具有单重休假和修复不如新的两部件温贮备系统

刘海涛 [1] 孟宪云 [1]

摘 要 研究了修理工单重休假且由两个不同型部件和一个修理工组成的可修型温贮备系统. 系统考虑了在工作故障和贮备故障都不能 "修复如新", 部件 1 是修复非新而部件 2 修复如新的条件下, 假设部件的工作寿命、贮备寿命、故障后的修理时间和贮备故障后的修理时间均服从不同的指数分布, 修理工休假服从一般连续型分布. 运用几何过程理论、补充变量法、拉普拉斯变换及拉普拉斯–司梯阶变换, 得到了系统的可用度、可靠度和系统首次故障前平均时间等可靠性指标. 最后, 通过数值模拟验证了结果的有效性.

关键词 几何过程, 补充变量法, 休假, 马尔科夫过程, 拉普拉斯变换

引用格式 刘海涛, 孟宪云. 具有单重休假和修复不如新的两部件温贮备系统. 自动化学报, 2012, **38**(4): 639−646

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00639

A Warm Standby System with Repair of Non-new and Repairman Vacation

LIU Hai-Tao[1] MENG Xian-Yun[1]

Abstract A repairable warm standby system composed of two different components and one repairman who has vacation is studied. The system considers the work fault and standby fault is not "as good as new", and the repair of component 1 is not as good as new and repair of component 2 is as good as new. Assume that the working time, the standby time, the repair time after fault and the repair time after standby fault of two components are subject to different exponential distributions, and that the repairman vacation time obeys the general distribution. The system′s availability, reliability, the system average working time to first failure and other reliability indices are obtained by using the geometric process theory, the supplementary variable method, Laplace transform and Laplace-Stieltjes transform. Finally, a numerical example is given to simulate the effective of the results.

Key words Geometric process, supplementary variable, vacation, Markov process, Laplace transform

Citation Liu Hai-Tao, Meng Xian-Yun. A warm standby system with repair of non-new and repairman vacation. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(4): 639−646

温贮备可修系统的可靠性模型是系统可靠性工程理论和应用中重要的模型之一. 所谓温贮备是指贮备部件在贮备期间内可能失效, 部件的工作寿命分布与部件的贮备寿命分布一般不相同. 文献 [1−4] 研究了 "修复如新" 的可修系统, 并取得了不少成果. 在实际工程应用中, 系统的故障修理往往是不能够 "修复如新" 的. 随着时间的进程, 系统的寿命会逐渐递减, 则系统故障后修理的时间会越来越长. 最后系统将不能再工作也不能再修理, 这种过程被文献 [5] 描述为一种单调的几何过程, 并得到了广泛的应用. 文献 [6−7] 分别研究了两个不同型部件温贮备和冷贮备系统的几何过程模型, 并得到了系统的主要可靠性指标. 文献 [8] 研究了半马尔科夫决策过程的劣化系统检测与维修优化模型. 更多关于检测可修系统方面的研究可参考文献 [9−11].

在这些文献中, 作者都是假定部件故障后就立即对部件进行修理. 然而, 在工程实际中, 系统 (部件) 故障后由于各种原因而不能够立即修理. 针对这种情形, 研究者将修理工休假引入可修系统模型, 并对系统进行可靠性分析. 文献 [12] 对修理工多重休假的单部件可修退化系统进行了可靠性分析, 推导出系统的一些可靠性指标. 文献 [13] 研究了修理工休假的更换策略问题. 文献 [3] 对修理工可休假的单部件进行了可靠性分析, 得到了系统的主要可靠性指标. 对温贮备系统而言, 由于受部件的工作寿命和贮备寿命的分布不同, 部件的修理时间及贮备故障的修理时间一般也各不相同, 因而对修复非新的温贮备可修系统的研究是必要的. 文献 [2] 对有优先权且有两个不同修理工的两部件温贮备可修系统进行了可靠性分析. 在部件的工作故障和贮备故障的修理时间相同及部件修复如新的情况下, 得到了系统的可用度、可靠度等可靠性指标.

基于以上文献, 本文研究了修理工休假且部件 1 修复非新、部件 2 修复如新的可修温贮备系统. 利用

收稿日期 2011-03-10 录用日期 2011-11-10
Manuscript received March 10, 2011; accepted November 10, 2011
全国统计科学研究计划项目 (2010LC33) 资助
Supported by National Statistics Research Project in China (2010LC33)
本文责任编委 胡昌华
Recommended by Associate Editor HU Chang-Hua
1. 燕山大学理学院 秦皇岛 066004
1. College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004

几何过程理论和补充变量法, 求出了系统的可用度、可靠度等可靠性指标. 通过数值例子验证了该结果的有效性.

1 模型假定

假设 1. 系统由两个不同型部件和一个修理工组成.

假设 2. 在初始时刻两部件都是新的, 部件 1 工作, 部件 2 温贮备, 修理工空闲.

假设 3. 部件状态之间的转换通过转换开关实现, 开关完全可靠且在瞬间完成.

假设 4. 对部件 1 的修理是几何修理, 对部件 2 的修理则是修复如新.

假设 5. 由于在实际工程中, 任意指数分布是应用最广泛, 并且便于工程计算的一种分布. 因此, 设部件的工作寿命、贮备寿命、故障后的修理时间和贮备故障后的修理时间服从任意指数分布. 部件 i 的第 $n-1$ 次修理完成与第 n 次修理完成之间的间隔为系统的第 n 个周期 $n=1,2,\cdots$. 记 $X_n^{(i)}$, $A_n^{(i)}$, $Y_n^{(i)}$ 和 $B_n^{(i)}$ $(i=1,2)$ 分别为第 n 周期中部件 i 的工作寿命、贮备寿命、故障后的修理时间和贮备故障后的修理时间, 则其分布为

$$F_n^{(1)}(t)=F(a^{n-1}t)=1-\exp\{-a^{n-1}\lambda_1 t\}$$
$$V_n^{(1)}(t)=F(b^{n-1}t)=1-\exp\{-b^{n-1}v_1 t\}$$
$$G_n^{(1)}(t)=G(c^{n-1}t)=1-\exp\{-c^{n-1}\mu_1 t\}$$
$$W_n^{(1)}(t)=W(d^{n-1}t)=1-\exp\{-d^{n-1}w_1 t\}$$
$$F_n^{(2)}(t)=1-\exp\{-\lambda_2 t\}$$
$$V_n^{(2)}(t)=1-\exp\{v_2 t\}$$
$$G_n^{(2)}(t)=1-\exp\{\mu_2 t\}$$
$$W_n^{(2)}(t)=1-\exp\{w_2 t\}$$

其中, $t\geq 0$, $a>1$, $b>1$, $0<c<1$, $0<d<1$, $\lambda_i>0$, $v_i>0$, $\mu_i>0$, $w_i>0$; $i=1,2$; $n=1,2,\cdots$.

假设 6. 修理工休假结束后, 如果有部件失效则立即修理, 否则修理工空闲, 直到有部件失效时再进行修理; 如果在修理部件 1 的同时, 部件 2 也失效, 则部件 2 需等待修理, 直到系统中无故障部件修理工进行下一次休假; 如果修理工在休假结束前有部件失效, 则该失效部件需等待修理工休假结束后再进行修理. 记修理工的每次休假时间 $H(t)$ 服从一般连续型分布: $H(t)=\int_0^t h(x)\mathrm{d}x=1-\exp\{-\int_0^t v(x)\mathrm{d}x\}$ 且平均休假时间为 $1/v$.

假设 7. 部件的工作寿命、贮备寿命、故障后的修理时间、贮备故障后的修理时间和休假时间均为相互独立的随机变量.

2 模型分析

记 $N(t)$ 为系统在 t 时刻所处的状态, 则系统状态如下: $0=(d_1,d_2,V)$, $1=(d_1,w_2,V)$, $2=(o_1,s_2,V)$, $3=(o_2,s_1,V)$, $4=(o_1,d_2,V)$, $5=(o_1,w_2,V)$, $6=(o_1,d_1,V)$, $7=(o_2,w_1,V)$, $2'=(o_1,s_2,I)$, $3'=(o_2,\ s_1,\ I)$, $4'=(o_1,r_2)$, $5'=(o_1,p_2)$, $6'=(o_2,\ r_1)$, $7'=(o_2,p_1)$, $8'=(r_1,d_2)$, $9'=(p_1,d_2)$, $10'=(r_2,\ d_1)$, $11'=(p_2,d_1)$. 其中, (a,b,c) 表示系统中部件 1 处于状态 a, 部件 2 处于状态 b, 修理工处于状态 c; o_i 表示部件 i 在工作, s_i 表示部件 i 处于贮备状态, d_i 表示部件 i 因工作故障处于待修状态, w_i 表示部件 i 因贮备故障处于待修状态, r_i 表示部件 i 因工作故障处于修理状态, p_i 表示部件 i 因贮备故障处于修理状态, V 表示修理工休假, I 表示修理工空闲 $(i=1,2)$.

显然, 系统的状态空间为 $E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,2',3',4',5',6',7',8',9',10',11'\}$, $W=\{2,3,4,5,6,7,2',3',4',5',6',7'\}$ 为系统的工作状态, $F=\{0,1,8',9',10',11'\}$ 为系统的故障状态. 由模型假定可得此过程不是马尔科夫过程, 因而引入补充变量 $S(t)$ 表示部件 1 在时刻 t 的周期数, $Y(t)$ 为时刻 t 修理工已度过的休假时间, 则 $\{N(t),S(t),Y(t),t\geq 0\}$ 构成一个三维马尔科夫过程. 系统状态概率定义为 $p_{j',k}(t)=P\{N(t)=j',S(t)=k\}$, $j'=2',3',\cdots,11'$. $p_{j,k}(t,y)\mathrm{d}y=P\{N(t)=j,\ S(t)=k,\ y<Y(t)\leq y+\mathrm{d}y\}$, $j=0,1,2,\cdots,7$.

引入如下记号:

$$\hat{g}(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}H(x),\bar{H}(x)=1-H(x),\ \ x>0$$
$$p_{j,k}^*(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}p_{j,k}(t)\mathrm{d}t,\ \ s>0$$

3 主要结果及证明

定理 1. 系统的各个状态之间的拉普拉斯变换的关系表达式为

$$p_{0,k}^*(s,y)=[a^{k-1}\lambda_1 C_1(s)-\lambda_2 C_2(s)]\mathrm{e}^{-sy}\bar{H}(y)$$
$$p_{1,k}^*(s,y)=[a^{k-1}\lambda_1 C_1'(s)-v_2 C_2'(s)]\mathrm{e}^{-sy}\bar{H}(y)$$
$$p_{2,k}^*(s,y)=\mathrm{e}^{-(s+a^{k-1}\lambda_1+b^{k-1}v_1)y}\bar{H}(y)p_{2,k}^*(s,0)$$
$$p_{3,k}^*(s,y)=\mathrm{e}^{-(s+\lambda_2+v_2)y}\bar{H}(y)p_{3,k}^*(s,0)$$
$$p_{4,k}^*(s,y)=\frac{\lambda_2}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{e}^{-(s+a^{k-1}\lambda_1)y}\bar{H}(y)\times [\mathrm{e}^{(a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2)y}-1]p_{3,k}^*(s,0)$$

$$p^*_{5,k}(s,y)=\frac{v_2}{a^{k-1}\lambda_1-v_2}\mathrm{e}^{-(s+a^{k-1}\lambda_1)y}\bar{H}(y)\times$$
$$[\mathrm{e}^{(a^{k-1}\lambda_1-v_2)y}-1]p^*_{3,k}(s,0)$$
$$p^*_{6,k}(s,y)=\frac{a^{k-1}\lambda_1}{\lambda_2+v_2-a^{k-1}\lambda_1}\mathrm{e}^{-(s+\lambda_2+v_2)y}\bar{H}(y)\times$$
$$[\mathrm{e}^{(\lambda_2+v_2-a^{k-1}\lambda_1)y}-1]p^*_{2,k}(s,0)$$
$$p^*_{7,k}(s,y)=\mathrm{e}^{-sy}\bar{H}(y)[1-\mathrm{e}^{-b^{k-1}v_1y}]p^*_{2,k}(s,0)$$
$$p^*_{2',k}(s)=D_1(s)p^*_{2,k}(s,0)$$
$$p^*_{3',k}(s)=D_2(s)p^*_{3,k}(s,0)$$
$$p^*_{4',k}(s)=\frac{[\lambda_2D_2(s)+G_1(s)]p^*_{3,k}(s,0)}{s+a^{k-1}\lambda_1+\mu_2}+$$
$$\frac{c^{k-2}\mu_1p^*_{8',k-1}(s)+d^{k-2}w_1p^*_{9',k-1}(s)}{s+a^{k-1}\lambda_1+\mu_2}$$
$$p^*_{5',k}(s)=\frac{[\lambda_2D_2(s)+G'_1(s)]p^*_{3,k}(s,0)}{s+a^{k-1}\lambda_1+w_2}$$
$$p^*_{6',k}(s)=\frac{[a^{k-1}\lambda_1D_1(s)+G_2(s)]p^*_{2,k}(s,0)}{s+\lambda_2+c^{k-2}\mu_1}+$$
$$\frac{\mu_2p^*_{10',s}(s)+w_2p^*_{11',k}(s)}{s+\lambda_2+c^{k-2}\mu_1}$$
$$p^*_{7',k}(s)=\frac{[b^{k-1}v_1D_1(s)+G'_2(s)]p^*_{2,k}(s,0)}{s+\lambda_2+d^{k-2}w_1}$$
$$p^*_{8',k}(s)=\frac{1}{s+c^{k-1}\mu_1}\times$$
$$[\lambda_2p^*_{3,k+1}(s,0)+a^{k-1}\lambda_1W_1(s)+\lambda_2W_2(s)+$$
$$\frac{\lambda_2d^{k-2}w_1[b^{k-1}v_1D_1(s)+G'_2(s)]p^*_{2,k}(s,0)}{s+\lambda_2+d^{k-1}w_1}]$$
$$p^*_{9',k}(s)=\frac{1}{s+d^{k-1}w_1}[a^{k-1}\lambda_1W'_1(s)+\lambda_2W'_2(s)+$$
$$\frac{\lambda_2[b^{k-1}v_1D_1(s)+G'_2(s)]p^*_{2,k}(s,0)}{s+\lambda_2+d^{k-1}w_1}]$$
$$p^*_{10',k}(s)=\frac{1}{s+\mu_2}[a^{k-1}\lambda_1p^*_{2,k}(s,0)+a^{k-1}\lambda_1W_1(s)+$$
$$\lambda_2W_2(s)-\frac{w_2a^{k-1}\lambda_1[v_2D_2(s)+G'_1(s)]p^*_{3,k}(s,0)}{s+a^{k-1}\lambda_1+w_2}]$$
$$p^*_{11',k}(s)=\frac{1}{s+\mu_2}[a^{k-1}\lambda_1W'_1(s)+\lambda_2W'_2(s)+$$
$$\frac{a^{k-1}\lambda_1[v_2D_2(s)+G'_1(s)p^*_{3,k}(s,0)]}{s+a^{k-1}\lambda_1+w_2}]$$
$$p^*_{2',1}(s)=\frac{1}{s+\lambda_1+v_1}$$
$$p^*_{7',1}(s)=\frac{v_1}{(s+\lambda_1+v_1)(s+\lambda_2+w_1)}$$
$$p^*_{6',1}=\frac{\lambda_1}{(s+\lambda_1+v_1)(s+\lambda_2+\mu_1)}$$

其中

$$D_1(s)=\frac{\hat{g}(s+a^{k-1}\lambda_1+b^{k-1}v_1)}{s+a^{k-1}\lambda_1+b^{k-1}v_1}$$
$$D_2(s)=\frac{\hat{g}(s+\lambda_2+v_2)}{s+\lambda_2+v_2}$$
$$C_1(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda_2y}}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2}p^*_{3,k}(s,0)+$$
$$\frac{\lambda_2(1-\mathrm{e}^{-(\lambda_2+v_2)y})}{(a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2-v_2)(\lambda_2+v_2)}p^*_{2,k}(s,0)$$
$$C_2(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-a^{k-1}\lambda_1y}}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2}p^*_{3,k}(s,0)+$$
$$\frac{1-\mathrm{e}^{-a^{k-1}\lambda_1y}}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2-v_2}p^*_{2,k}(s,0)$$
$$C'_1(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-v_2y}}{a^{k-1}\lambda_1-v_2}p^*_{3,k}(s,0)+$$
$$\frac{v_2(1-\mathrm{e}^{-(\lambda_2+v_2)y})}{(a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2-v_2)(\lambda_2+v_2)}p^*_{2,k}(s,0)$$
$$C'_2(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-a^{k-1}\lambda_1y}}{a^{k-1}\lambda_1-v_2}p^*_{3,k}(s,0)+$$
$$\frac{1-\mathrm{e}^{-a^{k-1}\lambda_1y}}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2-v_2}p^*_{2,k}(s,0)$$
$$G_1(s)=\frac{\lambda_2}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2}(\hat{g}(s+\lambda_2)-\hat{g}(s+a^{k-1}\lambda_1))$$
$$G'_1(s)=\frac{v_2}{a^{k-1}\lambda_1-v_2}(\hat{g}(s+v_2)-\hat{g}(s+a^{k-1}\lambda_1))$$
$$G_2(s)=\frac{a^{k-1}\lambda_1}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2}(\hat{g}(s+\lambda_2)-\hat{g}(s+a^{k-1}\lambda_1))$$
$$G'_2(s)=\hat{g}(s)-\hat{g}(s+b^{k-1}v_1)$$
$$W_1(s)=\frac{p^*_{3,k}(s,0)}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2}(\hat{g}(s)-\hat{g}(s+\lambda_2))+$$
$$\frac{\lambda_2p^*_{2,k}(s,0)}{(a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2-v_2)(\lambda_2+v_2)}\times$$
$$(\hat{g}(s)-\hat{g}(s+\lambda_2+v_2))$$
$$W_2(s)=\frac{p^*_{3,k}(s,0)}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2}(\hat{g}(s)-\hat{g}(s+a^{k-1}\lambda_1))+$$
$$\frac{p^*_{2,k}(s,0)}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2-v_2}(\hat{g}(s)-\hat{g}(s+a^{k-1}\lambda_1))$$

$$W_1'(s)=\frac{p_{3,k}^*(s,0)}{a^{k-1}\lambda_1-v_2}(\hat{g}(s)-\hat{g}(s+v_2))+\frac{v_2p_{2,k}^*(s,0)}{(a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2-v_2)(\lambda_2+v_2)}\times(\hat{g}(s)-\hat{g}(s+\lambda_2+v_2))$$

$$W_2'(s)=\frac{p_{3,k}^*(s,0)}{a^{k-1}\lambda_1-v_2}(\hat{g}(s)-\hat{g}(s+a^{k-1}\lambda_1))+\frac{p_{2,k}^*(s,0)}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2-v_2}(\hat{g}(s)-\hat{g}(s+a^{k-1}\lambda_1))$$

证明. 根据模型假定及系统分析, 容易建立系统所有状态概率微分方程组分别为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+v(y)\right)p_{0,k}(t,y)=a^{k-1}\lambda_1p_{4,k}(t,y)+\lambda_2p_{6,k}(t,y)\tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+v(y)\right)p_{1,k}(t,y)=a^{k-1}\lambda_1p_{4,k}(t,y)+v_2p_{6,k}(t,y)\tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+a^{k-1}\lambda_1+b^{k-1}v_1+v(y)\right)p_{2,k}(t,y)=0\tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+\lambda_2+v_2+v(y)\right)p_{3,k}(t,y)=0\tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+a^{k-1}\lambda_1+v(y)\right)p_{4,k}(t,y)=\lambda_2p_{3,k}(t,y)\tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+a^{k-1}\lambda_1+v(y)\right)p_{5,k}(t,y)=v_2p_{3,k}(t,y)\tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+\lambda_2+v_2+v(y)\right)p_{6,k}(t,y)=a^{k-1}\lambda_1p_{2,k}(t,y)\tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+v(y)\right)p_{7,k}(t,y)=b^{k-1}v_1p_{2,k}(t,y)\tag{8}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a^{k-1}\lambda_1+b^{k-1}v_1\right)p_{2',k}(t)=\int_0^\infty p_{2,k}(t,y)v(y)\mathrm{d}y\tag{9}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\lambda_2+v_2\right)p_{3',k}(t)=\int_0^\infty p_{3,k}(t,y)v(y)\mathrm{d}y\tag{10}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a^{k-1}\lambda_1+\mu_2\right)p_{4',k}(t)=c^{k-2}\mu_1p_{8',k}(t)+\lambda_2p_{3',k}(t)+d^{k-2}w_1p_{9',k}(t)+\int_0^\infty p_{4,k}(t,y)v(y)\mathrm{d}y\tag{11}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a^{k-1}\lambda_1+w_2\right)p_{5',k}(t)=v_2p_{3',k}(t)+\int_0^\infty p_{5,k}(t,y)v(y)\mathrm{d}y\tag{12}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\lambda_2+b^{k-1}\mu_1\right)p_{6',k}(t)=a^{k-1}\lambda_1p_{2',k}(t)+\mu_2p_{10',k}(t)+w_2p_{11',k}(t)+\int_0^\infty p_{6,k}(t,y)v(y)\mathrm{d}y\tag{13}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\lambda_2+d^{k-1}w_1\right)p_{7',k}(t)=b^{k-1}v_1p_{2',k}(t)+\int_0^\infty p_{7,k}(t,y)v(y)\mathrm{d}y\tag{14}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+c^{k-1}\mu_1\right)p_{8',k}(t)=\int_0^\infty p_{0,k}(t,y)v(y)\mathrm{d}y+\lambda_2p_{6',k}(t)\tag{15}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+d^{k-1}w_1\right)p_{9',k}(t)=\lambda_2p_{7',k}(t)+\int_0^\infty p_{1,k}(t,y)v(y)\mathrm{d}y\tag{16}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\mu_2\right)p_{10',k}(t)=a^{k-1}\lambda_1p_{4',k}(t)+\int_0^\infty p_{0,k}(t,y)v(y)\mathrm{d}y\tag{17}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+w_2\right)p_{11',k}(t)=a^{k-1}\lambda_1p_{5',k}(t)+\int_0^\infty p_{1,k}(t,y)v(y)\mathrm{d}y\tag{18}$$

边界条件为

$$p_{2k}(t,0)=\mu_2p_{4',k}(t)+w_2p_{5',k}(t)$$

$$p_{3,k}(t,0)=c^{k-2}\mu_1 p_{6',k-1}(t)+d^{k-2}w_1 p_{7',k-1}(t)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\lambda_2+\mu_1\right)p_{6',1}(t)=\lambda_1 p_{2',1}(t)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\lambda_2+w_1\right)p_{7',1}(t)=v_1 p_{2',1}(t)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\mu_1\right)p_{8',1}(t)=\lambda_2 p_{6',1}(t)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+w_1\right)p_{9',1}(t)=\lambda_2 p_{7',1}(t)$$

$$p_{j,k}(t,0)=0,\ j=0,1,4,5,6,7,\ \ k\geq 1$$

$$p_{2,1}(t,0)=p_{3,1}(t,0)=0$$

$$p_{j',1}(t,0)=0,\ \ j'=3',4',5',10',11'$$

初始条件为 $p_{2',1}(0)=1$, 其余为 0. 对方程 (1)∼(18) 两边及边界条件做拉普拉斯变换并求解即得结论. □

定理 2. 设系统的瞬时可用度为 $A(t)$, 则其拉普拉斯变换为

$$A^*(s)=\left[\frac{1}{s+\lambda_1+v_1}+\frac{\lambda_1}{(s+\lambda_1+v_1)(s+\lambda_2+\mu_1)}+\frac{v_1}{(s+\lambda_1+v_1)(s+\lambda_2+w_1)}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j'=2'}^{7'}p^*_{j',k}(s)+\sum_{k=2}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{j=2}^{7}p^*_{j,k}(s,y)\mathrm{d}y \tag{19}$$

证明. 系统的瞬时可用度是指在时刻 t 系统处于正常状态的概率, 则有

$$A(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j'=2}^{7'}p_{j',k}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{j=2}^{7}p_{j,k}(t,y)\mathrm{d}y$$

对其做拉普拉斯变换得:

$$A^*(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j'=2}^{7'}p^*_{j',k}(s)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{j=2}^{7}p^*_{j,k}(s,y)\mathrm{d}y \tag{20}$$

由定理 1 的结果代入式 (20) 即可得式 (19). □

定理 3. 设系统的可靠度为 $R(t)$, 则其拉普拉斯变换为

$$R^*(s)=\left[\frac{1}{s+\lambda_1+v_1}+\frac{\lambda_1}{(s+\lambda_1+v_1)(s+\lambda_2+\mu_1)}+\frac{v_1}{(s+\lambda_1+v_1)(s+\lambda_2+w_1)}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j'=2'}^{7'}Q^*_{j',k}(s)+\sum_{k=2}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{j=2}^{7}Q^*_{j,k}(s,y)\mathrm{d}y \tag{21}$$

证明. 为了求系统的可靠度 $R(t)$, 只需在基本模型中令故障状态 $F=\{0,1,8',9',10',11'\}$ 为吸收状态. 这样就定义了一个新的随机过程 $\{\tilde{N}(t), S(t), Y(t),\ t\geq 0\}$, 其中 $\tilde{N}(t)$ 系统在时刻 t 所处的状态. 此时, 系统的状态概率定义为 $Q_{j',k}(t)=P\{\tilde{N}(t)=j',\ S(t)=k\}$, $j'=2',3',\cdots,7'$, $k\geq 2$. $Q_{j,k}(t,y)\mathrm{d}y=P\{\tilde{N}(t)=j,\ S(t)=k,\ y<Y(t)\leq y+\mathrm{d}y\}$, $j=2,3,\cdots,7$, $k\geq 1$.

边界条件为

$$Q_{2,k}(t,0)=\mu_2 Q_{4',k}(t)+w_2 Q_{5',k}(t)$$

$$Q_{3,k}(t,0)=c^{k-2}\mu_1 Q_{6',k-1}(t)+d^{k-2}w_1 Q_{7',k-1}(t)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\lambda_2+\mu_1\right)Q_{6',1}(t)=\lambda_1 Q_{2',1}(t)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\lambda_2+w_1\right)Q_{7',1}(t)=v_1 Q_{2',1}(t)$$

$$Q_{j,k}(t,0)=0,\ \ j=4,5,6,7,\ \ k\geq 1$$

$$Q_{2,1}(t,0)=Q_{3,1}(t,0)=0$$

$$Q_{j',1}(t,0)=0,\ \ j'=3',4',5'$$

初始条件为 $Q_{2',1}(0)=1$, 其余为 0. 则有

$$R(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j'=2'}^{7'}Q_{j',k}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{j=2}^{7}Q_{j,k}(t,y)\mathrm{d}y$$

对其做拉普拉斯变换得:

$$R^*(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j'=2'}^{7'}Q^*_{j',k}(s)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{j=2}^{7}Q^*_{j,k}(s,y)\mathrm{d}y \tag{22}$$

当 $k \geq 2$ 时, 根据前面分析同样可得:

$$
\begin{aligned}
Q^*_{2,k}(s,y) &= \mathrm{e}^{-(s+a^{k-1}\lambda_1+b^{k-1}v_1)y}\bar{H}(y)Q^*_{2,k}(s,0)\\
Q^*_{3,k}(s,y) &= \mathrm{e}^{-(s+\lambda_2+v_2)y}\bar{H}(y)Q^*_{3,k}(s,0)\\
Q^*_{4,k}(s,y) &= \frac{\lambda_2}{a^{k-1}\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{e}^{-(s+a^{k-1}\lambda_1)y}\bar{H}(y)\times\\
&\quad [\mathrm{e}^{(a^{k-1}\lambda_1-v_2)y}-1]Q^*_{3,k}(s,0)\\
Q^*_{5,k}(s,y) &= \frac{v_2}{a^{k-1}\lambda_1-v_2}\mathrm{e}^{-(s+a^{k-1}\lambda_1)y}\bar{H}(y)\times\\
&\quad [\mathrm{e}^{(a^{k-1}\lambda_1-v_2)y}-1]Q^*_{3,k}(s,0)\\
Q^*_{6,k}(s,y) &= \frac{a^{k-1}\lambda_1}{\lambda_2+v_2-a^{k-1}\lambda_1}\mathrm{e}^{-(s+\lambda_2+v_2)y}\bar{H}(y)\times\\
&\quad [\mathrm{e}^{(\lambda_2+v_2-a^{k-1}\lambda_1)y}-1]Q^*_{2,k}(s,0)\\
Q^*_{7,k}(s,y) &= \mathrm{e}^{-sy}\bar{H}(y)[1-\mathrm{e}^{-b^{k-1}v_1y}]Q^*_{2,k}(s,0)\\
Q^*_{2',k}(s) &= D_1(s)Q^*_{2,k}(s,0)\\
Q^*_{3',k}(s) &= D_2(s)Q^*_{3,k}(s,0)\\
Q^*_{4',k}(s) &= \frac{(\lambda_2D_2(s)+G_1(s))Q^*_{3,k}(s,0)}{s+a^{k-1}\lambda_1+\mu_2}\\
Q^*_{5',k}(s) &= \frac{(\lambda_2D_2(s)+G'_1(s))Q^*_{3,k}(s,0)}{s+a^{k-1}\lambda_1+w_2}\\
Q^*_{6',k}(s) &= \frac{(a^{k-1}\lambda_1D_1(s)+G_2(s))Q^*_{2,k}(s,0)}{s+\lambda_2+c^{k-2}\mu_1}\\
Q^*_{7',k}(s) &= \frac{(b^{k-1}v_1D_1(s)+G'_2(s))Q^*_{2,k}(s,0)}{s+\lambda_2+d^{k-2}w_1}
\end{aligned}
$$

由边界条件及初始条件得:

$$
\begin{aligned}
Q^*_{2',1}(s) &= \frac{1}{s+\lambda_1+v_1}\\
Q^*_{6',1}(s) &= \frac{\lambda_1}{(s+\lambda_1+v_1)(s+\lambda_2+\mu_1)}\\
Q^*_{7',1}(s) &= \frac{v_1}{(s+\lambda_1+v_1)(s+\lambda_2+w_1)}\\
Q^*_{j,1}(s,y) &= 0,\ \ j=2,3,\cdots,7
\end{aligned}
$$

从而解得:

$$
\begin{aligned}
Q^*_{3,2}(s,0) = {} & \frac{\lambda_1\mu_1}{(s+\lambda_1+v_1)(s+\lambda_2+\mu_1)}+\\
& \frac{v_1w_1}{(s+\lambda_1+v_1)(s+\lambda_2+w_1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^*_{2,k}(s,0) = {} & \left[\frac{\mu_2(\lambda_2D_2(s)+G_1(s))}{s+a^{k-1}\lambda_1+\mu_2}+\right.\\
& \left.\frac{w_2(v_2D_2(s)+G'_1(s))}{s+a^{k-1}\lambda_1+w_2}\right]Q^*_{3,k}(s,0)\\
Q^*_{3,k}(s,0) = {} & \prod_{i=2}^{k}\left[\frac{c^{i-2}\mu_1(a^{i-2}\lambda_1D_1(s)+G_2(s))}{s+\lambda_2+c^{i-2}\mu_1}+\right.\\
& \left.\frac{d^{i-2}w_1(b^{i-2}v_1D_1(s)+G'_2(s))}{s+\lambda_2+d^{i-2}w_1}\right]\times\\
& \left[\frac{\mu_2(\lambda_2D_2(s)+G_1(s))}{s+a^{i-2}\lambda_1+\mu_2}+\right.\\
& \left.\frac{w_2(v_2D_2(s)+G'_1(s))}{s+a^{i-2}\lambda_1+w_1}\right]Q^*_{3,2}(s,0)
\end{aligned}
$$

将以上结果代入式 (22), 即可得式 (21). □

定理 4. 系统首次故障前的平均时间为

$$
\begin{aligned}
MTTFF = {} & \left[\frac{1}{\lambda_1+v_1}+\frac{\lambda_1}{(\lambda_1+v_1)(\lambda_2+\mu_1)}+\right.\\
& \left.\frac{v_1}{(\lambda_1+v_1)(\lambda_2+w_1)}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j'=2'}^{7}Q^*_{j',k}(0)+\\
& \sum_{k=2}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{j=2}^{7}Q^*_{j,k}(0,y)\mathrm{d}y \qquad (23)
\end{aligned}
$$

证明. 运用拉普拉斯变换的性质 $MTTFF = \int_0^{+\infty}R(t)\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0}R^*(s)$ 及定理 3 可得式 (23). □

定理 5. 设修理工处于空闲状态的概率为 $I(t)$, 则其拉普拉斯变换为

$$
I^*(s) = \frac{1}{s+\lambda_1+v_1}+\sum_{k=2}^{\infty}[p^*_{2',k}(s)+p^*_{3',k}(s)] \qquad (24)
$$

证明. 由系统模型分析可知, 只有当系统处于 $2'$, $3'$ 状态时, 修理工才会空闲. 所以修理工在时刻 t 空闲的概率为 $I(t)=\sum_{k=1}^{\infty}[p_{2',k}(t)+p_{3',k}(t)]$. 对其做拉普拉斯变换得:

$$
I^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty}[p^*_{2',k}(s)+p^*_{3',k}(s)] \qquad (25)
$$

由前面分析的结果代入式 (25), 即可得式 (24). □

定理 6. 设修理工处于休假状态的概率为 $V(t)$, 则其拉普拉斯变换为

$$
V^*(s) = \sum_{k=2}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{7}p^*_{j,k}(s,y)\mathrm{d}y \qquad (26)
$$

证明. 由系统模型分析可知, 只有当系统处于 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 状态时, 修理工才会休

假. 所以修理工在时刻 t 休假的概率为 $V(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{7}p_{j,k}(t,y)\mathrm{d}y$. 对其做拉普拉斯变换得

$$V^*(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{7}p_{j,k}^*(s,y)\mathrm{d}y \qquad (27)$$

由前面分析的结果代入式 (27), 即可得式 (26). □

4 实例分析

由以上结果可以发现系统的瞬时可靠性指标是很难得到的, 一般只能得到系统可靠性指标的稳态结果. 因此, 在实际工程应用中, 经常通过 Runge-Kutta 方法来进行数值模拟. 由式 (21), 对 $R^*(s)$ 做拉普拉斯逆变换得到 $R(t)$, 令 $\lambda_1=0.01$, $\lambda_2=0.1$, $v_1=0.02$, $\mu_1=0.1$, $w_1=0.05$. 当 $k=1$, $t=10$, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 时, 通过 Matlab 软件, 得到了 $Q_{j,1}(t)$, $j=2'$, $6'$, $7'$ 的近似解 (见表 1) 和仿真模拟图 1.

表 1　$Q_{j,1}(t)$ 在时刻 t 的近似结果

Table 1　The approximate results of $Q_{j,1}(t)$ at time t

	$Q_{2',1}(t)$	$Q_{6',1}(t)$	$Q_{7',1}(t)$
$t=10$	0.7408	0.0356	0.0863
$t=15$	0.6376	0.0346	0.0887
$t=20$	0.5488	0.0312	0.0832
$t=25$	0.4724	0.0274	0.0748
$t=30$	0.4066	0.0234	0.0659
$t=35$	0.3499	0.0205	0.0574
$t=40$	0.3012	0.0177	0.0498
$t=45$	0.2592	0.0152	0.0430

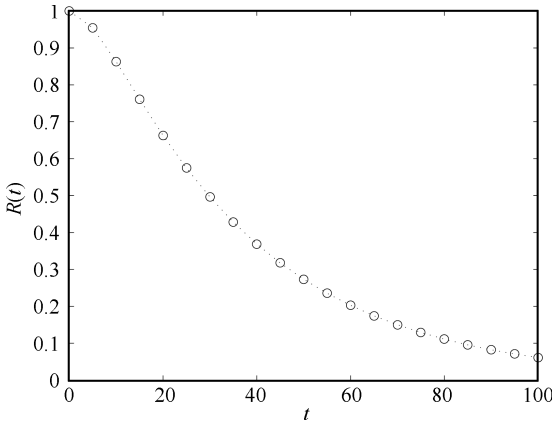


图 1　可靠度 $R(t)$ 随时间 t 的变化曲线

Fig. 1　The curve of the reliability $R(t)$ with t

因此, 进一步可以得到 $R(t)$ 的近似解为 $R(t)\approx Q_{2',1}(t)+Q_{6',1}(t)+Q_{7',1}(t)$. 在 $t=10,15,20,25,30,35,40,45$ 时, $R(t)$ 分别为 $R(10)=0.8627$, $R(15)=0.7609$, $R(20)=0.6632$, $R(25)=0.5746$, $R(30)=0.4959$, $R(35)=0.4278$, $R(40)=0.3687$, $R(45)=0.3174$. 由以上结果和图 1, 随着时间 t 的不断增长, 系统可靠度 $R(t)$ 越来越小. 该结果与本文研究的系统相吻合, 体现了该方法的有效性.

由式 (24), 对 $I^*(s)$ 做拉普拉斯逆变换得到 $I(t)$, 令 $\lambda_1=0.01$, $v_1=0.02$. 当 $k=1$, $t=10$, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 时, 通过 Matlab 软件, 得到了 $p_{2',1}(t)$ 的近似解如表 1 中 $Q_{2',1}(t)$ 的值. 可以看出, 随着时间 t 的不断增长, 修理工空闲的概率 $I(t)$ 越来越小. 由于部件 1 修复非新, 修理时间就会越来越长, 导致了修理工空闲的时间就越来越短, 体现了该方法的有效性. 利用类似的方法, 可以对其他结果进行数值模拟.

5 分析讨论

1) 如果对系统状态 $2'$, $3'$ 不作考虑时, 所研究的系统为修理工具有多重休假和修复不如新的温贮备可修系统. 依照本文的研究方法, 可得到其相应的可靠性指标.

2) 如果 $w_1=w_2=0$ 时, 所研究的系统为修理工具有单重休假和修复不如新的两个不同部件温贮备系统的另一种情况, 即部件工作故障后的修理时间与贮备故障后的修理时间服从相同指数分布的情形. 依照本文的研究方法, 可得到其相应的可靠性指标. 同理, 在此情况下, 利用相同的方法可讨论修理工具有多重休假和修复不如新的两不同型部件温贮备可修系统.

3) 如果 $v_1=v_2=0$, $w_1=w_2=0$ 时, 所研究的系统为修理工具有单重休假和修复不如新的两个不同部件冷贮备系统. 依照本文的研究方法, 可得到其相应的可靠性指标. 同理, 在此情况下, 利用相同的方法可讨论修理工具有多重休假和修复不如新的冷贮备可修系统.

6 结语

在系统可靠性工程分析中, 修理工可休假和修复非新的温贮备系统具有一定的理论和实际意义. 本文在参考文献的基础上, 考虑了修理工单重休假且部件修复如新和修复非新相结合的温贮备可修系统. 利用几何过程理论、补充变量法、拉普拉斯变换及拉普拉斯 – 司梯阶变换, 得到了其可靠性指标. 通过数值例子验证了结果的有效性. 该系统对于企业工作者合理利用及维护机器设备, 降低成本, 即提高企业的经济效益提供了一定的理论依据和参考价值.

References

1 Cao Jin-Hua, Cheng Kan. *Introduction to Mathematical Theory of Reliability*. Beijing: Science Press, 1986
(曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论. 北京: 科学出版社, 1986)

2 Meng Xian-Yun, Liu Yan, Chen Guang-Juan, Liu Le-Chun, Yin Rui-Ling, Yuan Li. Reliability analysis of warm standby repairable system of two components with continuous lifetime switch and priority. *Journal of Yanshan University*, 2006, **30**(1): 51−56
(孟宪云, 刘艳, 陈广娟, 刘乐春, 阴瑞玲, 袁丽. 有优先权且有两个不同修理工的两部件温贮备可修系统的可靠性分析. 燕山大学学报, 2006, **30**(1): 51−56)

3 Tang Ying-Hui, Liu Xiao-Yun. Reliability analysis of one unit repairable system with repairman vacation. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(3): 466−470
(唐应辉, 刘晓云. 修理工带休假的单部件可修系统的可靠性分析. 自动化学报, 2004, **30**(3): 466−470)

4 Yuan L, Meng X Y. Reliability analysis of a warm standby repairable system with priority in use. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, **35**(9): 4295−4303

5 Lam Y. Geometric process and replacement problem. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1988, **4**(4): 366−377

6 Liu Hai-Tao, Meng Xian-Yun, Li Fang, Fu Qin-Hui, Zhang Jian-Long. A geometric process model for two different components of warm standby system. *Systems Engineering*, 2010, **28**(9): 103−107
(刘海涛, 孟宪云, 李芳, 付钦慧, 张建龙. 两个不同型部件温贮备系统的几何过程模型. 系统工程, 2010, **28**(9): 103−107)

7 Meng Xian-Yun, Liu Hai-Tao, Li Fang, Zhang Jian-Long, Fu Qin-Hui. Geometric process model for two type components in cold standby system. *Journal of Liaoning Technical University (Natural Science)*, 2011, **30**(1): 146−149
(孟宪云, 刘海涛, 李芳, 张建龙, 付钦慧. 两个不同型部件冷贮备系统的几何过程模型. 辽宁工程技术大学学报 (自然科学版), 2011, **30**(1): 146−149)

8 Cheng Zhi-Jun, Guo Bo. Optimization of inspection and maintenance policy for deteriorating system with semi-Markov decision. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(10): 1101−1104
(程志军, 郭波. 基于半 Markov 决策过程的劣化系统检测与维修优化模型. 自动化学报, 2007, **33**(10): 1101−1104)

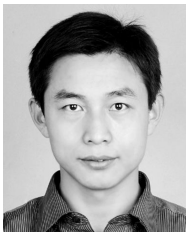
9 Su Bao-He, Lin Fu-Yong, Zhang Wen-Guo, Liu Bao-You. Research on the inspection polices of 2-failure-model systems. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(4): 544−549

10 Su Bao-He. Reliability indices and optimal checking policies for a repairable system. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(1): 116−119
(苏保河. 一类可修系统的可靠性指标和最优检测策略. 自动化学报, 2002, **28**(1): 116−119)

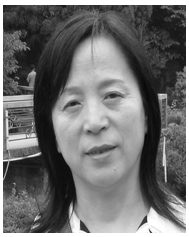
11 Liu Bao-You, Su Bao-He. Diagnostic repairable system of special state and special repair. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(1): 97−106, 119
(刘宝友, 苏保河. 特殊状态需要特殊修理的诊断可修系统. 自动化学报, 2002, **28**(1): 97−106, 119)

12 Yuan L, Xu J. A deteriorating system with its repairman having multiple vacations. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, **217**(10): 4980−4989

13 Yuan L, Xu J. An optimal replacement policy for a repairable system based on its repairman having vacations. *Reliability Engineering and System Safety*, 2011, **96**(7): 868−875



刘海涛 燕山大学理学院硕士研究生. 主要研究方向为可靠性理论及应用.
E-mail: liuhaitao-dahai@163.com
(**LIU Hai-Tao** Master student at the College of Science, Yanshan University. His research interest covers reliability theory and application.)



孟宪云 燕山大学理学院教授. 主要研究方向为可靠性理论及应用. 本文通信作者.
E-mail: mengxianyun2008@126.com
(**MENG Xian-Yun** Professor at the College of Science, Yanshan University. Her research interest covers reliability theory and application. Corresponding author of this paper.)