

# 多变量非线性系统的变阶采样迭代学习控制

孙明轩<sup>1</sup> 李芝乐<sup>1</sup> 朱胜<sup>2</sup>

**摘要** 针对存在初态误差的情形, 提出多变量非线性系统的变阶采样迭代学习控制方法. 相对固定阶迭代学习算法, 变阶算法可有效降低跟踪误差. 对变阶采样迭代学习算法进行了收敛性分析, 推导出收敛充分条件. 给出了变阶学习的两种实现策略—DD (Direct division) 和 DIP (Division in phases) 策略. 数值仿真表明, 基于 DIP 策略的变阶采样迭代学习算法在获得较高的控制精度的同时, 具有较快的收敛速度.

**关键词** 多变量系统, 采样系统, 初始修正作用, 变阶迭代学习控制

**引用格式** 孙明轩, 李芝乐, 朱胜. 多变量非线性系统的变阶采样迭代学习控制. 自动化学报, 2013, 39(7): 1027–1036

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.01027

## Varying-Order Sampled-Data Iterative Learning Control for MIMO Nonlinear Systems

SUN Ming-Xuan<sup>1</sup> LI Zhi-Le<sup>1</sup> ZHU Sheng<sup>2</sup>

**Abstract** In this paper, the problem of sampled-data iterative learning control is addressed for a class of nonlinear MIMO systems in the presence of perturbed initial conditions. In contrast to the fixed-order learning algorithms, a varying-order learning algorithm is proposed, for enhancing tracking performance against repositioning errors. Sufficient convergence conditions of the proposed varying-order learning algorithm are given, by which the learning gain can be chosen. The proposed learning algorithm is shown to be a unified one, because it is applicable to the systems with arbitrary but well-defined relative degree. Two implementation schemes, sampled-data direct division (DD) and division in phases (DIP) schemes, are presented, and numerical results are given to demonstrate effectiveness of the proposed schemes.

**Key words** MIMO systems, sampled-data systems, initial rectifying action, varying-order iterative learning control

**Citation** Sun Ming-Xuan, Li Zhi-Le, Zhu Sheng. Varying-order sampled-data iterative learning control for MIMO nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(7): 1027–1036

实际中存在大量有限区间上重复作业的动态系统. 例如, 装配线上的工业机器人、间歇化工过程; 周期作业也可以看作是这样的系统, 如逆变器、旋转电机等. 迭代学习控制是解决这类系统跟踪控制问题的适用技术<sup>[1]</sup>. 这种控制技术的主要特点是控制器设计简单, 无需被控对象的精确数学模型. 它利用跟踪误差不断修正控制输入, 经过有限次迭代, 使得系统输出以事先给定的精度要求收敛于期望轨迹<sup>[2–8]</sup>.

尽管实际动态系统往往是连续时间的, 但连续

学习控制算法却是无法严格实现的, 因为实现连续学习算法的存储器容量须是无限的. 这促使人们发展采样迭代学习控制技术. 文献 [9] 讨论机器人系统的采样迭代学习控制, 给出的学习算法收敛性条件要求采样周期取得足够小. 文献 [10] 推导出了非线性系统采样迭代学习控制算法的收敛性条件, 证明同样的学习算法可用于零输入输出耦合矩阵的系统. 文献 [11] 研究含控制时滞的线性系统, 证明采样学习算法能够处理不确定时滞. 文献 [12] 给出了采样迭代学习控制的一种分析方式: 给定期望轨迹在采样点上的取值, 构成一期望输出序列, 假设该序列可由唯一的期望控制序列实现; 在此假设下, 设计的采样学习控制器可以做到在初始状态误差为零的条件下, 系统输出在采样点上完全收敛于期望输出序列. 这一分析方式与文献 [10] 是不同的. 文献 [10] 给出的收敛性结果即使在采样点上也不能保证零误差收敛, 除非采样周期趋于零. 另外, 文献 [12] 讨论的是任意相对阶系统, 它表明所提出的学习算法是一种统一的算法, 适于任意相对阶系统.

收稿日期 2011-11-14 录用日期 2012-10-25  
Manuscript received November 14, 2011; accepted October 25, 2012

国家自然科学基金 (61174034, 60874041), 浙江省自然科学基金 (LQ12F03005) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61174034, 60874041) and Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (LQ12F03005)

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023 2. 浙江大学城市学院 杭州 310015

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023 2. City College, Zhejiang University, Hangzhou 310015

由于迭代学习控制系统本身的迭代运行特点,分析初始误差及干扰对系统稳定性、收敛性的影响是十分重要的<sup>[13]</sup>. 为达到对期望轨迹的完全跟踪,在每次迭代时,往往要求系统的初始状态与期望轨迹的初始状态相等. 但在工程实现时,系统初态往往不能被精确定位到期望轨迹对应的初态,从而难以实现对期望轨迹的精确跟踪. 由鲁棒性分析可知,跟踪误差会收敛到原点的某邻域内,邻域半径与初始定位误差的界成正比. 较高的跟踪精度的获得取决于初始重复定位精度. 因此,任意初态误差下的迭代学习控制问题是一重要的研究课题. 针对初始状态固定这种初始条件,文献 [14] 发现在 D 型学习律中增加比例成分,构造的 PD 型学习律可保证跟踪误差的渐近收敛性. 随后的研究工作进一步推广了 PD 型学习控制<sup>[15-18]</sup>.

在固定初态条件下,带初始脉冲作用的迭代学习律也可以有效的实现对期望轨迹的零误差跟踪<sup>[19]</sup>. 然而,控制中的脉冲作用会给实现带来困难. 文献 [20-21] 较早带初始修正的学习算法,它能够实现在给定运行区间上对期望轨迹的完全跟踪,并且引入的作用随初始作用区间变宽而变弱,可认为是一种近似脉冲作用,能够有效地回避脉冲作用在实现时的困难. 近年,文献 [22] 提出变阶学习的概念,并针对初始误差在一定范围内变动的离散非线性系统,设计学习方案,以提高系统跟踪精度. 它将总的定位误差区间划分成若干个较小的误差子区域,任意两个误差子区域互不交叉. 为每个误差子区域设计一个变阶采样迭代学习控制器,每次迭代时,根据初始误差所在的区域更新对应的控制输入. 由鲁棒分析知,系统的跟踪误差的收敛半径正比于初始误差子区域的界,从而提出的变阶学习方案可以有效降低跟踪误差.

本文将离散系统的变阶迭代学习控制方案推广到采样系统. 针对一类多输入输出非线性系统,设计采样迭代学习控制器. 在系统存在固定初始偏差时,固定阶采样学习控制算法能实现系统输出收敛于理想轨迹. 进一步地,当系统状态的初始误差在一较大范围内随机变化时,设计带初始修正作用的采样迭代学习算法,以保证输出误差的收敛性. 为提高收敛精度,引入变阶学习算法,并采用 DIP (Division in phases) 学习策略,减少迭代次数,从而提高收敛速度. 仿真算例采用永磁同步电机的数学模型,用于验证所提算法的有效性. 在 DD (Direct division) 和 DIP 两种策略下,对系统的控制性能作了分析和比较.

## 1 问题的提出与准备

考虑一类非线性连续时间系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + B(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) \quad (2)$$

其中,  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  为系统状态,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^r$  为控制输入,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$  为系统输出;  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathbf{R}^n$ ,  $B(\cdot) = [b_1(\cdot), \dots, b_r(\cdot)] \in \mathbf{R}^{n \times r}$ ,  $\mathbf{g}(\cdot) = [g_1(\cdot), \dots, g_m(\cdot)]^T \in \mathbf{R}^m$  均是光滑非线性函数. 在零阶保持下的控制输入满足

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(jh), \quad t \in [jh, jh + h), \quad 0 \leq j \leq N-1 \quad (3)$$

其中,  $h$  表示采样间隔,  $N$  表示在区间  $[0, T]$  上总的采样点数, 且  $N = [T/h]$ ,  $[\cdot]$  为取整函数,  $jh$  表示第  $j$  个采样时刻.

**定义 1.** 称系统 (1)~(3) 的相对阶为  $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ , 如果当  $0 \leq j \leq N-1$  时, 下述两条件成立:

1) 当  $1 \leq p \leq r$ ,  $1 \leq q \leq m$ ,  $1 \leq i < \eta_q - 1$  时,

$$\int_{jh}^{jh+h} \int_{jh}^{t_1} \dots \int_{jh}^{t_{i-1}} L_{b_p} L_f^{i-1} g_q(\mathbf{x}(t_i)) dt_i \dots dt_1 = 0$$

2) 下述矩阵

$$D(jh) = \begin{bmatrix} \int_{jh}^{jh+h} \int_{jh}^{t_1} \dots \int_{jh}^{t_{\eta_1-1}} [L_{b_1} L_f^{\eta_1-1} g_1(\mathbf{x}(t_{\eta_1}))], \\ \dots, L_{b_r} L_f^{\eta_1-1} g_1(\mathbf{x}(t_{\eta_1})) dt_{\eta_1} \dots dt_1 \\ \vdots \\ \int_{jh}^{jh+h} \int_{jh}^{t_1} \dots \int_{jh}^{t_{\eta_m-1}} [L_{b_1} L_f^{\eta_m-1} g_m(\mathbf{x}(t_{\eta_m}))], \\ \dots, L_{b_r} L_f^{\eta_m-1} g_m(\mathbf{x}(t_{\eta_m})) dt_{\eta_m} \dots dt_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

列满秩.

**定义 2**<sup>[12]</sup>. 称一给定轨迹  $\mathbf{y}_d(jh)$ ,  $0 \leq j \leq N$  在采样系统 (1)~(3) (初态为  $\mathbf{x}_{0,d}$ ) 上是可实现的, 如果存在唯一的控制输入  $\mathbf{u}_d(jh)$ ,  $0 \leq j \leq N-1$ , 使得:

$$\mathbf{y}_d(jh) = \mathbf{y}_d(t)|_{t=jh}$$

$$\mathbf{y}_d(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_d(t))$$

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_d(t)) + B(\mathbf{x}_d(t))\mathbf{u}_d(t), \mathbf{x}_d(0) = \mathbf{x}_{0,d}$$

其中,  $\mathbf{x}_d(t)$  为相应的系统状态.

本文讨论的控制问题是, 对于在区间  $[0, T]$  上重复运行的系统 (1)~(2), 给定期望轨迹  $\mathbf{y}_d(jh)$  和容许的误差上界  $\varepsilon > 0$ , 当系统存在有界初态误差

时, 找到如式 (3) 所描述的输入信号使得各采样点上的跟踪误差具有上界  $\varepsilon$ , 即  $\|\mathbf{y}_d(jh) - \mathbf{y}(jh)\| < \varepsilon$ ,  $0 \leq j \leq N$ . 文中采用的向量与矩阵范数的定义如下:  $n$  维向量  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$  的范数  $\|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ ; 矩阵  $A = \{a_{ij}\} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  的范数  $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ .

在已发表的文献中有两种关于采样迭代学习控制的分析方法, 一种需给定离散期望轨迹  $\mathbf{y}_d(jh)$ ,  $0 \leq j \leq N$ <sup>[12]</sup>, 另一种要求给定连续期望轨迹  $\mathbf{y}_d(t)$ ,  $t \in [0, T]$ <sup>[10]</sup>. 前者可证明在采样点上的零误差跟踪, 而后者只证明有界跟踪; 若假定  $\mathbf{y}_d(t)$  可由满足  $\mathbf{u}_d(t) = \mathbf{u}_d(jh)$ ,  $t \in [jh, jh + h)$ ,  $0 \leq j \leq N - 1$  的控制信号实现, 则可证明零误差跟踪, 但给定由这样的控制信号产生的  $\mathbf{y}_d(t)$  并不容易.

对任一初始状态  $\mathbf{x}(0)$ , 记  $S$  为从  $(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(t), t \in [0, T])$  到  $(\mathbf{x}(t), t \in [0, T])$  的映射; 记  $O$  为从  $(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(t), t \in [0, T])$  到  $(\mathbf{y}(t), t \in [0, T])$  的映射, 即令  $\mathbf{x}(\cdot) = S(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(\cdot))$ ,  $\mathbf{y}(\cdot) = O(\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(\cdot))$ .

对于系统 (1) ~ (3) 及期望轨迹, 做如下假设:

**A1.** 映射  $S$  和  $O$  是一对一的.

**A2.** 系统相对阶为  $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ .

**A3.** 对于  $0 \leq p \leq r$ ,  $1 \leq q \leq m$ ,  $0 \leq i \leq \eta_q$ , 函数  $\mathbf{f}(\cdot)$ ,  $\mathbf{b}_p(\cdot)$ ,  $L_{\mathbf{f}}^i g_q(\cdot)$  和  $L_{\mathbf{b}_p} L_{\mathbf{f}}^{\eta_q - 1} g_q(\cdot)$  关于  $\mathbf{x}$  是全局李普希兹的, 且李普希兹常数依次为  $l_{\mathbf{f}}$ ,  $l_{\mathbf{b}}$ ,  $l_{\mathbf{f}g}$  和  $l_{\mathbf{b}fg}$ .

**A4.** 函数  $B(\cdot)$  在  $\mathbf{R}^n$  上有界.

为便于系统收敛性分析, 给出如下引理<sup>[22]</sup>.

**引理 1.** 如果非负序列  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$  满足

$$a_k \leq \rho a_{k-1-i} + b_k, i \in [0, I_{\max}]$$

其中,  $I_{\max}$  为一正整数, 且  $0 \leq \rho < 1$ ,  $\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k \leq b_{\infty}$ , 那么,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \frac{b_{\infty}}{1 - \rho}$$

## 2 变阶采样迭代学习控制

在这一节, 针对系统 (1) ~ (3), 提出一种变阶采样迭代学习控制方法, 并分析所提出学习算法的收敛性和鲁棒性.

当系统相对阶为 1 时, 对于  $0 \leq j \leq N - 1$ ,  $1 \leq q \leq m$  时,  $\{\mathbf{u}(jh), y_q(jh + h)\}$  是一个因果对. 即, 在  $t = jh + h$  时刻的系统输出  $y_q(jh + h)$  直接

由  $t = jh$  时刻的控制输入  $\mathbf{u}(jh)$  决定. 这是因为:

$$y_q(jh + h) = g_q(\mathbf{x}(jh)) + \int_{jh}^{jh+h} L_{\mathbf{f}} g_q(\mathbf{x}(t_1)) dt_1 + \int_{jh}^{jh+h} [L_{\mathbf{b}_1} g_q(\mathbf{x}(t_1)), \dots, L_{\mathbf{b}_r} g_q(\mathbf{x}(t_1))] dt_1 \mathbf{u}(jh) \quad (5)$$

当  $0 \leq j \leq N - 1$ ,  $1 \leq p \leq r$ ,  $1 \leq q \leq m$  时, 由相对阶定义知,  $L_{\mathbf{b}_p} g_q(\mathbf{x}(t))$  在某些时刻允许取零值.  $\mathbf{D}(jh)$  满足列满秩, 需满足  $m \geq r$ , 其中  $m$  为系统的输出维数,  $r$  为系统的输入维数. 即系统的输出维数必须不小于输入维数.

由式 (5) 知, 当  $0 \leq j \leq N - 1$ ,  $1 \leq q \leq m$  时,  $\{\mathbf{u}_k(jh), y_{q,k}(jh + h)\}$  是一个因果对, 可据此构造学习算法. 当存在固定初态误差时, 固定阶学习算法在初始区间外能够实现系统输出渐近收敛于给定的期望轨迹. 通过引入初始修正项, 可实现对期望轨迹在指定区间上的完全跟踪. 当初态误差任意变化, 固定阶采样学习算法不能满足控制精度要求时, 可采用变阶学习算法, 以提高系统跟踪精度. 下式给出一种带初始修正作用的变阶采样迭代学习算法:

$$\mathbf{u}_{k+1}(jh) = \mathbf{u}_{k-i}(jh) + \Gamma_{k-i}(jh) \times \begin{bmatrix} e_{1,k-i}^*(jh + h) - l_1 e_{1,k-i}^*(jh) \\ \vdots \\ e_{m,k-i}^*(jh + h) - l_m e_{m,k-i}^*(jh) \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中,  $0 \leq j \leq N - 1$ ,  $\Gamma_k(jh)$  和  $l_1, l_2, \dots, l_m$  均为学习增益. 对所有  $1 \leq q \leq m$ ,  $e_{q,k-i}^*(jh) = y_{q,d}^*(jh) - y_{q,k-i}(jh)$ ,  $\mathbf{y}_d^*(jh)$  为经过初始修正后的期望轨迹, 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_d^*(jh) &= [y_{1,d}^*(jh), \dots, y_{m,d}^*(jh)]^T \\ y_{q,d}^*(jh) &= \begin{cases} y_{q,d}(jh) + Y_{q,d}(jh), & j \in [0, J_q) \\ y_{q,d}(jh), & j \in [J_q, N] \end{cases} \\ Y_{q,d}(jh) &= (\mathbf{g}(\mathbf{x}_d^*(0)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_d(0))) \times \sin^{\alpha_q} \left( \frac{\pi}{2J_q} (J_q - j) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $1 \leq q \leq m$ ,  $\alpha_q$  和  $J_q$  为可调参数, 且  $J_q$  不小于系统的相对阶,  $\alpha_q \geq 2$  (且  $\alpha_q > \eta_q$ ), 以保证轨迹初始段轨迹以零导数在  $j = J_q$  处接入.  $\mathbf{x}_d(0), \mathbf{x}_d^*(0)$  分别为实现轨迹  $\mathbf{y}_d(jh), \mathbf{y}_d^*(jh)$  时的初态.

可以证明, 当初态误差固定时, 学习算法 (6) 可实现系统输出对期望轨迹  $\mathbf{y}_d(jh)$  在区间  $J_q \leq j \leq N$  上的完全跟踪. 为此, 假设:

**A5.** 轨迹  $\mathbf{y}_d^*(jh)$ ,  $0 \leq j \leq N$  在系统 (1) ~ (3) (置初态  $\mathbf{x}_d^*(0) = \mathbf{x}_0^*$ ) 上是可实现的.

**定理 1.** 对于满足假设 A1~A5 的系统 (1)~(3) 采用学习算法 (6), 如果

**C1.** 系统初态  $\mathbf{x}_k(0)$  满足  $\|\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_k(0)\| \leq \varepsilon^*$ .

**C2.**  $\|I - \Gamma_k(jh)\mathbf{D}_k(jh)\| \leq \rho < 1, 0 \leq j \leq N - 1$ .

且采样间隔  $h$  足够小, 那么, 当  $k \rightarrow \infty$  时, 对所有的  $0 \leq j \leq N$ , 跟踪误差  $\|\mathbf{y}_d^*(jh) - \mathbf{y}_k(jh)\|$  渐近有界, 且跟踪误差上界与  $\varepsilon^*$  成正比. 并且, 当  $\varepsilon^*$  趋于零时, 跟踪误差  $\|\mathbf{y}_d^*(jh) - \mathbf{y}_k(jh)\|$  也趋于零.

**证明.** 记  $\mathbf{u}_d^*(jh)$  为产生  $\mathbf{y}_d^*(jh)$  时的控制信号,  $\mathbf{x}_d^*(jh)$  为相应的系统状态;  $\mathbf{u}_k^*(jh)$  为产生  $\mathbf{y}_k^*(jh)$  时的控制信号,  $\mathbf{x}_k^*(jh)$  为相应的系统状态. 并定义  $\Delta \mathbf{u}_k^*(jh) = \mathbf{u}_d^*(jh) - \mathbf{u}_k^*(jh), \Delta \mathbf{x}_k^*(jh) = \mathbf{x}_d^*(jh) - \mathbf{x}_k^*(jh)$ . 结合式 (5) 和 (6), 可得:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(jh) &= (I - \Gamma_{k-i}(jh)\mathbf{D}_{k-i}(jh)) \times \\ &\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh) - \Gamma_{k-i}(jh)(\mathbf{W}_{k-i}(jh) + \\ &\mathbf{V}_{k-i}(jh)) \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{k-i}(jh) &= [w_{1,k-i}(jh), \dots, w_{m,k-i}(jh)]^T \quad (9) \\ w_{q,k-i}(jh) &= (1 - l_q)(g_q(\mathbf{x}_d^*(jh)) - g_q(\mathbf{x}_{k-i}(jh))) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{k-i}(jh) &= [v_{1,k-i}(jh), \dots, v_{m,k-i}(jh)]^T \quad (10) \\ v_{q,k-i}(jh) &= \int_{jh}^{jh+h} [L_{\mathbf{f}}g_q(\mathbf{x}_d^*(t_1)) - \\ &L_{\mathbf{f}}g_q(\mathbf{x}_{k-i}(t_1))]dt_1 + \int_{jh}^{jh+h} \mathbf{D}(t_1)dt_1\mathbf{u}_d^*(jh) \\ \mathbf{D}(t_1) &= \begin{bmatrix} L_{\mathbf{b}_1}g_q(\mathbf{x}_d^*(t_1)) - L_{\mathbf{b}_1}g_q(\mathbf{x}_{k-i}(t_1)) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{b}_r}g_q(\mathbf{x}_d^*(t_1)) - L_{\mathbf{b}_r}g_q(\mathbf{x}_{k-i}(t_1)) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

对式 (8) 两边取范数, 并利用条件 C2 得:

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(jh)\| &\leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh)\| + \\ &c_{\Gamma}(\|\mathbf{W}_{k-i}(jh)\| + \|\mathbf{V}_{k-i}(jh)\|) \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $c_{\Gamma}$  为  $\Gamma_{k-i}(jh)$  范数的界. 分别对式 (9) 和 (10) 两边取范数, 可得:

$$\|\mathbf{W}_{k-i}(jh)\| \leq c_1 \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh)\| \quad (12)$$

$$\|\mathbf{V}_{k-i}(jh)\| \leq c_2 \int_{jh}^{jh+h} \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(t_1)\| dt_1 \quad (13)$$

其中,  $c_1 = (1 - l_{\min})l_{\mathbf{g}}, c_2 = (l_{\mathbf{f}\mathbf{g}} + rl_{\mathbf{b}\mathbf{g}}c_{\mathbf{u}^*})$ , 且  $l_{\min} = \min\{l_1, l_2, \dots, l_m\}, c_{\mathbf{u}^*} = \max_{0 \leq j \leq N-1} \|\mathbf{u}_d^*(jh)\|$ .

利用式 (1), 当  $t \in [jh, jh + h]$  时, 由 Bellman-Gronwall 引理可得:

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(t)\| &\leq \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh)\| e^{c_3(t-jh)} + \\ &\int_{jh}^t e^{c_3(t-s)} c_B \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(s)\| ds \leq \\ &c_4 \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh)\| + \\ &(e^{c_3h} - 1)c_5 \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh)\| \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $c_3 = l_{\mathbf{f}} + rl_{\mathbf{b}}c_{\mathbf{u}^*}, c_4 = e^{c_3h}, c_5 = c_B/c_3$ , 并且  $c_B$  是  $B(\mathbf{x}_k(t))$  范数的界.

将式 (14) 代入式 (12),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_{k-i}(jh)\| &\leq c_2 c_4 h \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh)\| + \\ &c_2 c_5 h (e^{c_3h} - 1) \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh)\| \end{aligned} \quad (15)$$

由式 (11)、(12) 和 (15) 知:

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(jh)\| &\leq \hat{\rho} \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh)\| + \\ &c_6 \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh)\| \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $\hat{\rho} = \rho + c_{\Gamma}c_2c_5h(e^{c_3h} - 1), c_6 = c_{\Gamma}c_1 + c_{\Gamma}c_2c_4h$ .

对于式 (14), 取  $t = jh + h$ ,

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh)\| &\leq c_4^j \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(0)\| + \\ &\sum_{n=0}^{j-1} c_4^{j-1-n} (e^{c_3h} - 1)c_5 \times \\ &\|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(nh)\| \end{aligned} \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (16), 得:

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(jh)\| &\leq \hat{\rho} \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh)\| + \\ &c_7 \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(0)\| + c_8 \sum_{n=0}^{j-1} \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(nh)\| \end{aligned} \quad (18)$$

其中,  $c_7 = c_6 \max\{1, c_4, \dots, c_4^N\}, c_8 = c_5c_7(e^{c_3h} - 1)$ .

在条件 C2 下, 令采样间隔  $h$  足够小, 可使得  $\hat{\rho} < 1$ . 由条件 C1 知, 初始修正误差  $\|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(0)\| \leq \varepsilon^*$ . 因此, 当  $j = 0$  时, 由式 (18) 知:

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(0)\| &\leq \hat{\rho} \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(0)\| + c_6 \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(0)\| \leq \\ &\hat{\rho} \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(0)\| + c_6 \varepsilon^* \end{aligned}$$

根据引理 1,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(0)\| \leq c_{\mathbf{u}^*}^0 \varepsilon^* \quad (19)$$

式中,  $c_{\mathbf{u}^*}^0 = c_6/(1 - \hat{\rho})$ . 当  $j = 1$  时, 由式 (18) 可知:

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(h)\| &\leq \hat{\rho} \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(h)\| + c_7 \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(0)\| + \\ &c_8 \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(0)\| \end{aligned} \quad (20)$$

结合式 (19) 和 (20), 并根据引理 1, 有:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(h)\| \leq c_{\mathbf{u}}^1 \varepsilon^*$$

其中,  $c_{\mathbf{u}}^1 = (c_7 + c_8 c_{\mathbf{u}}^0 \varepsilon^*) / (1 - \hat{\rho})$ . 假设当  $0 \leq j \leq l - 1$  时,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(jh)\| \leq c_{\mathbf{u}}^j \varepsilon^* \quad (21)$$

其中,  $c_{\mathbf{u}}^j$  为一常数. 那么, 当  $j = l$  时, 结合式 (18) 和 (21), 由引理 1 可得:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(lh)\| \leq c_{\mathbf{u}}^l \varepsilon^*$$

其中,  $c_{\mathbf{u}}^l = (c_7 + c_8(c_{\mathbf{u}}^0 + c_{\mathbf{u}}^1 + \dots + c_{\mathbf{u}}^{l-1})) / (1 - \hat{\rho})$ . 由数学归纳法可知, 对所有的  $0 \leq j \leq N - 1$ , 均有

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(jh)\| \leq c_{\mathbf{u}} \varepsilon^* \quad (22)$$

其中,  $c_{\mathbf{u}} = \max\{c_{\mathbf{u}}^0, c_{\mathbf{u}}^1, \dots, c_{\mathbf{u}}^{N-1}\}$ .

从而, 由式 (17) 和式 (22) 易知, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\|\Delta \mathbf{x}_k^*(jh)\|$  渐近有界, 且其界与  $\varepsilon^*$  成正比. 由于  $\mathbf{g}(\cdot)$  关于  $x$  是李普希兹的, 则由式 (6) 知,  $\|\Delta \mathbf{y}_k^*(jh)\|$  也渐近有界, 且其界与  $\varepsilon^*$  成正比.  $\square$

特别地, 当初态误差恒为零时, 由学习算法 (6) 和定理 1 可知:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (e_{q,k-i}^*(jh+h) - l_q e_{q,k-i}^*(jh)) = 0$$

其中,  $1 \leq q \leq m$ . 此即通过学习导致的极限轨迹, 为获得好的控制效果, 可调整  $l_i \in [-1, 1]$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 以改善起始阶段的轨迹.

下面讨论系统相对阶大于 1 的情形. 如果系统 (1)~(3) 的相对阶为  $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ , 那么, 当  $0 \leq j \leq N - 1$ ,  $1 \leq q \leq m$  时,  $\{\mathbf{u}(jh), y_q(jh+h)\}$  是一个因果对. 即, 在  $t = jh + h$  时刻的系统输出  $y_q(jh+h)$ ,  $1 \leq q \leq m$  直接由  $t = jh$  时刻的控制输入  $\mathbf{u}(jh)$  的决定. 这样, 一种变阶采样迭代学习算法可由下式给出:

$$\mathbf{u}_{k+1}(jh) = \mathbf{u}_{k-i}(jh) + \Gamma_{k-i}(jh) \times \begin{bmatrix} e_{1,k-i}^*(jh+h) + l_{11}e_{1,k-i}^*(jh) + \dots + \\ l_{1\eta_1}e_{1,k-i}^*(jh - \eta_1 h + h) \\ \vdots \\ e_{m,k-i}^*(jh+h) + l_{m1}e_{m,k-i}^*(jh) + \dots + \\ l_{m\eta_m}e_{m,k-i}^*(jh - \eta_m h + h) \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中,  $0 \leq j \leq N - 1$ ,  $\Gamma_{k-i}(jh)$  和  $l_{11}, l_{12}, \dots, l_{m\eta_m}$  均为学习增益, 且当  $j < 0$ ,  $e_{q,k-i}^*(jh) = 0$ ,  $1 \leq q \leq m$ .

**定理 2.** 对于满足假设 A1~A5 的系统 (1)~(3) 采用学习算法 (23), 如果

**C3.** 初态  $\mathbf{x}_k(0)$  满足  $\|\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_k(0)\| \leq \varepsilon^*$ .

**C4.**  $\|I - \Gamma_k(jh)\mathbf{D}_k(jh)\| \leq \rho < 1$ ,  $0 \leq j \leq N - 1$ .

且采样间隔  $h$  足够小, 那么, 当  $k \rightarrow \infty$  时, 对所有的  $0 \leq j \leq N$ , 跟踪误差  $\|\mathbf{y}_d^*(jh) - \mathbf{y}_k(jh)\|$  渐近有界, 该界正比于  $\varepsilon^*$ . 并且, 当  $\varepsilon^*$  趋于零时, 跟踪误差  $\|\mathbf{y}_d^*(jh) - \mathbf{y}_k(jh)\|$  也趋于零.

**证明.** 该定理的证明见附录.  $\square$

实现时, 为获得较好的控制效果, 可选取合适的  $l_{q1}, l_{q2}, \dots, l_{q\eta_q}$ , 使得方程

$$l_{q1}z^{\eta_q} + l_{q2}z^{\eta_q-1} + \dots + l_{q\eta_q} = 0$$

的根均位于单位圆内,  $1 \leq q \leq m$ .

考虑到输入限幅的情形, 可在算法 (23) 中引入饱和作用. 带饱和作用的变阶采样迭代学习算法可由如下形式给出:

$$\mathbf{u}_{k+1}(jh) = \text{sat}(\mathbf{U}_{k+1}(jh)) \quad (24)$$

$$\mathbf{U}_{k+1}(jh) = \text{sat}(\mathbf{U}_{k-i}(jh)) + \Gamma_{k-i}(jh) \times$$

$$\begin{bmatrix} e_{1,k-i}^*(jh+h) + l_{11}e_{1,k-i}^*(jh) + \dots + \\ l_{1\eta_1}e_{1,k-i}^*(jh - \eta_1 h + h) \\ \vdots \\ e_{m,k-i}^*(jh+h) + l_{m1}e_{m,k-i}^*(jh) + \dots + \\ l_{m\eta_m}e_{m,k-i}^*(jh - \eta_m h + h) \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中,  $\text{sat}(\cdot)$  为饱和函数. 可以证明, 定理 2 对算法 (24) 和 (25) 同样适用. 定义  $\Delta \mathbf{U}_k^*(jh) = \mathbf{u}_d^*(jh) - \mathbf{U}_k(jh)$ , 由式 (24) 和 (25) 知:

$$\Delta \mathbf{U}_{k+1}^*(jh) = (I - \Gamma_{k-i}(jh)\mathbf{D}_{k-i}(jh)) \times \Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh) - \Gamma_{k-i}(jh)(\mathbf{W}_{k-i}(jh) + \mathbf{V}_{k-i}(jh)) - \Gamma_{k-i}(jh)\mathbf{E}_{k-i}(jh) \quad (26)$$

对式 (26) 两端取范数:

$$\|\Delta \mathbf{U}_{k+1}^*(jh)\| \leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh)\| + c_{\Gamma} (\|\mathbf{W}_{k-i}(jh)\| + \|\mathbf{V}_{k-i}(jh)\|) + c_{\Gamma} \|\mathbf{E}_{k-i}(jh)\| \quad (27)$$

又由饱和函数的性质可知,

$$\|\Delta \mathbf{u}_k^*(jh)\| \leq \|\Delta \mathbf{U}_k^*(jh)\| \quad (28)$$

结合式 (27) 和式 (28) 可得:

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{U}_{k+1}^*(jh)\| &\leq \rho \|\Delta \mathbf{U}_{k-i}^*(jh)\| + \\ &c_{\Gamma} \|\mathbf{E}_{k-i}(jh)\| + c_{\Gamma} (\|\mathbf{W}_{k-i}(jh)\| + \\ &\|\mathbf{V}_{k-i}(jh)\|) \end{aligned}$$

以后的证明过程与定理 2 的证明类似, 此处略.

由定理 1、定理 2 及  $\mathbf{y}_d^*(jh)$  的定义可知, 当  $J_q \leq j \leq N, 1 \leq q \leq m$  时,  $\|y_{q,d}(jh) - y_{q,k}(jh)\|$  有界收敛, 且收敛误差与对应的初态修正误差  $\varepsilon^*$  成正比. 当  $\varepsilon^*$  趋于零时,  $\|y_{q,d}(jh) - y_{q,k}(jh)\|$  也趋于零.

### 3 实施方案

前述的变阶学习方法并未给出每次迭代时如何选择阶, 现针对系统初态在一区间内任意变化的情形给出阶的确定方案, 同时说明任意初态下提高跟踪性能的方法. 其基本想法是: 将初态变化的全区间分成若干个子区间, 分别为每个子区间设置期望初态和期望轨迹; 在每次迭代时, 根据实际初态所处的子区间, 将运行结果对该区间相应的控制进行修正; 通过学习过程, 获得的控制能够使得初态处于该区间的实际输出跟踪上该区间对应的期望轨迹. 这种做法导致两个结果: 一是系统跟踪性能得以提高, 这是因为每个子区间比全区间小; 另一是使得学习过程是变阶的, 这是由于前后两次迭代时的实际初态可能会落于不同的子区间内.

我们讨论两种变阶迭代学习方法: DD 策略与 DIP 策略. 首先考虑 DD 策略, 这种策略由文献 [14] 首先提出的 (被看作是一阶学习过程). 将初态误差分布的区间记为  $S$ . DD 策略是指首先将区间  $S$  平分成  $I_S$  个子区间, 记为  $S_1, S_2, \dots, S_{I_S}$ , 任意两个子区间相互不重合, 且  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{I_S}$ ; 在每一个子区间上定义控制量  $\mathbf{u}^i(jh), 1 \leq i \leq I_S$ . 在第  $k$  次迭代时, 当初态属于子区间  $S_i$  时, 只更新控制量  $\mathbf{u}^i(jh)$ , 其他控制量维持不变. 最终, 跟踪误差将会与原初态误差的  $1/I_S$  成正比, 且  $I_S$  越大, 跟踪误差将越小.

给定期望轨迹  $y_{q,d}(jh)$ , 修正该期望轨迹得到  $y_{q,d}^*(jh), 0 \leq j \leq N$ , 并选取  $J_q, \alpha_q$  以及  $\varepsilon$ ; 所有子区间的初始输入信号均取为  $\mathbf{u}^0(jh)$ . DD 策略的具体实施步骤如下:

**步骤 1.** 初始化  $k = 0, \mathbf{u}^i(jh) = \mathbf{u}^0(jh), \text{FLAG}_i = 0, i = 1, 2, \dots, I_S$ .

**步骤 2.** 检测初态  $\mathbf{x}_k(0)$ .

**步骤 3.** 根据初态  $\mathbf{x}_k(0)$ , 获得所属子区间  $S_{i^*}$ , 其中  $i^* \in \{1, 2, \dots, I_S\}$ .

**步骤 4.** 如果  $\text{FLAG}_{i^*} = 1$ , 重置系统, 返回步骤 2. 否则执行步骤 5.

**步骤 5.** 置  $\mathbf{u}_k(jh) = \mathbf{u}^{i^*}(jh)$ , 并施加于系统, 获得  $\mathbf{y}_k(jh)$ .

**步骤 6.** 若  $\max_{J_q \leq j \leq N} \|\mathbf{y}_d(jh) - \mathbf{y}_k(jh)\| > \varepsilon$ , 则由式 (6) 或式 (23) 更新控制量, 并存在  $\mathbf{u}^{i^*}(jh)$ , 然后执行步骤 8. 否则, 令  $\text{FLAG}_{i^*} = 1$ , 执行步骤 7.

**步骤 7.** 如果  $\text{FLAG}_i = 1, i = 1, 2, \dots, I_S$ , 那么停止学习过程. 否则执行步骤 8.

**步骤 8.** 令  $k = k + 1$ , 返回步骤 2.

由上述 DD 学习过程知, 被更新的控制量取决于每一次迭代时的初态所属的子区间. 由于系统初态变化任意, 故迭代学习律是变阶的. 在一次迭代过程中, 只有一个控制量被更新, 而其他子区间对应的控制量保持不变, 因此 DD 策略下的收敛速度是缓慢的.

下面考虑 DIP 策略<sup>[22]</sup>. DIP 策略将学习过程分为若干个阶段, 在第  $l$  个阶段, 将初态区间划分成  $I_l$  个子区间, 容许误差设为  $\varepsilon_l$ . 若当前阶段中所有子区间的输出误差均达到容许误差时, 便进入下一阶段.

下面详细描述 DIP 策略的学习过程. 在第一阶段, 设置  $I_1 = 1$ , 即初态子区间为整个初态区间, 当输出误差达到  $\varepsilon_1$  时, 进入第二个阶段. 将第二个阶段初态区间划分成  $I_2$  个子区间. 每个子区间上的控制量取自第一个阶段完成时所获得的控制量, 即:  $\mathbf{u}^{1,2}(jh) = \mathbf{u}^{1,1}(jh), \mathbf{u}^{2,2}(jh) = \mathbf{u}^{1,1}(jh), \dots, \mathbf{u}^{I_2,2}(jh) = \mathbf{u}^{1,1}(jh), \mathbf{u}^{(i_1, i_2)}(jh)$  表示第  $i_2$  阶段第  $i_1$  个子区间上的控制量. 当每个子区间上的输出误差都达到  $\varepsilon_2$  时, 进入下一阶段. 设学习过程共有  $L$  个阶段, 相应地第  $L$  个阶段初态区间被划分成  $I_L$  个子区间. 这样, 系统的跟踪误差将会与原初态误差的  $1/I_L$  成正比, 且  $I_L$  越大, 系统的跟踪误差越小.

记  $L$  为阶段总数,  $\{I_l, l = 1, 2, \dots, L\}$  为第  $l$  个阶段的子区间数,  $\{\varepsilon_l, l = 1, 2, \dots, L\}$  为第  $l$  个阶段的容许误差, 给定初始控制输入  $\mathbf{u}^0(jh)$ . DIP 策略的具体实施步骤如下:

**步骤 1.** 初始化  $k = 0, l = 1, I_S = I_l, S_1 = S, \hat{\varepsilon} = \varepsilon_1, \mathbf{u}^{1,1}(jh) = \mathbf{u}^0(jh) \text{FLAG}_1 = 0$ .

**步骤 2.** 检测初态  $\mathbf{x}_k(0)$ .

**步骤 3.** 根据初态  $\mathbf{x}_k(0)$ , 获得所属子区间  $S_{i^*}$ , 其中  $i^* \in \{1, 2, \dots, I_S\}$ .

**步骤 4.** 如果  $\text{FLAG}_{i^*} = 1$ , 重新置位系统, 返回步骤 2. 否则执行步骤 5.

**步骤 5.** 令  $\mathbf{u}_k(jh) = \mathbf{u}^{i^*, l}(jh)$ , 并施加于系统, 获得  $y_{q,k}(jh), 0 \leq j \leq N, 1 \leq q \leq m$ .

**步骤 6.** 如果  $\max_{1 \leq q \leq m} \max_{J_q \leq j \leq N} \|y_{q,d}(jh) -$

$y_{q,k}(jh) \| > \hat{\varepsilon}$ , 则由式 (6) 或式 (23) 更新控制量, 并存为  $\mathbf{u}^{i^*,l}(jh)$ . 然后执行步骤 9. 否则, 令  $\text{FLAG}_{i^*} = 1$ , 然后执行步骤 7.

**步骤 7.** 如果  $\text{FLAG}_l = 1, 1 \leq l \leq I_S$ , 那么执行步骤 8. 否则执行步骤 9.

**步骤 8.** 如果  $\hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$ , 或  $l = L$ , 那么, 停止学习过程. 否则, 令  $l = l + 1, \hat{\varepsilon} = \varepsilon_l, I_{S'} = I_l$  此时, 将初态区间划分  $I_{S'}$  个子区间, 即  $\{S_l, l = 1, 2, \dots, I_{S'}\}$ , 且令  $\text{FLAG}_l = 0, l = 1, 2, \dots, I_{S'}$ . 根据就近选择原则, 获得下一阶段各个子区间的控制量:

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{u}^{i,l-1}(jh), i = 1, 2, \dots, I_S\} \\ & \quad \downarrow \\ & \{\mathbf{u}^{i,l}(t), i = 1, 2, \dots, I_{S'}\} \end{aligned}$$

令  $I_S = I_{S'}$ .

**步骤 9.** 令  $k = k + 1$ , 返回步骤 1.

控制量选取时采用的就近选择原则为: 下一阶段各子区间控制量的初值取为上一阶段最靠近相应子区间的控制量. 例如, 上一阶段子区间为 2, 下一阶段子区间为 4, 下一个阶段各子区间控制量初值的选取方法如下:  $\mathbf{u}^{1,l}(jh) = \mathbf{u}^{1,l-1}(jh), \mathbf{u}^{2,l}(jh) = \mathbf{u}^{1,l-1}(jh), \mathbf{u}^{3,l}(jh) = \mathbf{u}^{2,l-1}(jh), \mathbf{u}^{4,l}(jh) = \mathbf{u}^{2,l-1}(jh)$ .

#### 4 数值仿真

永磁同步电机的的数学模型描述如下<sup>[23]</sup>:

$$\begin{cases} pi_d = \frac{(v_d - Ri_d + w_s L_q i_q)}{L_d} \\ pi_q = \frac{(v_q - Ri_q - w_s L_d i_d - w_s \lambda_{af})}{L_q} \\ pw_r = \frac{(T_e - T_L - Bw_r)}{J} \\ p\theta_r = w_r \end{cases}$$

其中,  $p$  为微分算子,  $w_s = Pw_r, T_e = 3P[\lambda_{af}i_q + (L_d - L_q)i_d i_q]/2$ , 且  $d - q$  轴按转子磁链定向. 各符号的物理意义可见文献 [23]. 系统的输入为  $v_d$  和  $v_q$ , 输出为  $i_d$  和  $\theta_r$ . 仿真时, 参数设置如下:  $R = 1.4 \Omega, L_d = 6.6 \text{ mH}, L_q = 5.8 \text{ mH}, J = 0.00176 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, B = 0.00038818 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}/\text{s}, \lambda_{af} = 0.1546 \text{ V}/\text{rad}/\text{s}, P = 6, T_L = 0.5 \text{ N}\cdot\text{m}$ .

假设系统的运行区间为  $[0, 1] \text{ s}$ , 采样时间  $h = 0.0002 \text{ s}$ , 期望轨迹  $i_{d,d}(jh) = 0, \theta_{r,d}(jh) = (\pi/2)(6(jh)^5 - 15(jh)^4 + 10(jh)^3) \text{ rad}, j \in [0, 5000]$ . 经计算, 系统的期望初态为  $[i_{d,d}(0), i_{q,d}(0), w_{r,d}(0), \theta_{r,d}(0)]^T = [0, \frac{2T_L}{3P\lambda_{af}}, 0, 0]^T$ .

经过计算得知:

$$D_k(jh) = \begin{bmatrix} \frac{h}{L_d} & 0 \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$D_{21} = \int_{jh}^{jh+h} \int_{jh}^{t_1} \int_{jh}^{t_2} \frac{3P}{2JL_d} (L_d - L_q) i_q(t_3) dt_3 dt_2 dt_1$$

$$D_{22} = \int_{jh}^{jh+h} \int_{jh}^{t_1} \int_{jh}^{t_2} \frac{3P}{2JL_d} [\lambda_{af} + (L_d - L_q)] \times i_d(t_3) dt_3 dt_2 dt_1$$

由此可见, 系统的相对阶为  $\{1, 3\}$ , 控制器参数  $\Gamma_k(jh)$  可设计为

$$\Gamma_k(jh) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 L_d}{h} & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

其中,  $\gamma_1 \in (0, 2), \gamma_2$  为适当小的正数.

针对前述同步电机模型, 采用固定阶采样迭代学习算法, 其中, 控制参数选取如下:

$$\Gamma_k(jh) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

且置系统的实际初态为:  $[i_{d,k}(0), i_{q,k}(0), w_{r,k}(0), \theta_{r,k}(0)]^T = [0, \frac{2T_L}{3P\lambda_{af}}, 0, 0.15 + 0.015\text{rand}]^T$ , 其中,  $\text{rand}$  为在  $-1$  到  $1$  之间变化的随机数. 令  $u_0(jh) = 0, j \in [0, 4999]$ . 记  $M_k = \lg(\max\{\max_{j \in [0, 5000]} \{|i_{d,d}(jh) - i_{d,k}(jh)|\}, \max_{j \in [200, 5000]} \{|\theta_{r,d}(jh) - \theta_{r,k}(jh)|\}\})$ . 仿真结果如图 1 所示. 当存在初态误差时, 由图可知, 系统迭代运行了 1000 次后, 控制系统的跟踪性能并不理想.

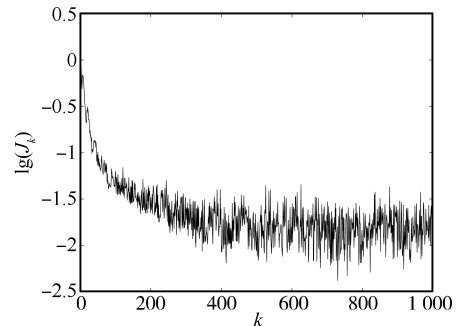


图 1 采用固定阶学习算法的跟踪误差

Fig. 1 Iteration history of the tracking error by using the scheme without division

采用基于 DD 策略的变阶采样迭代学习算法 (24) 和 (25). 将初态全区间平均划分成 24 个子区

间,且自定义初始修正参数选取如下:  $J_1 = 0, J_2 = 200, \alpha_1 = 5, \alpha_2 = 5$ .  $M_k$  的定义,控制参数  $\Gamma_k(jh)$  的选取及系统初态均与前述固定阶情形相同. 控制误差要求满足  $\varepsilon_1 = 0.003$ , 即,  $M_k < -2.5$ . 仿真结果如图 2 所示. 当迭代次数到达 13 622 次后, 控制系统达到控制要求.

采用基于 DIP 策略的变阶采样迭代学习算法 (24) 和 (25), 设置参数为  $I_1 = 1, I_2 = 4, I_3 = 12, I_4 = 24, \varepsilon_1 = 0.22, \varepsilon_2 = 0.006, \varepsilon_3 = 0.003, \varepsilon_4 = 0.003$ . 其他参数选取与前述 DD 策略的参数设置相同. 仿真结果如图 3 所示. 当迭代次数到达 3 473 次后, 控制系统达到控制要求. 相比 DD 策略, 迭代次数大大减少.

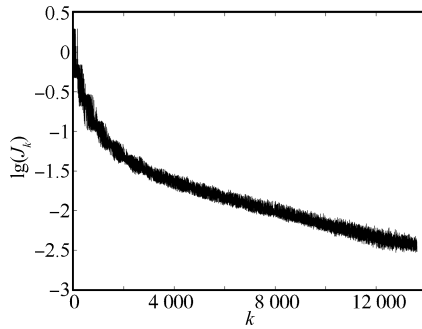


图 2 采用 DD 策略的跟踪误差

Fig. 2 Iteration history of the tracking error by using the direct division scheme

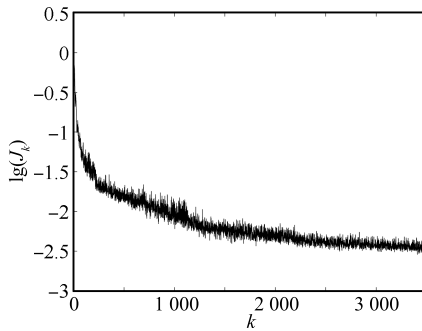


图 3 采用 DIP 策略的跟踪误差

Fig. 3 Iteration history of the tracking error by using the division-in-phase scheme

## 5 结论

本文针对多变量非线性系统, 提出了一种变阶采样迭代学习方案, 并将该学习控制方案推广到任意相对阶的情形. 变阶学习方案是针对初值问题提出的, 旨在提高任意初值下系统的跟踪精度. 文中推导了保证学习算法收敛性的充分条件, 这些条件可用于学习增益的选取. 考虑到实际被控系统中存在的输入限幅作用, 本文也提出了一种带饱和和限幅的

变阶采样迭代学习算法. 本文同时给出了两种变阶策略的实施步骤, 且通过数值仿真表明, 所提出的学习控制方案对提高系统在任意初值下的控制精度是有效的.

## 附录. 定理 2 的证明

由式 (23) 知:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(jh) &= (I - \Gamma_{k-i}(jh) \mathbf{D}_{k-i}(jh)) \times \\ &\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh) - \Gamma_{k-i}(jh) (\mathbf{W}_{k-i}(jh) + \\ &\mathbf{V}_{k-i}(jh)) - \Gamma_{k-i}(jh) \mathbf{E}_{k-i}(jh) \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

其中,

$$\mathbf{W}_{k-i}(jh) = [w_{1,k-i}(jh), \dots, w_{m,k-i}(jh)]^T \quad (\text{A2})$$

$$\begin{aligned} w_{q,k-i}(jh) &= g_q(\mathbf{x}_d^*(jh)) - g_q(\mathbf{x}_{k-i}(jh)) + \\ &h[L_{\mathbf{f}}g_q(\mathbf{x}_d^*(jh)) - L_{\mathbf{f}}g_q(\mathbf{x}_{k-i}(jh))] + \dots + \\ &\frac{h^{\eta_q-1}}{(\eta_q-1)!} [L_{\mathbf{f}}^{\eta_q-1}g_q(\mathbf{x}_d^*(jh)) - \\ &L_{\mathbf{f}}^{\eta_q-1}g_q(\mathbf{x}_{k-i}(jh))] \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_{k-i}(jh) = [v_{1,k-i}(jh), \dots, v_{m,k-i}(jh)]^T \quad (\text{A3})$$

$$\begin{aligned} v_{q,k-i}(jh) &= \int_{jh}^{jh+h} \int_{jh}^{t_1} \dots \int_{jh}^{t_{\eta_q-1}} L_{\mathbf{f}}^{\eta_q} \times \\ &g_q(\mathbf{x}_d^*(t_{\eta_q})) - L_{\mathbf{f}}^{\eta_q}g_q(\mathbf{x}_{k-i}(t_{\eta_q})) dt_{\eta_q} \dots dt_1 + \\ &\int_{jh}^{jh+h} \int_{jh}^{t_1} \dots \int_{jh}^{t_{\eta_q-1}} \mathbf{D}(t_{\eta_q}) dt_{\eta_q} \dots dt_1 \mathbf{u}_d^*(jh) \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}(t_{\eta_q}) =$$

$$\begin{bmatrix} L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{f}}^{\eta_q-1} g_q(\mathbf{x}_d^*(t_{\eta_q})) - L_{\mathbf{b}_1} L_{\mathbf{f}}^{\eta_q-1} g_q(\mathbf{x}_{k-i}(t_{\eta_q})) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{b}_r} L_{\mathbf{f}}^{\eta_q-1} g_q(\mathbf{x}_d^*(t_{\eta_q})) - L_{\mathbf{b}_r} L_{\mathbf{f}}^{\eta_q-1} g_q(\mathbf{x}_{k-i}(t_{\eta_q})) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{E}_{k-i}(jh) =$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} e_{1,k-i}^*(jh) + l_{12} e_{1,k-i}^*(jh-h) + \dots \\ \quad + l_{1\eta_1} e_{1,k-i}^*(jh - \eta_1 h + h) \\ \vdots \\ l_{m1} e_{m,k-i}^*(jh) + l_{m2} e_{m,k-i}^*(jh-h) + \dots \\ \quad + l_{m\eta_m} e_{m,k-i}^*(jh - \eta_m h + h) \end{bmatrix} \quad (\text{A4})$$

对式 (A1) 两边取范数, 并利用条件 C4, 可得:

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(jh)\| &\leq \rho \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh)\| + c_{\Gamma} \|\mathbf{E}_{k-i}(jh)\| + \\ &c_{\Gamma} (\|\mathbf{W}_{k-i}(jh)\| + \|\mathbf{V}_{k-i}(jh)\|) \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

其中,  $c_{\Gamma}$  为  $\Gamma_{k-i}(jh)$  范数的界. 对式 (A3) 两边取范数, 在假设 A3 成立时有:

$$\|\mathbf{W}_{k-i}(jh)\| \leq c_1 \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh)\| \quad (\text{A6})$$

这里,  $c_1 = \max_{1 \leq i \leq m} [1 + h + \dots + h^{\eta_i-1} / (\eta_i - 1)!] l_{\mathbf{f}g}$ . 对

式 (A3) 两边取范数,

$$\|\mathbf{V}_{k-i}(jh)\| \leq c_2 \times \left\| \begin{bmatrix} \int_{j_h}^{j_h+h} \int_{j_h}^{t_1} \cdots \int_{j_h}^{t_{\eta_1-1}} \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(t_{\eta_1})\| dt_{\eta_1} \cdots dt_1 \\ \vdots \\ \int_{j_h}^{j_h+h} \int_{j_h}^{t_1} \cdots \int_{j_h}^{t_{\eta_m-1}} \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(t_{\eta_m})\| dt_{\eta_m} \cdots dt_1 \end{bmatrix} \right\| \quad (\text{A7})$$

其中,  $c_2 = l_{fg} + r l_{bfg} c_{u^*}$ , 并且,  $c_{u^*} = \max_{0 \leq j \leq N-1} \|\mathbf{u}_d^*(jh)\|$ . 进一步地, 利用式 (14),

$$\|\mathbf{V}_{k-i}(jh)\| \leq c_2 c_4 c_h \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh)\| + c_2 c_5 c_h (e^{c_3 h} - 1) \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh)\| \quad (\text{A8})$$

其中,  $c_h = \max\{h^{\eta_1}/\eta_1!, \dots, h^{\eta_m}/\eta_m!\}$ . 对式 (A4) 两边取范数, 并依据  $e_{q,k-i}^*(jh)$  的定义, 有:

$$\|\mathbf{E}_{k-i}(jh)\| \leq l_g l_{\max} \sum_{j_1=1}^{\eta} \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh - j_1 h + h)\| \quad (\text{A9})$$

其中,  $l_{\max} = \max\{l_{11}, \dots, l_{1\eta_1}, \dots, l_{m\eta_m}\}$ ,  $\eta = \max\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ .

将式 (A6)、(A8) 和 (A9) 代入式 (A5), 可得:

$$\|\Delta \mathbf{u}_{k+1}^*(jh)\| \leq \hat{\rho} \|\Delta \mathbf{u}_{k-i}^*(jh)\| + c_6 \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh)\| + c_{\Gamma} l_g l_{\max} \sum_{j_1=1}^{\eta} \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh - j_1 h + h)\| \quad (\text{A10})$$

式中,  $\hat{\rho} = \rho + c_h c_{\Gamma} c_2 c_5 (e^{c_3 h} - 1)$ ,  $c_6 = c_{\Gamma} c_1 + c_{\Gamma} c_h c_2 c_4$ .

当  $j = 0$  时, 由于  $\|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(0)\| \leq \varepsilon^*$ , 依据引理 1, 由式 (A10) 可得:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(0)\| \leq c_u^0 \varepsilon^* \quad (\text{A11})$$

其中,  $c_u^0 = (c_6 + c_{\Gamma} l_g l_{\max}) / (1 - \hat{\rho})$ .

当  $j = 1$  时, 结合式 (14) 和 (A11),

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(h)\| \leq c_x^1 \varepsilon^* \quad (\text{A12})$$

这里,  $c_x^1 = c_4 + (e^{c_3 h} - 1) c_5 c_u^0$ . 因而, 由式 (A10) 可得:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(h)\| \leq c_u^1 \varepsilon^*$$

式中,  $c_u^1 = [c_6 c_x^1 + c_{\Gamma} l_{\max} l_g (c_x^1 + 1)] / (1 - \hat{\rho})$ .

应用归纳法, 对于  $0 \leq j \leq l-1$ , 假设下式成立:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(jh)\| \leq c_u^j \varepsilon^* \quad (\text{A13})$$

这样, 当  $j = l$  时, 结合式 (14) 和 (A13),

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(lh)\| \leq c_x^l \varepsilon^* \quad (\text{A14})$$

其中,  $c_x^l = c_4 c_x^{l-1} + (e^{c_3 h} - 1) c_5 c_u^{l-1}$ . 进一步地, 由引理 1 得:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(lh)\| \leq c_u^l \varepsilon^*$$

式中,  $c_u^l = [c_6 c_x^l + c_{\Gamma} l_{\max} l_g \sum_{i=l-\eta+1}^l c_x^i] / (1 - \hat{\rho})$ . 这里,  $c_x^0 = 1$ ; 当  $i < 0$  时,  $c_x^i = 0$ .

由数学归纳法可知, 对所有  $0 \leq j \leq N-1$ , 都满足

$$\|\Delta \mathbf{x}_{k-i}^*(jh)\| \leq c_x^j \varepsilon^* \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{u}_k^*(jh)\| \leq c_u^j \varepsilon^*$$

其中,  $c_x^j = c_4 c_x^{j-1} + (e^{c_3 h} - 1) c_5 c_u^{j-1}$ ,  $c_u^j = [c_6 c_x^j + c_{\Gamma} l_{\max} l_g \sum_{i=j-\eta+1}^j c_x^i] / (1 - \hat{\rho})$ . 这里的  $c_x^i$  须满足:  $c_x^0 = 1$ ; 若  $i < 0$ ,  $c_x^i = 0$ .  $\square$

## References

- 1 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, **1**(2): 123-140
- 2 Hauser J E. Learning control for a class of nonlinear systems. In: Proceedings of the 26th IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles, USA: IEEE, 1987. 859-860
- 3 Wu Dong-Nan, Cheng Mian, Gao Wei-Bing. Learning control under multistep modification law. *Acta Automatica Sinica*, 1989, **15**(5): 445-449  
(吴东南, 程勉, 高为炳. 多步控制修正下的学习控制. 自动化学报, 1989, **15**(5): 445-449)
- 4 Sugie T, Ono T. An iterative learning control law for dynamical systems. *Automatica*, 1991, **27**(4): 729-732
- 5 Zeng Nan, Ying Xing-Ren. Iterative learning control algorithm for linear dynamical systems. *Acta Automatica Sinica*, 1992, **18**(2): 168-176  
(曾南, 应行仁. 非线性系统迭代学习算法. 自动化学报, 1992, **18**(2): 168-176)
- 6 Ahn H S, Choi C H, Kim K B. Iterative learning control for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 1993, **29**(6): 1575-1578
- 7 Xie S L, Tian S P, Xie Z D. New iterative learning control algorithms based on vector plots analysis. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(2): 161-168
- 8 Hou Z S, Xu J X. A new feedback-feedforward configuration for the iterative learning control of a class of discrete-time systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(3): 323-326
- 9 Tso S K, Ma Y X. Discrete learning control for robots: strategy, convergence and robustness. *International Journal of Control*, 1993, **57**(2): 273-291
- 10 Chien C J. The sampled-data iterative learning control for nonlinear systems. In: Proceeding of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, California, USA: IEEE, 1997. 4306-4311
- 11 Park K H, Bien Z, Hwang D H. Design of an iterative learning controller for a class of linear dynamic systems with time delay. *IEE Proceedings—Control Theory Applications*, 1998, **145**(6): 507-512
- 12 Sun M X, Wang D W. Sampled-data iterative learning control for nonlinear systems with arbitrary relative degree. *Automatica*, 2001, **37**(2): 283-289
- 13 Heinzinger G, Fenwick D, Paden B, Miyazaki F. Robust learning control. In: Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control. Tampa, Florida, USA: IEEE, 1989. 436-440

- 14 Lee H S, Bien Z. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error. *International Journal of Control*, 1996, **64**(3): 345–359
- 15 Park K H. A study on the robustness of a PID-type iterative learning controller against initial state error. *International Journal of Systems Science*, 1999, **30**(1): 49–59
- 16 Park K H. An average operator-based PD-type iterative learning control for variable initial state error. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(6): 865–869
- 17 Sun Ming-Xuan, Huang Bao-Jian, Zhang Xue-Zhi. PD-type iterative learning control for a class of nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 1998, **24**(5): 711–714  
(孙明轩, 黄宝健, 张学智. 非线性系统的 PD 型迭代学习控制. 自动化学报, 1998, **24**(5): 711–714)
- 18 Sun M X, Wang D W. Closed-loop iterative learning control for systems with initial shifts. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2002, **16**(7): 515–538
- 19 Porter B, Mohamed S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial impulsive action. *International Journal of Systems Science*, 1991, **22**(3): 447–454
- 20 Sun Ming-Xuan, Huang Bao-Jian, Zhang Xue-Zhi. PD-type iterative learning control for a class of uncertain time-delay systems with biased initial state. *Control Theory and Applications*, 1998, **15**(6): 853–858  
(孙明轩, 黄宝健, 张学智. 任意初态下不确定时滞系统的 PD 型迭代学习控制. 控制理论与应用, 1998, **15**(6): 853–858)
- 21 Sun M X, Wang D W. Initial condition issues on iterative learning control for non-linear systems with time delay. *International Journal of Systems Science*, 2001, **32**(11): 1365–1375
- 22 Sun M X, Wang D W, Wang Y Y. Varying-order iterative learning control against perturbed initial conditions. *Journal of The Franklin Institute*, 2010, **347**(8): 1526–1549
- 23 Pillay P, Krishnan R. Modeling, simulation, and analysis of permanent-magnet motor drives: I. the permanent-magnet synchronous motor drive. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 1989, **25**(2): 265–273



**孙明轩** 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为学习控制. 本文通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.  
(**SUN Ming-Xuan** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control. Corresponding author of this paper.)



**李芝乐** 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为学习控制. E-mail: Lizhile@163.com.  
(**LI Zhi-Le** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control.)



**朱胜** 浙江大学城市学院信电分院讲师、博士. 主要研究方向为学习控制. E-mail: zhusheng@zucc.edu.cn.  
(**ZHU Sheng** Lecturer at the College of Information and Electrical Engineering, Zhejiang University City College, Ph.D.. His main research interest is learning control.)