{|\xi_{k-2}|}{y_{k-1}^{-1}\left(|\xi_{k-2}|\right)}\left(1+\beta_{k-2}(\cdot)\right)\right)p_1\cdots p_{k-1}\beta_{k-1}(\cdot)\end{aligned}$$

故存在光滑函数 $\varphi_{k,k-1}(\cdot)\geq 0$, 使得式 (13) 成立.

这样, 由式 (11) ∼ (13), 可以得到:

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{k-1}\left|\frac{\partial W_k(\cdot)}{\partial x_l}\dot{x}_l\right|\leq&\sum_{l=1}^{k-1}\left[a_k\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{|\xi_i|}{\left|y_l^{-1}(\xi_i)\right|}\varphi_{kl}(\cdot)\right)\times\right.\\&\left.|\xi_k|\left(\sum_{j=1}^{l+1}y_l^{-1}\left(|\xi_j|\right)\,C_l(\cdot)\right)\right]\end{aligned}$$

故由引理 1 和命题 5, 存在光滑函数 $\varphi_k(x_1,\cdots,x_k)\geq 0$, 使得:

$$\sum_{l=1}^{k-1}\left|\frac{\partial W_k(\cdot)}{\partial x_l}\dot{x}_l\right|\leq\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{k-1}\xi_l^2+\xi_k^2\varphi_k(x_1,\cdots,x_k)\tag{14}$$

将式 (8)、(10) 和 (14) 代入式 (7), 可以得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}_k(\cdot)\leq&-(n-k+1)\sum_{l=1}^{k}\xi_l^2+\frac{\lambda}{2}\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(|\xi_k|)}|x_{k+1}|^{p_k}+\\&\xi_k^2\left[(n-k+1)+c_k+\varphi_k(\cdot)+\rho_k(\cdot)\right]+\\&\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(\xi_k)}\left(d_k(t)x_{k+1}^{p_k}+c_k(t)x_{k+1}^{q_k}\right)\end{aligned}$$

取 $\beta_k(\cdot)=y_k\left[\frac{2}{\lambda}\left[(n-k+1)+c_k+\varphi_k(\cdot)+\rho_k(\cdot)\right]\right]$, $x_{k+1}^*=-y_{k+1}^{-1}\left(\xi_k\beta_k(\cdot)\right)$, 显然这样取的 x_{k+1}^* 为 C^0 的, $\beta_k(\cdot)>0$ 且光滑. 由命题 4:

$$\begin{aligned}\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(\xi_k)}\left(x_{k+1}^{*p_k}+x_{k+1}^{*q_k}\right)=&-\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(|\xi_k|)}y_k^{-1}\left(|\xi_k|\,\beta_k(\cdot)\right)\leq\\&-\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(|\xi_k|)}y_k^{-1}\left(|\xi_k|\right)y_k^{-1}\left(\beta_k(\cdot)\right)=\\&-\xi_k^2y_k^{-1}\left(\beta_k(\cdot)\right)\leq 0\end{aligned}$$

按照式 (5) 的方法, 有:

$$\begin{aligned}&\xi_k^2\left[(n-k+1)+c_k+\varphi_k(\cdot)+\rho_k(\cdot)\right]+\frac{\lambda}{2}\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(|\xi_k|)}|x_{k+1}|^{p_k}+\\&\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(\xi_k)}\left(d_k(t)x_{k+1}^{p_k}+c_k(t)x_{k+1}^{q_k}\right)\leq\\&c\left|\frac{\xi_k^2}{y_k^{-1}(\xi_k)}\left(x_{k+1}^{p_k}+x_{k+1}^{q_k}-x_{k+1}^{*p_k}-x_{k+1}^{*q_k}\right)\right|\end{aligned}$$

即在第 k 步时, 也有式 (6) 成立, 这样, 第 n 步时可得:

$$\begin{aligned}\dot{V}_n\leq&-\sum_{l=1}^{n}\xi_l^2+\\&c\left|\frac{\xi_n^2}{y_n^{-1}(\xi_n)}\left(x_{n+1}^{p_n}+x_{n+1}^{q_n}-x_{n+1}^{*p_n}-x_{n+1}^{*q_n}\right)\right|\end{aligned}$$

若取输入 $u=x_{n+1}=x_{n+1}^*$, 则有 $\dot{V}_n\leq-\sum_{l=1}^{n}\xi_l^2$. 由定理 1, 可得定理 2 成立. □

3　推广

一般的, 定理 2 的结果可以做如下推广: 对于系统

$$\begin{cases}\dot{x}_i=d_i(\boldsymbol{x},u,t)x_{i+1}^{p_i}+\sum\limits_{j=1}^{l_i}c_{ij}(\boldsymbol{x},u,t)x_{i+1}^{q_{ij}}+\\\qquad f_i(t,x_1,\cdots,x_{i+1})\\\dot{x}_n=d_n(\boldsymbol{x},u,t)u^{p_n}+\sum\limits_{j=1}^{l_n}c_{nj}(\boldsymbol{x},u,t)u^{q_{nj}}+\\\qquad f_n(t,x_1,\cdots,x_n,u)\end{cases}\tag{15}$$

其中, p_i, $q_{ij}\in\{\frac{p}{q}|p$ 和 q 为正奇数$\}$, 且 $1<q_{i1}<q_{i2}<\cdots<q_{il_i}<p_i$, 函数 $f_i(\cdot)$ 连续, $d_i(\boldsymbol{x},u,t)$ 与 $c_{ij}(\boldsymbol{x},u,t)$ 为连续函数, 并且满足:

条件 3. 对于所有的 $i = 1, \cdots, n$, 都存在光滑函数 $\lambda_i(x_1, \cdots, x_i)$ 和 $\mu_i(x_1, \cdots, x_i)$, 使得: $0 < \lambda_i(\cdot) < d_i(\cdot), c_{ij}(\cdot) < \mu_i(\cdot)$, 或者 $c_{ij}(\cdot) \equiv 0$.

条件 4. 对所有的 $i = 1, \cdots, n$, 都存在连续可微函数 $b_{ij} : \mathbf{R}^i \to \mathbf{R}^+$, 满足 $b_{ij}(0, \cdots, 0) = 0$, 使得:

$$|f_i(t, x_1, \cdots, x_{i+1})| \leq \sum_{j=0}^{l_i} |x_{i+1}|^{q_{ij}} b_{ij}(x_1, \cdots, x_i)$$

其中, $q_{i,0} = 0$, $x_{n+1} = u$.

取 $y_1(x) = x$, $y_{i+1}(x) = y_i(x^{p_i} + \sum_{j=1}^{l_i} \varepsilon_{ij} x^{q_{ij}})$, 其中, 当 $c_{ij}(\cdot) \neq 0$ 时, $\varepsilon_{ij} = 1$, $c_{ij}(\cdot) \equiv 0$ 时, $\varepsilon_{ij} = 0$, 注意到定理 2 证明中用到的命题对这样的 $y_i(\cdot)$ 仍然成立, 利用前面的递推方法, 容易得到如下结论:

定理 3. 对非线性系统 (15), 若满足条件 3 和条件 4, 则存在连续控制器 $u = u(\boldsymbol{x})$ 满足 $u(\mathbf{0}) = 0$, 使得式 (15) 的平凡解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 是全局强稳定的.

注 4. 对高阶非线性系统 (1), 当 $(x_1, \cdots, x_i)$ 为零时, 若非线性项满足条件 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) = 0$, 则方程右端为关于 x_{i+1} 的齐次函数 $d_i x_{i+1}^{p_i}$, 这种情况下, 增加幂次积分的方法是非常有效的; 但是, 若非线性项满足 $g_i(t, 0, \cdots, 0, x_{i+1}) \neq 0$, 则方程右端为关于 x_{i+1} 的非齐次函数 $d_i x_{i+1}^{p_i} + c_i x_{i+1}^{q_i}$, 增加幂次积分的方法就不适用了, 本文巧妙地构造了一列辅助函数来处理这种非齐次的情况, 通过增加关于这些辅助函数积分项的方法, 得到了这种非齐次情况的结果. 容易看到, 当所有的 $c_{ij}(\cdot) \equiv 0$ 时, $y_i(x) = x^{p_1 \cdots p_{i-1}}$, 因此, 文献 [9] 中增加幂次积分的方法和结果, 都可以归结为本文的一个特例.

4 一个简单的仿真算例

考虑如下模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (5 + \sin x_1) x_2^{\frac{7}{3}} + 4 x_2^{\frac{5}{3}} + x_1 x_2 + x_1 \\ \dot{x}_2 = (5 + \cos x_2) u^{\frac{9}{5}} + 4 u^{\frac{7}{5}} + x_1 u \end{cases} \tag{16}$$

它满足条件 3 和条件 4, 取辅助函数

$$y_2(x) = x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{5}{3}}, \qquad y_3(x) = y_2(x^{\frac{9}{5}} + x^{\frac{7}{5}})$$

按本文的方法, 取 $\gamma_1(\cdot) = 1.97 + x_1^2/34$, 虚拟控制量 x_2^* 满足:

$$y_2(x_2^*) = -\frac{1}{2} x_1 (2 + \gamma_1(x_1))$$

取 $u = -y_3^{-1}[\xi_2 \beta_2(\cdot)]$, 其中, $\xi_2 = y(x_2) - y(x_2^*)$,

$$\beta_2(\cdot) = y_2 \left\{ \frac{1}{2} \left[49 + \frac{1}{4}(1 + x_1^2)^3 + 8 \left(\frac{33}{7} \gamma_1 - 3 \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{33}{7} \gamma_1 - 3 \right)^2 (8 + 5\gamma_1)^2 \right] \right\}$$

图 1 和图 2 给出了初值为 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ 时, 系统的运动.

从仿真的结果来看, 按照定理 2 给出的设计方法, 对系统 (16), 其状态 x_1, x_2 和控制输入 u 均趋向于 0, 从而验证了本文的理论结果.

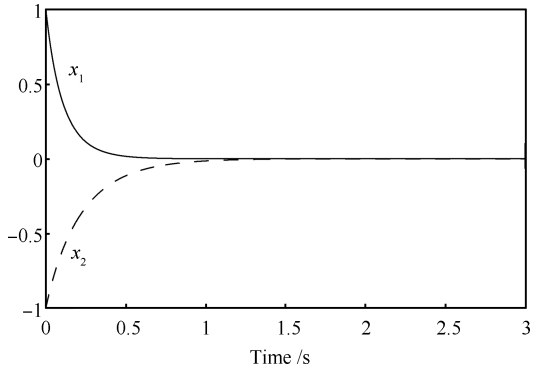

图 1 系统 (16) 的状态轨迹

Fig. 1 State trajectories of the system (16)

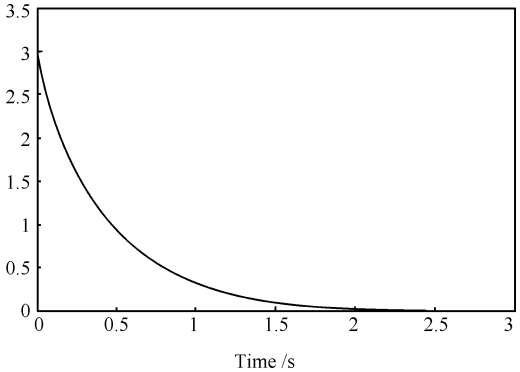

图 2 系统 (16) 的控制输入

Fig. 2 Control input of the system (16)

5 结论

本文在传统的反推控制设计方法基础上, 引入一列辅助函数, 通过增加一个关于辅助函数的积分项的方法, 给出了带有非齐次特性的非线性系统 (3) 的连续状态反馈全局强稳定控制器的设计方法, 并推广到式 (15) 的情况, 最后, 通过一个简单的例子, 验证了文章中的理论结果.

References

1 Krstić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: John Wiley and Sons, 1995. 29−32

2 Liu Y G, Pan Z G, Shi S J. Output feedback control design for strict-feedback stochastic nonlinear systems under a risk-sensitive cost. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(3): 509−513

3 Liu Y G, Zhang J F. Minimal-order observer and output-feedback stabilization control design of stochastic nonlinear systems. *Science in China Series F Information Sciences*, 2004, **47**(4): 527−544

4 Sontag E D. Feedback stabilization of nonlinear systems. *Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control*. Boston: Birkhäuser, 1990. 61−81

5 Xie X J, Tian J. Adaptive state-feedback stabilization of high-order stochastic systems with nonlinear parameterization. *Automatica*, 2009, **45**(1): 126−133

6 Sun Z Y, Liu Y G. Adaptive stabilisation for a large class of high-order uncertain non-linear systems. *International Journal of Control*, 2009, **82**(7): 1275−1287

7 Sun Z Y, Liu Y G, Xie X J. Global stabilization for a class of high-order time-delay nonlinear systems. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2011, **7**(12): 7119−7130

8 Lin W, Qian C J. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: a nonsmooth feedback framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(5): 757−774

9 Qian C J, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(7): 1061−1079

10 Sun Z Y, Liu Y G. Adaptive state-feedback stabilization for a class of high-order nonlinear uncertain systems. *Automatica*, 2007, **43**(10): 1772−1783

11 Zhang J, Liu Y G. A new approach to adaptive control design without overparametrization for a class of uncertain nonlinear systems. *Science China (Series E): Information Sciences*, 2011, **54**(7): 1419−1429

12 Sun Z, Liu Y. Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(8): 984−988

13 Sun Zong-Yao, Liu Yun-Gang. Stabilizing control design for a class of high-order nonlinear systems with unknown but identical control coefficients. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(3): 331−334
(孙宗耀, 刘允刚. 一类控制系数未知但等同高阶非线性系统的稳定控制设计. 自动化学报, 2007, **33**(3): 331−334)

14 Sun Zong-Yao, Sun Wei, Liu Zhen-Guo. Adaptive control design of high-order nonlinear systems with unknown control coefficients and zero dynamics. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(6): 1025−1032
(孙宗耀, 孙伟, 刘振国. 有未知控制系数和零动态的高阶非线性系统的自适应控制设计. 自动化学报, 2012, **38**(6): 1025−1032)

15 Kurzweil J. On the inversion of Lyapunov′s second theorem on stability of motion. *American Mathematical Society Translations*, 1956, **24**: 19−77

16 Qian C J, Lin W. Non-Lipschitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization. *System and Control Letters*, 2001, **42**(3): 185−200

孙 丞 河北工业大学控制科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为非线性控制. E-mail: sunchtz@hebut.edu.cn
(**SUN Cheng** Ph. D. candidate at the School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology. His main research interest is nonlinear control.)

孙鹤旭 河北工业大学控制科学与工程学院教授. 主要研究方向为现代电力传动与网络控制. 本文通信作者. E-mail: hxsun@hebut.edu.cn
(**SUN He-Xu** Professor at the School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology. His research interest covers modern electric drive and network control. Corresponding author of this paper.)

刁心薇 河北工业大学理学院讲师. 主要研究方向为非线性控制.
E-mail: xinweidiao@hebut.edu.cn
(**DIAO Xin-Wei** Lecturer at the School of Science, Hebei University of Technology. Her main research interest is nonlinear control.)