

线性不确定系统信息受限下的远程跟踪

王隔霞¹

摘要 研究了信息受限下一类线性不确定系统的跟踪调节问题. 假定由高阶微分方程产生的参考信号与受控系统(不确定线性系统)通过有限容量信道相连. 针对该信号设计了具体的编码方式,并在受控系统端重构了该参考信号,进而依据此重构信号设计了跟踪控制器,最终到达了跟踪目标. 最后数值例子验证了本文结论的有效性.

关键词 网络化控制系统,跟踪,线性不确定系统,信息受限

引用格式 王隔霞. 线性不确定系统信息受限下的远程跟踪. 自动化学报, 2012, 38(4): 632–638

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00632

Remote Output Regulation for Linear Uncertain Systems via a Limited Capacity Communication Channel

WANG Ge-Xia¹

Abstract This note considers the output regulation problem for linear uncertainty systems via a limited capacity channel. The object is to control an uncertain system so as to reject the disturbances and have its output tracking reference commands generated at a remote location and transmitted through the communication channel. A controller is designed to achieve the control goal using the reconstructed commands. Finally, one simulation example is given to illustrate the validity of our proposed approach.

Key words Networked control systems (NCSs), tracking, linear uncertain systems, limited information

Citation Wang Ge-Xia. Remote output regulation for linear uncertain systems via a limited capacity communication channel. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(4): 632–638

输出调节问题几十年来备受关注^[1–4],文献[1–2]讨论了线性系统的输出调节问题,并给出了较完备的经典结论.文献[3]考虑了非线性系统的情形.近期文献[4]又研究了一类不确定系统的跟踪调节问题.

近期网络化控制系统也受到了广泛关注.将网络引入到闭环控制系统中会引起许多新的控制问题,如网络延时、丢包和传输带宽受限等问题.由于传输媒介自身的物理特性使得传输带宽受限这类问题更受到关注^[5–13].在带宽受限的传输条件下,通过该信道传输的数据需要考虑量化误差.量化的精度取决于信道的传输能力.文献[5–13]将量化器看成一个编码器,对接收到的信号进行编码,而有限的通信

能力就体现在它的编码器只有有限个码子.在这种传输方式下,如何设计出只有有限个码子的编码方式来达到一定的控制目标是研究该问题的关键.该类问题我们称之为信息受限下的控制问题.

信息受限可以和各种控制问题相结合,如镇定、混沌同步、跟踪调节等.文献[5–9]分别讨论了信息受限下线性和非线性系统的镇定.文献[10]考虑了信息受限下一类非线性系统的跟踪调节问题.文献[11–14]将信息受限和混沌同步相结合,研究了连续和离散两种情形.

尤其值得指出的是文献[10]中假定参考信号由远程系统产生,并通过有限容量的信道传输到受控系统端,由于信道是有限容量,这里受控系统端仅能接受到原来参考信号的一个近似信号.文献[10]中通过给出合理的传输方式和跟踪控制器,实现了跟踪目标.但文献[10]中对参考信号有一个特殊要求,即要存在一个有界不变集.显然,当参考信号无界时,文献[10]中结论失效.

受此启发,本文讨论了信息受限下一类线性不确定系统的跟踪调节问题,文中假定参考信号是由高阶微分方程产生.因此,可包含该类方程可能产生的各种信号,如无界、震荡、衰减等,不再局限于有界信号.由于我们的参考信号不再满足文献[10]中信号的要求,因此,需要给出新的传输方式.

收稿日期 2011-08-19 录用日期 2011-11-20
Manuscript received August 19, 2011; accepted November 20, 2011

国家自然科学基金(11171113),上海科委基础研究项目(11ZR1410200),上海市教育委员会科研创新一般项目(11YZ193)资助

Supported by the National Natural Science Foundation of China (11171113), Shanghai Municipal Natural Science Foundation (11ZR1410200), and Shanghai Educational Foundation for Innovative Scientific Research (11YZ193)

本文责任编辑 夏元清

Recommended by Associate Editor XIA Yuan-Qing

1. 上海电力学院数理系 上海 201300

1. Department of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 201300

在设计编码方式时, 由于文献 [10] 中参考信号为状态输出, 其所需的信息量较多, 而本文中的参考信号为系统的单输出采样信号, 两者还是有着本质不同. 在信息受限的控制问题中, 关于输出信号的编码设计也较为流行, 如文献 [7, 9, 11–12] 等.

在上述文献中, 多采用基于观测器的编码方式, 即在编码器处添加观测器, 但这会增加运算量. 文献 [7] 中利用能观性设计了输出镇定编码方式. 受此启发, 本文中也将利用系统的能观性, 通过输出采样信号来还原此刻的状态. 同时, 在设计跟踪控制器时, 也给出了较为简洁的结论和证明方式.

综合而言, 本文的主要贡献有两点: 1) 针对不论是否有界的参考信号给出了其输出编码方式; 2) 对于一类线性多包不确定系统给出了其信息受限下的跟踪控制器的设计, 并给出了详细证明.

本文安排如下: 第 1 节为问题的具体描述; 接下来在第 2 节中首先介绍两类编码函数, 然后利用这两类函数给出文中参考信号的具体编码过程; 第 3 节为跟踪控制器的设计; 第 4 节的数字仿真验证了我们的主要结论; 最后是本文的结束语.

1 问题描述

如图 1 所示, 参考信号由系统 1 (Plant 1) 远程产生, 并通过有限容量的信道传输到系统 2 (Plant 2). 在传输过程中, 参考信号的周期采样信号首先被系统 1 端的编码器 (Coder) 编码; 并通过信道传输到系统 2 端的解码器 (Decoder), 解码器通过编解码协议来解码传来的信号. 由于信道容量有限, 这里信号的传输只能做到有限精度的传输, 而我们的控制目标就是通过设计传输方式, 并利用解码得到的信号来设计跟踪控制器, 以达到我们的跟踪目标.

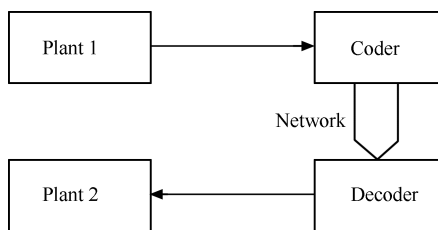


图 1 信息受限下跟踪控制模型

Fig. 1 Tracking via a limited capacity communication channel

假定参考信号 $r(t)$ 是由下面的高阶微分方程产生:

$$\begin{aligned} (\cdot)^{(p)} + \alpha_p (\cdot)^{(p-1)} + \alpha_{p-1} (\cdot)^{(p-2)} + \cdots + \\ \alpha_1 (\cdot)^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

这里 $(\cdot)^{(s)}$ 为 $r(t)$ 的 s 阶导数, α_s 是微分方程 (1) 的实系数, $s = 1, 2, \dots, p$, 正整数 p 是方程 (1) 的

阶数.

受控系统 (Plant 2) 为线性不确定多包系统, 满足:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\theta)\mathbf{x} + B(\theta)\mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad y = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ 分别是系统 (2) 的状态、输出和输入; $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$ 是系统 (2) 的不可测扰动. 假定 $A(\theta)$ 和 $B(\theta)$ 来自下面的多包集合

$$\begin{aligned} \{[A(\theta), B(\theta)] : [A(\theta), B(\theta)] = \\ \sum_{i=1}^N \theta_i [A_i, B_i], \theta_i \geq 0\} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, A_i, B_i 和 C, D 是常矩阵, 且 $\sum_{i=1}^N \theta_i = 1$.

同时假定系统 (2) 的不可测扰动 \mathbf{w} 的分量与参考信号 $r(t)$ 同样满足微分方程 (1).

这里系统 (2) 通过有限容量信道与系统 (1) 远程相连, 并且系统 (2) 只能得到系统 (1) 产生的参考信号的近似信号 $\hat{r}(t)$, 如何利用该信号设计控制器使得系统 (2) 的输出 $y(t)$ 能够跟踪参考信号 $r(t)$, 是本文的控制目标. 下面将分两部分来介绍本文的主要结论: 1) 设计传输方式; 2) 基于此传输方式设计控制器, 以达到跟踪目的.

注 1. 这里参考信号满足高阶微分方程, 故对于此类方程可产生的各种信号, 如衰减信号、无界信号、震荡信号等本文的结论均适用. 而文献 [10] 并不能适用于上述各类信号. 这是因为文献 [10] 中参考信号必须满足有一个有界不变集的要求.

注 2. 这里假定方程 (1) 的系数为系统 (1) 和远端系统 (2) 所共享, 但是系统 (1) 的初始条件是未知的, 并假定其初始条件是有界的.

2 编码方式

2.1 预备知识

下面介绍文献 [12] 中无记忆的编码器: 对于常数 $M > 0$ 和正整数 q , 无记忆编码器函数为

$$f_{M,q}(y) = \begin{cases} \frac{2M}{q} \left\langle y \frac{q}{2M} \right\rangle, & |y| \leq M \\ M \operatorname{sgn}(y), & \text{否则} \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\langle y \rangle$ 是变量 y 附近的整数, $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 为符号函数. 由式 (4) 知, 当变量 y 满足 $|y| \leq M$ 时, 有

$$|y - f_{M,q}(y)| \leq \frac{M}{q} \quad (5)$$

通过式 (4) 定义的函数 $f_{M,q}(\cdot)$ 将区间 $[-M, M]$ 等分成长度为 $2M/q$ 的 q 个小区间, 并且函数 $f_{M,q}(\cdot)$ 将每个小区间内任意一点对应为该区间的

中心. 我们称区间 $[-M, M]$ 为编码函数 $f_{M,q}(\cdot)$ 的有效区间, 超过此区间称函数溢出. 在设计过程中要避免编码函数溢出现象的发生. 由式 (5) 知, 在有效区间内, 经过该编码函数编码后, 原信号与编码信号有误差, 传输精度为 M/q . 而且要表示函数 $f_{M,q}(\cdot)$ 的值域 q 至少需要 $\log_2 q$ 个字节.

注 3. 常数 M 和正整数 q 在上述无记忆编码函数的定义中是非常重要的, 为编码设计中的重要参数.

上述编码函数是在原点对称的区间上定义的, 下面引入非原点对称区间的编码函数.

对于常数 $M > 0$, 正整数 q 和定点 y_0 , 无记忆编码函数为

$$f_{M,q,y_0}(y) = \begin{cases} y_0 + \frac{2M}{q} \left\langle (y - y_0) \frac{q}{2M} \right\rangle, & |y - y_0| \leq M \\ y_0 + M \operatorname{sgn}(y - y_0), & \text{否则} \end{cases} \quad (6)$$

进而当变量 y 满足 $|y - y_0| \leq M$ 时, 有

$$|y - f_{M,q,y_0}(y)| \leq \frac{M}{q} \quad (7)$$

注 4. 定点 y_0 的对称区间上的编码函数 $f_{M,q,y_0}(\cdot)$ 相当于将关于原点对称区间上的编码函数 $f_{M,q}(\cdot)$ 进行了平移.

注 5. 在设计编码函数 $f_{M,q,y_0}(\cdot)$ 时, 如何选取不动点 y_0 是编码设计中的一个重要环节. 而且此不动点 y_0 必须为编码器和解码器共有才能达到传输要求. 这就要求不动点 y_0 的更新要么事先给定, 要么是已有编码信号的函数, 依照某种事先给定的规则进行更替. 在本文的编码器中不动点每一步的更新是按照一定规则依赖于已有编码信号进行更替的. 因此, 可以做到编码器和解码器共有.

2.2 编码设计

我们要传输的信号满足微分方程 (1), 为了叙述方便, 令 $r_1 = r$, 将其改写为

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_2 \\ \dot{r}_2 = r_3 \\ \vdots \\ \dot{r}_p = -\alpha_1 r_1 - \alpha_2 r_2 - \cdots - \alpha_p r_p \end{cases}$$

再令 $\xi = [r_1, r_2, \cdots, r_p]^T$, 则上式可表示为

$$\dot{\xi} = A_c \xi, \quad r = c_0 \xi \quad (8)$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_p \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{p \times p}$$

$$c_0 = [1, 0, \cdots, 0] \in \mathbf{R}^{1 \times p}$$

假定采样周期为 τ , 即系统 (8) 产生的输出信号 $r(t)$ 每隔时刻 τ 被采样一次, 下面就是要对该采样信号 $r(k\tau)$ 设计编码方式, $k = 0, 1, 2, \cdots$. 由于参考信号 $r(t)$ 为系统 (8) 的单输出信号, 而且只传输其采样时刻的信号, 所以为了能够实现信号跟踪, 必须对信号进行恢复和重构.

假定矩阵 $(c_0, e^{A_c \tau})$ 可观, 即

$$W = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_0 e^{A_c \tau} \\ \vdots \\ c_0 e^{A_c (p-1)\tau} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{p \times p} \text{ 满足 } \operatorname{rank}(W) = p$$

下面给出其编码函数所用参数. 根据注 2, 可设系统 (8) 的初始条件满足 $\|\xi(0)\| \leq E_0$. 并令

$$\Lambda = \max_{0 \leq t \leq \tau} \|e^{A_c t}\|$$

注 6. 这里矩阵和向量的范数均为无穷范数.

步骤 1. 当 $k = 0, 1, 2, \cdots, p-1$ 时, 定义

$$M(k) = \Lambda^k E_0 \quad (9)$$

不妨设 $\Lambda \geq 1$, 则有 $M(k)$ 单调递增. 又

$$r(k\tau) = c_0 e^{k A_c \tau} \xi(0), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, p-1$$

因此, 有

$$\|r(k\tau)\| \leq M(k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, p-1 \quad (10)$$

由预备知识和式 (10) 知: 此时采样信号 $r(k\tau)$ 在编码函数 $f_{M(k),q}(\cdot)$ 的有效区间内, 其中, $M(k)$ 为式 (9) 所定义, 故可定义采样信号 $r(k\tau)$ 的编码信号为

$$\hat{r}(k\tau) = f_{M(k),q}(r(k\tau)), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, p-1 \quad (11)$$

其中, 函数 $f_{M(k),q}(\cdot)$ 的定义参见式 (4). 由式 (5), 式 (10) 和式 (11) 知, 传输误差满足:

$$\|r(k\tau) - \hat{r}(k\tau)\| \leq \frac{M(k)}{q} \leq \frac{M(p-1)}{q} \quad (12)$$

又

$$\xi(0) = W^+ \begin{bmatrix} r(0) \\ r(\tau) \\ \vdots \\ r((p-1)\tau) \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中, W^+ 为矩阵 W 的逆. 定义

$$\hat{\xi}(0) = W^+ \begin{bmatrix} \hat{r}(0) \\ \hat{r}(\tau) \\ \vdots \\ \hat{r}((p-1)\tau) \end{bmatrix} \quad (14)$$

则由式 (12)~式 (14) 知

$$\|\xi(0) - \hat{\xi}(0)\| \leq \frac{\|W^+\|}{q} M(p-1) \quad (15)$$

步骤 2. 当 $k = p, p+1, \dots, 2p-1$ 时, 定义

$$M(k) = \Lambda^k \frac{\|W^+\|}{q} M(p-1) \quad (16)$$

易见此时代 $M(k) \leq M(2p-1)$, $k = p, p+1, \dots, 2p-1$. 利用式 (14) 定义的变量 $\hat{\xi}(0)$ 定义辅助变量

$$\tilde{r}(p\tau + k\tau) = c_0 e^{A_c(p\tau + k\tau)} \hat{\xi}(0) \quad (17)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, p-1$; 又此时

$$r(p\tau + k\tau) = c_0 e^{A_c(p\tau + k\tau)} \xi(0)$$

则可得

$$\|r(p\tau + k\tau) - \tilde{r}(p\tau + k\tau)\| \leq \Lambda^{p+k} \|\xi(0) - \hat{\xi}(0)\|$$

由上式和式 (15) 知: 当 $k = p, p+1, \dots, 2p-1$ 时,

$$\|r(k\tau) - \tilde{r}(k\tau)\| \leq M(k) \quad (18)$$

由上式知, 此时采样信号 $\{r(k\tau)\}_{k=p}^{2p-1}$ 在编码函数 $f_{M(k), q, \tilde{r}(k\tau)}(\cdot)$ 的有效区间内, 其中, $M(k)$ 为式 (16) 所定义, 辅助变量 $\{\tilde{r}(k\tau)\}_{k=p}^{2p-1}$ 由以上定义; 故可利用非原点对称区间上的编码函数定义采样信号 $\{r(k\tau)\}_{k=p}^{2p-1}$ 的编码信号为

$$\begin{aligned} \hat{r}(k\tau) &= f_{M(k), q, \tilde{r}(k\tau)}(r(k\tau)), \\ k &= p, p+1, \dots, 2p-1 \end{aligned} \quad (19)$$

其中, 函数 $f_{M(k), q, \tilde{r}(k\tau)}(\cdot)$ 的定义参见式 (6).

由式 (7) 和式 (18) 知传输误差满足:

$$\begin{aligned} \|r(k\tau) - \hat{r}(k\tau)\| &\leq \frac{M(2p-1)}{q}, \\ k &= p, p+1, \dots, 2p-1 \end{aligned} \quad (20)$$

同样定义

$$\hat{\xi}(p\tau) = W^+ \begin{bmatrix} \hat{r}(p\tau) \\ \hat{r}(p\tau + \tau) \\ \vdots \\ \hat{r}((2p-1)\tau) \end{bmatrix} \quad (21)$$

则由式 (20) 和式 (21) 知,

$$\|\xi(p\tau) - \hat{\xi}(p\tau)\| \leq \Delta \frac{\|W^+\|}{q} M(p-1) \quad (22)$$

其中, $\Delta = \left(\frac{\|W^+\| \Lambda^{2p-1}}{q} \right)$.

如此循环下去可得第 $m+1$ 步为

步骤 $m+1$. 当 $k = mp, mp+1, \dots, (m+1)p-1$ 时, 定义

$$M(k) = \Lambda^{k-(m-1)p} \Delta^{m-1} \frac{\|W^+\|}{q} M(p-1) \quad (23)$$

易见, 当 $k = mp, mp+1, \dots, (m+1)p-1$ 时,

$$M(k) \leq M((m+1)p-1)$$

并利用第 m 步定义的变量 $\hat{\xi}((m-1)p\tau)$ 构造

$$\tilde{r}(mp\tau + k\tau) = c_0 e^{A_c(p\tau + k\tau)} \hat{\xi}((m-1)p\tau) \quad (24)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, p-1$; 又此时

$$r(mp\tau + k\tau) = c_0 e^{A_c(p\tau + k\tau)} \xi((m-1)p\tau)$$

则可得

$$\begin{aligned} \|r(mp\tau + k\tau) - \tilde{r}(mp\tau + k\tau)\| &\leq \\ &\Lambda^{p+k} \|\xi((m-1)p\tau) - \hat{\xi}((m-1)p\tau)\| \end{aligned}$$

又由上一步中 $\xi((m-1)p\tau)$ 和 $\hat{\xi}((m-1)p\tau)$ 满足的关系

$$\begin{aligned} \|\xi((m-1)p\tau) - \hat{\xi}((m-1)p\tau)\| &\leq \\ &\Delta^{m-1} \frac{\|W^+\|}{q} M(p-1) \end{aligned}$$

及上式知, 当 $k = mp, mp+1, \dots, (m+1)p-1$ 时,

$$\|r(k\tau) - \tilde{r}(k\tau)\| \leq M(k)$$

上式说明采样信号 $\{r(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 在编码函数的有效区间内, 故可利用上述构造辅助变量 $\{\tilde{r}(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 定义采样信号 $\{r(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 的编码信号为

$$\hat{r}(k\tau) = f_{M(k), q, \tilde{r}(k\tau)}(r(k\tau)) \quad (25)$$

并且传输误差满足:

$$\|r(k\tau) - \hat{r}(k\tau)\| \leq \frac{M((m+1)p-1)}{q} \quad (26)$$

同样定义

$$\hat{\xi}(mp\tau) = W^+ \begin{bmatrix} \hat{r}(mp\tau) \\ \hat{r}(mp\tau + \tau) \\ \vdots \\ \hat{r}(((m+1)p-1)\tau) \end{bmatrix} \quad (27)$$

可验证得到

$$\|\xi(mp\tau) - \hat{\xi}(mp\tau)\| \leq \Delta^m \frac{\|W^+\|}{q} M(p-1) \quad (28)$$

注 7. 编码设计第 1 步构造了 $\{\hat{r}(k\tau)\}_{k=0}^{p-1}$ 点列, 为采样信号 $\{r(k\tau)\}_{k=0}^{p-1}$ 的编码信号. 后面第 $m+1$ 步中依次构造了两个点列 $\{\tilde{r}(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 和 $\{\hat{r}(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$, 其中, $\{\tilde{r}(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 为辅助变量, 用来定义采样信号 $\{r(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 编码时的编码函数; $\{\hat{r}(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 为采样信号 $\{r(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 的编码信号 ($m = 1, 2, \dots$). 因此, $\{\tilde{r}(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 在每一步中优先于 $\{\hat{r}(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 被构造.

注 8. 从设计过程中可看出第 $m+1$ 步中辅助变量 $\{\tilde{r}(k\tau)\}_{k=mp}^{(m+1)p-1}$ 的产生依赖于第 m 步中采样信号 $\{r(k\tau)\}_{k=(m-1)p}^{mp-1}$ 的编码信号 $\{\tilde{r}(k\tau)\}_{k=(m-1)p}^{mp-1}$, 故形成了一个递推过程 ($m = 1, 2, \dots$).

循环过程中可得到一系列点列 $\hat{\xi}(mp\tau)$ 满足式 (28), 当整数 q 满足 $q > \|W^+\| \Lambda^{2p-1}$ 时, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\xi(mp\tau) - \hat{\xi}(mp\tau)\| = 0 \quad (29)$$

因此, 当 $t \in [mp\tau, (m+1)p\tau)$ 时, 定义

$$\hat{\xi}(t) = e^{A_c(t-mp\tau)} \hat{\xi}(mp\tau), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

定理 1. 当整数 q 满足 $q > \|W^+\| \Lambda^{2p-1}$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t) - \hat{\xi}(t)\| = 0$$

证明. 当 $t \in [mp\tau, (m+1)p\tau)$ 时,

$$\|\xi(t) - \hat{\xi}(t)\| \leq \Lambda^p \|\xi(mp\tau) - \hat{\xi}(mp\tau)\|$$

$m = 0, 1, 2, \dots$

又整数 q 满足 $q > \|W^+\| \Lambda^{2p-1}$, 结合式 (29) 可知定理结论成立. \square

依据式 (30) 重构得到的信号 $\hat{\xi}(t)$, 令

$$\hat{r}(t) = c_0 \hat{\xi}(t) \quad (31)$$

易见该重构信号 $\hat{r}(t)$ 与前面编码过程中定义的 $\hat{r}(k\tau)$ 在 $t = k\tau$ 时刻是一致的. 由于远程系统 (2) 只能得到上述重构后的参考信号 $\hat{r}(t)$, 下面将依据该参考信号 $\hat{r}(t)$ 来设计本文的跟踪控制器.

3 跟踪控制器设计

添加如下内模系统作为控制器的一部分

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \eta_3 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_p = -\alpha_1 \eta_1 - \alpha_2 \eta_2 - \dots - \alpha_p \eta_p + \hat{e} \end{cases} \quad (32)$$

其中, $\hat{e} = y - \hat{r}$, y 为系统 (2) 的输出, \hat{r} 为式 (31) 定义. 令 $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p]^T$, $G = [0, 0, \dots, 0, 1]^T \in \mathbf{R}^{p \times 1}$, 则上式可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = A_c \boldsymbol{\eta} + G \hat{e} \quad (33)$$

基于系统 (32) 设计控制器

$$\mathbf{u} = K_0 \mathbf{x} + K \boldsymbol{\eta} \quad (34)$$

则在上述控制器的作用下, 令 $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, \boldsymbol{\eta}^T]^T$, 整个闭环系统 (2)、系统 (33) 和系统 (34) 可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \{A_z(\theta) + B_z(\theta)[K_0 \quad K]\} \mathbf{z} + \\ &\begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix} \mathbf{w} - \begin{bmatrix} O \\ G \end{bmatrix} \hat{r} \end{aligned} \quad (35)$$

其中, $A_z(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i A_{i,z}$, $B_z(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i B_{i,z}$,

$$\begin{aligned} A_{i,z} &= \begin{bmatrix} A_i & O \\ GC & A_c \end{bmatrix} \\ B_{i,z} &= \begin{bmatrix} B_i \\ GD \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (36)$$

定理 2. 若存在正定矩阵 $Q > 0$ 和适维矩阵 Y 使

$$\Psi_i = A_{i,z} Q + Q A_{i,z}^T + B_{i,z} Y + Y^T B_{i,z}^T < 0 \quad (37)$$

对于式 (36) 定义的 $A_{i,z}, B_{i,z}$ 都成立, $i = 1, 2, \dots, N$. 则令控制器 $[K_0 \quad K] = YQ^{-1}$, 此时在控制器 (33) 和 (34) 的作用下, 闭环系统 (35) 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \hat{r}(t)) = 0 \quad (38)$$

证明. 当控制器 $[K_0 \quad K] = YQ^{-1}$ 时, 系统 (35) 可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \{A_z(\theta) + B_z(\theta) Y Q^{-1}\} \mathbf{z} + \\ &\begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix} \mathbf{w} - \begin{bmatrix} O \\ G \end{bmatrix} \hat{r} \end{aligned} \quad (39)$$

一方面不可测扰动 w 满足高阶微分方程 (1); 又由式 (31) 知, 当 $t \in [mp\tau, (m+1)p\tau]$ 时, $\hat{r}(t)$ 也满足高阶微分方程 (1). 因此, 当 $t \in [mp\tau, (m+1)p\tau]$ 时, 有以下两式成立

$$\begin{aligned} w^{(p)} + \alpha_p w^{(p-1)} + \dots + \alpha_1 w^{(0)} &= 0 \\ \hat{r}^{(p)} + \alpha_p \hat{r}^{(p-1)} + \dots + \alpha_1 \hat{r}^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

故分别对式 (39) 两边依次求 p 阶导数并相加可得

$$\dot{U} = \{A_z(\theta) + B_z(\theta)YQ^{-1}\}U \quad (40)$$

其中, $U = z^{(p)} + \alpha_p z^{(p-1)} + \dots + \alpha_1 z^{(0)}$.

令 $V(U) = U^T P U$, 其中 $P = Q^{-1}$. 可计算得到上述函数沿着系统 (40) 的微分为

$$\dot{V}(U) = U^T P \sum_{i=1}^N \theta_i \Psi_i P U$$

则由条件 (37) 知 $\dot{V}(U) < 0$. 进而, 可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = 0$$

由于 $z = [x^T, \eta^T]^T = [x^T, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p]^T$ 及 $U = z^{(p)} + \alpha_p z^{(p-1)} + \dots + \alpha_1 z^{(0)}$ 知, 变量 z 的分量 $\eta_1^{(p)} + \alpha_p \eta_1^{(p-1)} + \dots + \alpha_1 \eta_1^{(0)}$ 也满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta_1^{(p)} + \alpha_p \eta_1^{(p-1)} + \dots + \alpha_1 \eta_1^{(0)} = 0 \quad (41)$$

又 $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p]^T$ 满足式 (32) 和式 (41), 意味着

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\eta} - A_c \eta) = 0$$

进而 $\lim_{t \rightarrow \infty} G\hat{e} = 0$. 因此, 式 (38) 成立. \square

定理 3. 若存在矩阵 $Q > 0$ 和 Y 使式 (37) 成立; 并且整数 q 满足 $q > \|W^+\| \Lambda^{2p-1}$ 时, 令控制器 $[K_0 \ K] = YQ^{-1}$, 则在第 2 节的编码方式下, 系统 (33) ~ 系统 (35) 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - r(t)) = 0 \quad (42)$$

证明. 当整数 q 满足 $q > \|W^+\| \Lambda^{2p-1}$ 时, 由定理 1 知:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|r(t) - \hat{r}(t)\| = 0$$

再由定理 2 知式 (38) 成立. 因此, 式 (42) 成立. \square

4 数值例子

例 1. 这里参考信号满足下面的微分方程

$$r^{(4)} + \ddot{r} = 0$$

相应地, 系统 (8) 可表示为

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

受控系统 (2) 中矩阵为

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1.1750 & 0.9871 \\ -8.458 & -0.8776 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -2.3280 & 0.9831 \\ -30.4400 & -1.4930 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -2.4520 & 0.9856 \\ -38.6100 & -1.3400 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} -0.1940 \\ -19.2900 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.3012 \\ -38.4300 \end{bmatrix} \\ B_3 &= \begin{bmatrix} -0.2757 \\ -37.3600 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \ 1], \quad D = [0] \end{aligned}$$

选定采样周期为 $\tau = 0.5$ s. 可计算得 $\Lambda = 1.6430$, 相应 $\|W^+\| \Lambda^{2p-1} = 1562$, 其中 $p = 4$.

根据定理 1 可选取参数

$$q = 2^{11} = 2048 > \|W^+\| \Lambda^{2p-1} = 1562$$

同时假定 $E_0 = 10$.

依据定理 2 可得控制器 $[K_0 \ K] = YQ^{-1}$ 为

$$[0.1671 \ 0.3643 \ 0.1526 \ 0.6270 \ 0.4167 \ 0.7308].$$

Y 和 Q 如下.

$$Y = \begin{bmatrix} -4.9653 & 11.1898 & 1.2983 & -1.5325 & 0.4932 & 6.1544 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10.1165 & -10.7265 & -1.2145 & 1.9196 & -1.7106 & -4.1781 \\ * & 75.9824 & -4.2708 & 2.5386 & 5.9809 & -24.8093 \\ * & * & 306.8485 & -43.1890 & -81.8235 & 23.8270 \\ * & * & * & 109.4724 & -24.0454 & -74.9912 \\ * & * & * & * & 90.8590 & -16.0073 \\ * & * & * & * & * & 90.2300 \end{bmatrix}$$

当选取系统 (8) 的初始条件为 $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ 时, 可知参考信号为 $r(t) = t - \sin(t)$, 此为无界信号. 图 2 显示了跟踪信号和参考信号, 图 3 显示了跟踪误差, 验证了我们的结论.

注 9. 本例中, 参考信号 $r(t) = t - \sin(t)$ 为无界信号, 不存在一个有界不变集. 而文献 [10] 中有界不变集对于信号的编码设计至关重要, 是其重要环节. 故文献 [10] 中的编码设计对本例的参考信号失效.

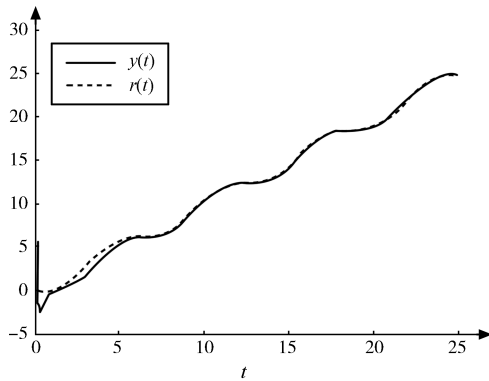


图 2 参考信号和跟踪信号

Fig. 2 Reference and tracking signals

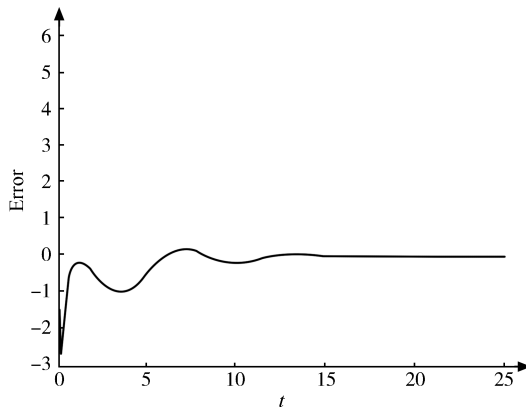


图 3 跟踪误差

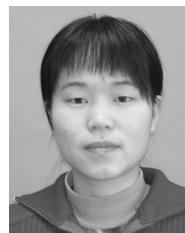
Fig. 3 Tracking error

5 结论

本文研究了信息受限下一类线性不确定系统的跟踪调节问题. 参考信号是由高阶微分方程产生, 因此不再局限于有界信号, 拓展了已有的关于有界信号信息受限下的跟踪问题. 预备知识里介绍了两类编码函数, 接下来利用系统的能观性给出了具体的编码方式, 并通过接收到的信号对原来的参考信号进行了重构. 基于此重构信号, 对线性不确定系统设计了跟踪控制器. 最后数值仿真验证了本文的结论.

References

- 1 Davision E J. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, **21**(1): 25–34
- 2 Francis B A. The linear multivariable regulator problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1977, **15**(3): 486–505
- 3 Isidori A, Byrnes C I. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(2): 131–140
- 4 Liao F, Wang J L, Yang G H. Reliable robust flight tracking control: an LMI approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, **10**(1): 76–89
- 5 Liberzon D. Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals. *Automatica*, 2003, **39**(9): 1543–1554
- 6 Brockett R W, Liberzon D. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(7): 1279–1289
- 7 Liberzon D. On stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(2): 304–307
- 8 Liberzon D, Hespanha J P. Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(6): 910–915
- 9 Savkon A V. Detectability and output feedback stabilizability of nonlinear networked control systems. In: Proceedings of the European Control Conference and the 44th IEEE Conference on Decision and Control. Seville, Spain: IEEE, 2005. 8174–8178
- 10 Isidori A, Marconi L, Peris C D. Remote tracking via encoded information for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 2006, **55**(10): 809–818
- 11 Fradkov A L, Andrievsky B, Evans R J. Chaotic observer-based synchronization under information constraints. *Physical Review E*, 2006, **73**(6): 066209.1–066209.7
- 12 Fradkov A L, Andrievsky B, Andrievsky A. Observer-based synchronization of discrete-time chaotic systems under information constraints. In: Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea: IFAC, 2008. 3719–3724
- 13 Wang G X, Wang Z M, Lu G P. Chaotic synchronization with limited information. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, **18**(10): 3137–3145
- 14 Wang G X. Chaos synchronization of discrete-time dynamic systems with a limited capacity communication channel. *Nonlinear Dynamics*, 2011, **63**(1–2): 277–283



王隔霞 上海电力学院数理系副教授. 2008 年获得华东师范大学数学系博士学位. 主要研究方向为网络化控制系统的设计和分析, 奇异摄动系统稳定性分析, 混沌系统的同步.

E-mail: gxwang_2004@163.com

(WANG Ge-Xia Associate professor in the Department of Mathematic and Physics, Shanghai University of Electric Power. She received her Ph.D. degree from East China Normal University in 2008. Her research interest covers controller design and stability analysis of networked control systems, singular perturbation systems, and chaos synchronization.)