基于凸松弛方法的医学 B 超图像快速分割

黄 杰 [1] 杨孝平 [1]

摘 要 利用活动轮廓线方法进行图像分割的一个重要缺陷是目标函数是非凸的, 这不仅使得分割结果容易陷于局部极小, 而且还使得一些快速算法无法开展. 本文首先从贝叶斯风险估计的方法出发, 针对 B 超幅度图像, 给出一种基于 Rayleigh 分布的活动轮廓线模型. 然后结合凸松弛的方法, 得到一个新的放松的凸模型. 原有模型和放松后模型的关系可由定理 1 给出. 最后结合分裂 Bregman 算法, 给出基于 B 超分割模型的快速算法. 与传统梯度下降法相比较, 本文提出的算法不仅能得到全局最优解, 而且在算法收敛速度上也大大优于梯度下降法.

关键词 医学 B 超, 活动轮廓, 贝叶斯风险, 凸松弛, 分裂 Bregman

引用格式 黄杰, 杨孝平. 基于凸松弛方法的医学 B 超图像快速分割. 自动化学报, 2012, **38**(4): 582−590

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00582

Fast B-ultrasound Image Segmentation Based on a Convex Relaxation Method

HUANG Jie[1] YANG Xiao-Ping[1]

Abstract One main drawback of active contour method applied to image segmentation is that the objective function is not convex. The solution of a non-convex minimization problem is prone to get stuck in a local minima, and some fast algorithms to convex optimization problems can not be used in a non-convex active contour model. Using a Bayesian risk method, this paper presents a new level set model for B-ultrasound image segmentation based on a Rayleigh distribution. The directly obtained model is not convex. However, we can get a new relaxed convex model by using a convex relaxation method. The relation between the directly obtained model and the relaxed convex model is given by a theorem. Then, a split Bregman algorithm is incorporated to propose a fast algorithm to solve the relaxed convex model. Compared with the traditional gradient descent method, the proposed method can not only get a global minima, but also is quite faster than gradient descent method.

Key words Medical B ultrasound, active contour, Bayesian risk, convex relaxation, split Bregman

Citation Huang Jie, Yang Xiao-Ping. Fast B-ultrasound image segmentation based on a convex relaxation method. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(4): 582−590

随着 B 超医学成像技术的发展, 以及 B 超成像无副作用、实时成像、价格相对便宜等特点, B 超图像已越来越广泛地应用于临床诊断中. 医学临床实践和研究需要对人体的某种组织和器官的形状、边界、截面面积以及体积进行测量, 从而得到该组织病理或功能方面的重要信息, 因而精确的测量对疾病的诊断和治疗有重要的临床意义. 医学图像分割的研究多年来一直受到人们的高度重视, 分割算法也层出不穷. 其中活动轮廓线的方法是图像分割中广泛流行和使用的一种方法. 活动轮廓线方法又可分为基于边缘和基于区域的方法. 基于边缘的图像分割通常依赖于图像的梯度信息, 而基于区域的分割方法通常利用极大似然或极大后验的方法来更好的结合区域的统计特征[1−2]. 经典的基于边缘的活动轮廓线模型由 Kass 等提出[3], 也称蛇模型. 然而, 该方法的一个重要缺陷是分割结果与所取参数曲线有关. Caselles 等[4] 改进了该模型, 提出活动轮廓测地线模型, 有效解决了蛇模型中分割曲线依赖于参数的问题.

经典的基于区域的分割模型为 MS 模型[5], 该模型是假定轮廓线内外像素点灰度值服从相同方差、不同均值的高斯分布时, 利用极大似然或极大后验方法得到的一种特殊模型. MS 模型有着广泛的应用, 刘国才等[6] 提出一种推广的 MS 模型, 有效分割对比度小且部分被血管遮挡的早期青光眼病人视乳头图像. 应用最为广泛的 MS 模型是它的分片常数模型[7], 称为 CV 模型. CV 模型对具有分片均匀的图像分割十分有效. 然而当图像分片不均匀时, CV 模型的分割效果不是很理想, 且速度很慢. 通

收稿日期 2011-03-26 录用日期 2011-09-14
Manuscript received March 26, 2011; accepted September 14, 2011
国家自然科学基金 (11101218), 江苏省研究生创新基金 (CX10B-129Z) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (11101218) and Graduate Innovation Foundation of Jiangsu Province (CX10B-129Z)
本文责任编委 封举富
Recommended by Associate Editor FENG Ju-Fu
1. 南京理工大学理学院应用数学系 南京 210094
1. Department of Applied Mathematics, School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094

常, 基于区域的分割较基于边缘的分割更具有优势. 特别是当图像存在大量噪声时, 基于梯度信息的边缘分割模型往往不能达到理想的分割效果. 对于相干成像系统成像, 如 SAR、B 超图像等, 存在大量的乘性斑点噪声, 图像不再是分片常数, 此时应用基于分片常数的 CV 模型, 效果不佳. 考虑到图像分片不均匀情形, 近来, 一些针对特殊分布的分割模型被提出, 如基于极大似然方法的 Gamma 和 Rayleigh 分布模型[8−9]. 刘博等[10] 提出一种结合全局概率密度差异与局部灰度分布拟合的超声图像分割方法. 韩守东等[11] 利用高斯超像素提出了一种交互式的图像分割方法. Li 等[12] 提出一种处理不均匀灰度的 MRI 分割模型.

然而传统的利用活动轮廓线方法进行图像分割的一个固有缺陷就是目标函数的非凸性, 这不仅使得分割结果容易陷于局部极小, 而且还使得一些快速算法无法开展. 近来, Nikolova 等[13] 提出一种凸松弛的方法, 可将特定的非凸模型转换为相应的凸模型来求解全局最优解. 该方法的主要思想是利用一个 [0, 1] 区间的连续函数来代替 Heaveside 函数, 得到一个凸松弛模型. 该方法之后被用于 MS 模型的快速求解中[14−16]. 本文考虑 B 超幅度图像的快速分割. B 超图像具有很强的斑点噪声, 而且图像分片不均匀, 因此对 B 超图像的分割应用基于分片常数的 CV 模型, 分割效果不佳. 本文首先利用贝叶斯风险的概念, 结合 B 超幅度图像 Rayleigh 分布的统计特征[17−18], 提出一种适合 B 超幅度图像的分割模型. 通过简单证明, Nikolova 等提出的凸松弛方法[13] 可以推广到所提的具有 Rayleigh 分布的分割模型. 对于新的凸松弛模型, 本文结合分裂 Bregman 方法, 提出一种基于 B 超图像的快速分割算法, 与传统的梯度下降法相比, 该算法不仅能得到全局最优解, 而且大大提高了分割速度.

1　基于贝叶斯风险的 B 超分割模型

1.1　贝叶斯风险分类器

Casella 等[19] 最早将贝叶斯风险的概念应用到对具有相同特征的像素点进行分类的问题中. 假设一幅图像由背景区域 Ω_i 和目标区域 Ω_o 的像素点构成. 这样, 对像素点的分类有以下两种假设:

H_1 : 不是目标区域;

H_2 : 是目标区域.

分类器被用来对决定以上两种假设是否正确, 同样分类器有以下两种判定:

D_1 : 分类器判定不是目标区域;

D_2 : 分类器判定是目标区域.

在这种假设检验下, 结合假设和分类器判定可以得到四类条件概率:

1) $P(\mathrm{D}_1|\mathrm{H}_1)$: 当实际情况不是目标区域时, 分类器也作出了同样的判定;

2) $P(\mathrm{D}_2|\mathrm{H}_1)$: 当实际情况不是目标区域时, 分类器判定是目标区域;

3) $P(\mathrm{D}_1|\mathrm{H}_2)$: 当实际情况是目标区域时, 分类器判定不是目标区域;

4) $P(\mathrm{D}_2|\mathrm{H}_2)$: 当实际情况是目标区域时, 分类器也作出了同样的判定.

以上情况 2) 称为第一类风险, 也称为 “弃真” 错误, $P(\mathrm{D}_2|\mathrm{H}_1)$ 为当 H_1 发生时, 拒绝它的概率; 情况 3) 称为第二类风险, 也称为 “取伪” 错误, $P(\mathrm{D}_1|\mathrm{H}_2)$ 为当 H_1 不发生时, 却错误地接受 H_1 的概率. 这样对于像素点分类问题, 贝叶斯风险可以表示为

$$\begin{aligned} r = {} & e_1 P(\mathrm{H}_1) P(\mathrm{D}_1|\mathrm{H}_1) + \\ & e_2 P(\mathrm{H}_1) P(\mathrm{D}_2|\mathrm{H}_1) + \\ & e_3 P(\mathrm{H}_2) P(\mathrm{D}_1|\mathrm{H}_2) + \\ & e_4 P(\mathrm{H}_2) P(\mathrm{D}_2|\mathrm{H}_2) \end{aligned} \tag{1}$$

其中, $P(\mathrm{H}_1)$, $P(\mathrm{H}_2)$ 分别表示 H_1 和 H_2 发生的先验概率, $P(\mathrm{H}_1) + P(\mathrm{H}_2) = 1$, 与目标区域和背景区域的相对大小有关. e_1, e_2, e_3, e_4 为损失函数, 通常情形, 可设 $e_1 = e_4 = 0$, $e_2 = e_3 = 1$.

其中, Ω_i 中所有点使得分类器选择 D_1, Ω_o 中所有点使得分类器选择 D_2. 这样, 总的贝叶斯风险为

$$\begin{aligned} r = {} & \int_{\Omega_i} P(\mathrm{H}_2) P(u|\mathrm{H}_2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \\ & \int_{\Omega_o} P(\mathrm{H}_1) P(u|\mathrm{H}_1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{2}$$

其中, u 为图像灰度函数.

1.2　基于 Rayleigh 分布的 B 超分割模型

Rayleigh 分布图像广泛存在于相干成像图像中, 如单视 SAR 幅度图像, B 超幅度图像等. Rayleigh 分布的概率密度函数为

$$p_R(x) = \frac{x}{\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0 \tag{3}$$

其中, σ^2 为参数.

假定背景区域 Ω_i, 目标区域 Ω_o 内像素点均独立同分布, 且分别服从参数为 σ_i^2 和 σ_o^2 的 Rayleigh 分布. 这样基于 Rayleigh 分布的总的贝叶斯风险由式 (2) 给出. 其中

$$P(u|\mathrm{H}_1) = \frac{u}{\sigma_i^2} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_i^2}}$$

$$P(u|\mathrm{H}_2)=\frac{u}{\sigma_o^2}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_o^2}}$$

为了消除 Rayleigh 分布中的指数形式, 我们得到如下取对数运算后的贝叶斯风险:

$$r=\int_{\Omega_i}\left(\ln P(\mathrm{H}_2)+\ln u-\ln\sigma_o^2-\frac{u^2}{2\sigma_o^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Omega_o}\left(\ln P(\mathrm{H}_1)+\ln u-\ln\sigma_i^2-\frac{u^2}{2\sigma_i^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

同样, 为了使得分割的轮廓边缘光滑, 我们增加了对分割轮廓线的正则化约束. 这样, 我们得到如下基于 Rayleigh 分布的 B 超图像分割模型:

$$\min_{\Omega_o,\sigma_i^2,\sigma_o^2}\Big\{L(\Omega_o,\sigma_i^2,\sigma_o^2)=\lambda Per(\Omega_o)+\int_{\Omega_i}\left(\ln P(\mathrm{H}_2)+\ln u-\ln\sigma_o^2-\frac{u^2}{2\sigma_o^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Omega_o}\left(\ln P(\mathrm{H}_1)+\ln u-\ln\sigma_i^2-\frac{u^2}{2\sigma_i^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big\} \tag{5}$$

其中, $Per(\Omega_o)$ 表示分割目标边缘的长度, λ 为权重参数, 保持风险项与目标边缘光滑度的一种平衡. 由于 $\int_\Omega \ln u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是常数, 对于极小化问题可不用考虑. 这样, 我们可以得到式 (5) 的水平集形式为

$$\min_{\phi,\sigma_i^2,\sigma_o^2}\Big\{L(\phi,\sigma_i^2,\sigma_o^2)=\lambda\int_\Omega|\nabla H(\phi)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega[(\ln P(H_2)-\ln\sigma_o^2-\frac{u^2}{2\sigma_o^2})(1-H(\phi))+(\ln P(H_1)-\ln\sigma_i^2-\frac{u^2}{2\sigma_i^2})H(\phi)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big\} \tag{6}$$

其中, H 为 Heaviside 函数:

$$H(\xi)=\begin{cases}1, & \xi>0\\ 0, & \xi\le 0\end{cases} \tag{7}$$

我们称式 (6) 为贝叶斯 Rayleigh 模型. 对式 (6) 的求解通常可分为两步, 对于给定的分割 Ω_o, $\Omega_i=\Omega-\Omega_o$, σ_i^2, σ_o^2 分别为 Ω_i, Ω_o 内统计分布的参数, 因此 σ_i^2, σ_o^2 可利用极大似然估计的方法, 由以下表达式给出:

$$\sigma_o^2=\frac{\int_\Omega u^2H(\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2\int_\Omega H(\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{8}$$

$$\sigma_i^2=\frac{\int_\Omega u^2(1-H(\phi))\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2\int_\Omega(1-H(\phi))\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{9}$$

$P(\mathrm{H}_1)$, $P(\mathrm{H}_2)$ 为 H_1, H_2 发生的先验概率, 与目标区域和背景区域的大小有关. 在本文中, 假定对目标区域和背景区域的大小无先验判断, H_1, H_2 具有相同的发生概率. 则有 $P(\mathrm{H}_1)=P(\mathrm{H}_2)=1/2$.

对于给定的 σ_i^2, σ_o^2, 利用梯度下降法求解 ϕ. 为了求解式 (6) 关于 ϕ 的 Euler-Lagrange 方程, 通常会对 H 作一个光滑逼近, 记作 H_ϵ. 其中, 当 $\epsilon\to 0$ 时, H_ϵ 以某种方式趋于 H. 这样 ϕ 所对应的梯度下降流为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=H_\epsilon^{'}(\phi)\Big(\lambda\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)+P(\mathrm{H}_2)-\ln\sigma_o^2-\frac{u^2}{2\sigma_o^2}-P(\mathrm{H}_1)+\ln\sigma_i^2+\frac{u^2}{2\sigma_i^2}\Big) \tag{10}$$

2 基于凸松弛方法的快速求解

2.1 凸松弛模型

对于式 (10), 其稳态解对应如下方程:

$$H_\epsilon^{'}(\phi)\Big(\lambda\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)+P(\mathrm{H}_2)-\ln\sigma_o^2-\frac{u^2}{2\sigma_o^2}-P(\mathrm{H}_1)+\ln\sigma_i^2+\frac{u^2}{2\sigma_i^2}\Big)=0 \tag{11}$$

对于式 (11), $H_\epsilon^{'}$ 处处不为 0, 式 (11) 与以下方程同解:

$$\lambda\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)+P(\mathrm{H}_2)-\ln\sigma_o^2-\frac{u^2}{2\sigma_o^2}-P(\mathrm{H}_1)+\ln\sigma_i^2+\frac{u^2}{2\sigma_i^2}=0 \tag{12}$$

式 (12) 只是省略了式 (11) 中的近似 Heaviside 函数的导数项 $H_\epsilon^{'}$. 同样, 式 (12) 作为 Euler-Lagrange 方程对应了一个新的能量泛函:

$$\min_\phi\Big\{E(\phi)=\lambda\int_\Omega|\nabla\phi|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega\big[-(\ln P(\mathrm{H}_2)-\ln\sigma_o^2-\frac{u^2}{2\sigma_o^2})+(\ln P(\mathrm{H}_1)-\ln\sigma_i^2-\frac{u^2}{2\sigma_i^2})\big]\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big\} \tag{13}$$

然而对任意的 ϕ, 该极小化问题通常是无解的, 这个问题可以简单地通过限制 ϕ 使得 $0\le\phi\le 1$ 而解决[13]. 我们提出以下基于 Rayleigh 分布图像分割

的松弛模型:

$$\min_{\omega\in[0,1]}\Big\{E(\omega)=\lambda\int_\Omega|\nabla\omega|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega\big[-(\ln P(\mathrm{H}_2)-\ln\sigma_o^2-\frac{u^2}{2\sigma_o^2})+(\ln P(\mathrm{H}_1)-\ln\sigma_i^2-\frac{u^2}{2\sigma_i^2})\big]\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big\}\quad(14)$$

ω 称为成员函数. 松弛问题 (14) 与原问题 (5) 的关系可由以下定理给出:

定理 1. 对于任意给定的 σ_i^2, σ_o^2, 如果 ω 是松弛问题 (14) 的一个解, 那么对任意 $\theta\in[0,1]$, $\Omega_o=\{(x,y):\omega(x,y)>\theta\}$ 是原问题 (5) 的一个解.

证明. 首先, 定义 $r(\sigma_o^2,\sigma_i^2)=\ln\sigma_o^2+\frac{u^2}{2\sigma_o^2}-\ln\sigma_i^2-\frac{u^2}{2\sigma_i^2}$, 对于给定的 σ_o, σ_i, 由假设条件 $P(\mathrm{H}_1)=P(\mathrm{H}_2)=1/2$, 则式 (5) 等价于:

$$\min_{\Omega_o}\Big\{L(\Omega_o)=\lambda Per(\Omega_o)+\int_\Omega r\chi_{\Omega_o}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big\}$$

其中, $Per(\Omega_o)$ 表示 Ω_o 的周长, χ_{Ω_o} 表示 Ω_o 的特征函数. 由于 $\omega\in[0,1]$, 由余面积公式, 有

$$\int_\Omega|\nabla\omega|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 Per(\Omega_o)\mathrm{d}\theta\quad(15)$$

$$\int_\Omega r\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega r\int_0^1\chi_{\Omega_o}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_\Omega r\chi_{\Omega_o}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta\quad(16)$$

其中, $\Omega_o=\{(x,y):\omega(x,y)>\theta\}$. 因此, 有

$$E(\omega)=\lambda\int_\Omega|\nabla\omega|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega r\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1[\lambda Per(\Omega_o)+\int_\Omega r\chi_{\Omega_o}\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}\theta=\int_0^1 L(\Omega_o)\mathrm{d}\theta$$

可以得到, 如果 ω 是 $E(\omega)$ 的一个极小值解, 则对任一 $\theta\in[0,1]$, $\Omega_o=\{(x,y):\omega(x,y)>\theta\}$ 为原问题 (5) 的一个极小值解. □

注 1. 文中所提全局最优解是指松弛问题 (14) 的全局最优解, 并非指原问题 (5) 的全局最优解, 否则是没有意义的.

2.2 分裂 Bregman 方法的快速求解

我们考虑如下问题,

$$\min_{\omega\in[0,1]}E(\omega)\quad(17)$$

其目标函数是凸的, 且含有总变差的正则化项, 一个快速有效的方法是结合分裂 Bregman 方法[20] 对其求解. 分裂 Bregman 方法的思想是将非约束问题难处理的项, 如耦合项、非线性项等问题, 用变量替换的方法转换为一个等价的约束问题, 再结合 Bregman 迭代[21] 方法进行求解. 该方法已广泛应用于基于总变差的图像去噪、图像修复[22−23]、MRI 重建等[20, 24] 问题的快速求解中. 为了书写简便, 令 $r(\sigma_o^2,\sigma_i^2)=-(\ln P(\mathrm{H}_2)-\ln\sigma_o^2-\frac{u^2}{2\sigma_o^2})+(\ln P(\mathrm{H}_1)-\ln\sigma_i^2-\frac{u^2}{2\sigma_i^2})$. 这样, 应用分裂 Bregman 方法求解式 (17) 的步骤如下: 首先应用变量代换, 考虑如下等价的约束问题:

$$\min_{\omega\in[0,1],v}\lambda|v|+\int_\Omega r\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(18)$$
$$\text{s.t.}\quad\nabla\omega=v$$

其中, $|\cdot|$ 表示 l_1 范数. 再应用 Bregman 迭代求解式 (18), 给定 ω^k, v^k, b^k, Bregman 迭代过程如下:

$$\begin{cases}(\omega^{k+1},v^{k+1})=\arg\min\limits_{\omega\in[0,1],v}\Big\{\lambda|v|+\int_\Omega r\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\mu}{2}|v-\nabla\omega-b^k|_2^2\Big\}\\ b^{k+1}=b^k+(\nabla\omega^{k+1}-v^{k+1})\end{cases}\quad(19)$$

其中, $b\in\partial E(\omega)$ 为 E 在 ω 处次微分中的某一个元素. 与传统利用罚函数处理约束问题的方法相比, Bregman 方法主要有两大优点: 1) Bregman 迭代收敛速度快, 特别是当目标泛函中包含 l_1 正则化项时; 2) 对于任意给定的常数 $\mu>0$, Bregman 迭代方法能精确的求解约束问题. 式 (19) 中第一个多变量极小问题, 可以用交替迭代进行[23], 这样, 进一步可以得到如下迭代格式:

$$\begin{cases}\omega^{k+1}=\arg\min\limits_{\omega\in[0,1]}\int_\Omega r\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\mu}{2}|v^k-\nabla\omega-b^k|_2^2\\ v^{k+1}=\arg\min\limits_v\lambda|v|+\frac{\mu}{2}|v-\nabla\omega^{k+1}-b^k|_2^2\\ b^{k+1}=b^k+(\nabla\omega^{k+1}-v^{k+1})\end{cases}\quad(20)$$

对于式 (20) 中第 1 个子问题, 其一阶最优条件为

$$r-\mu\Delta\omega^{k+1}=\mu\nabla_x^{\mathrm{T}}(v_x^k-b_x^k)+\mu\nabla_y^{\mathrm{T}}(v_y^k-b_y^k)\quad(21)$$

这是一个线性方程组, 可由 Gauss-Seidel 方法快速求解. 这样, 可以得到如下的 Gauss-Seidel 迭代格式:

$$\omega_{(i,j)}^{k+1}=\frac{1}{4}\Big(\omega_{i+1,j}^k+\omega_{i-1,j}^k+\omega_{i,j-1}^k+\omega_{i,j+1}^k+v_{x,i-1,j}^k-v_{x,i,j}^k+v_{y,i,j-1}^k-v_{y,i,j}^k-$$

$$b^k_{x,i-1,j} + b^k_{x,i,j} - b^k_{y,i,j-1} + b^k_{y,i,j} - \frac{r_{i,j}}{\mu}\Big) \tag{22}$$

此时, 考虑到 ω 的取值范围, 为了保证 ω 的取值在 $[0,1]$ 区间, 采用如下的投影:

$$\omega^{k+1}_{i,j} = \max(\min(1, \omega^{k+1}_{i,j}), 0) \tag{23}$$

该式表示当 ω 大于 1 时, 将其投影到 1; 当 ω 小于 0 时, 将其投影到 0; 当 ω 属于 $[0,1]$ 时, 不作改变.

对于式 (20) 中第 2 个子问题, 可以用软阈值收缩的方式来显示表达:

$$v^{k+1} = shrink\left(\nabla\omega^{k+1} + b^k, \frac{\lambda}{\mu}\right) \tag{24}$$

其中, $shrink$ 算子为 $shrink(a,b) = \frac{a}{|a|}\max(|a| - b, 0)$.

我们所提 Rayleigh 分布图像快速分割算法的主要步骤可总结如下:

步骤 1. 初始化 ω^0, v^0, b^0 及 θ 值.

步骤 2. 假定 ω^k, v^k, b^k 已给出. 计算分割区域 $\Omega_o = \{(x,y) : \omega^k(x,y) > \theta\}$, 其 Heaviside 函数可表示为

$$H(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \Omega_o \\ 0, & (x,y) \in \Omega_i \end{cases} \tag{25}$$

步骤 3. 由式 (8) 和式 (9), 更新 σ_o^2, σ_i^2.

步骤 4. 由式 (22) 和式 (23), 计算 ω^{k+1}.

步骤 5. 由式 (24), 计算 v^{k+1}.

步骤 6. 由式 (20) 中最后一个子式计算 b^{k+1}.

步骤 7. 判断. 若满足停止准则, 则停止迭代; 若不满足, $k \leftarrow k+1$, 返回步骤 2.

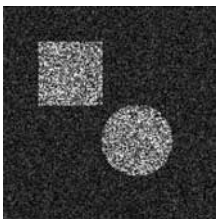
与式 (10) 中梯度下降法相比, 以上算法中, 步骤 5 和步骤 6 均由显式表达给出, 不会增加算法复杂度, 而步骤 4 中, 由于采用了 Gauss-seidel 快速迭代方法, 从而大大提高了整个分割算法的速度. 在所有实验中, $\omega^0 = \frac{u}{\max(u)}$ (图 2 实验中, ω^0 另外选取), 其中 u 为原始图像. $v^0 = \mathbf{0}$, $b^0 = \mathbf{0}$, $\theta = 0.5$, $\mu = 2$. 停止准则为 $\max|\omega^{k+1} - \omega^k| < 0.001$.

3 实验结果及分析

本节将对多幅模拟图像和实际图像进行数值模拟, 以检验本文模型与算法的效用. 并同传统的梯度下降法以及 CV 模型进行比较. 本文所有数值实验均由 Matlab 7.6 在配置为 Core 2, 2.40 GHz, 2 GB RAM 的个人电脑上运行.

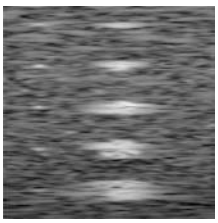
图 1 中给出实验所用图像. 图 1 (a) 为一幅 150 像素 ×150 像素的模拟图片, 其中圆和矩形内像素点服从参数为 $\delta_o^2 = 0.3$ 的 Rayleigh 分布, 其外部点服从参数为 $\delta_i^2 = 0.015$ 的 Rayleigh 分布. 图 1 (b) 和图 1 (c) 为 Field II 程序[25−26] 生成的 B 超图像, 图 1 (d) 为一幅真实 B 超图像, 图 1 (e) 和图 1 (f) 为 SAR 图像.

在图 2 中, 我们比较在相同初始曲线下, 用半隐式迭代的梯度下降法[7] 和所提算法求解模型 (5) 的迭代收敛时间. 实验图像为图 1 (a), $\lambda = 5$. 从图中可以看到两种算法都能得到想要的分割结果, 然而



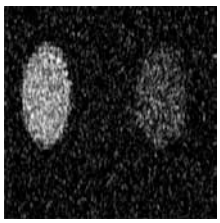
(a) 合成的 Rayleigh 分布图像 (150 像素 × 150 像素)

(a) Synthetic Rayleigh distributed image



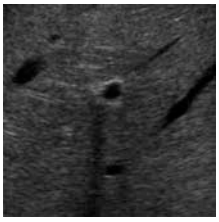
(b) Field II 模拟的超声图像 (280 像素 × 320 像素)

(b) Simulated ultrasound image by using Field II



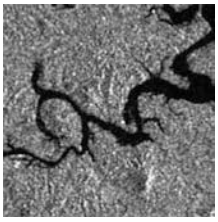
(c) Field II 模拟的超声图像 (258 像素 × 511 像素)

(c) Simulated ultrasound image by using Field II



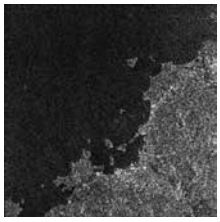
(d) 真实 B 超图像 (260 像素 × 260 像素)

(d) A real ultrasound image



(e) SAR 图像 (256 像素 × 256 像素)

(e) SAR image



(f) SAR 图像 (298 像素 × 297 像素)

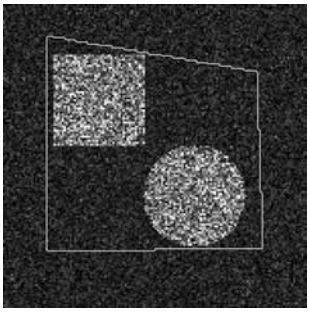
(f) SAR image

图 1 实验所用图片

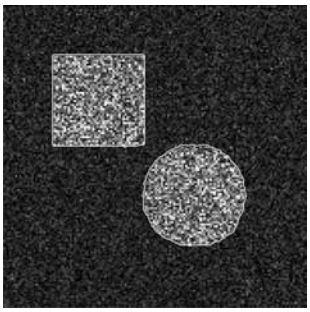
Fig. 1 Images for numerical experiments

应用梯度下降法收敛的 CPU 时间为 15 秒左右, 而应用所提算法, 收敛的 CPU 时间不到 1 秒, 收敛速度大大超过梯度下降法. 事实上, 所提算法中所有初始值均可自动给出, 而利用梯度下降法往往需要事先人为地选取初始曲线, 降低了算法的自动化程度.

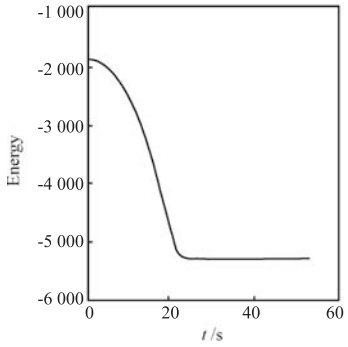
在图 3 中, 我们检验权重参数 λ 在分割中的作用, 其中, 图 3 (a) 和 3 (b) 选取较小的 λ, $\lambda = 5$, 图 3 (c) 和 3 (d) 选取较大的 λ, $\lambda = 50$. 我们知道 λ 调节分割边缘的光滑程度, 从图 3 中可以看出, 对于医学图像而言, 若想提取小目标区域, 可选取较小的



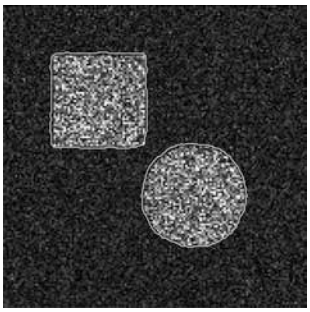
(a) 实验所选的初始曲线 (白色曲线)
(a) Initial contour (white curve)



(b) 梯度下降法分割结果
(b) Segmentation result by using gradient descent method

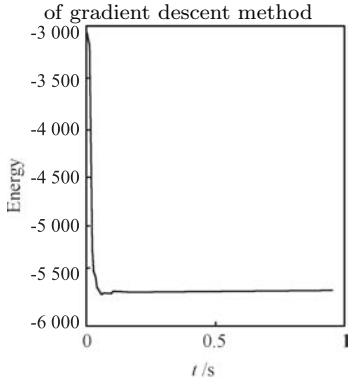


(c) 梯度下降法求解时, 目标函数 (5) 所对应能量随时间变化曲线
(c) Energy function (5) with CPU time of gradient descent method



(d) 本文算法分割结果 ($\omega \geq 0.5$)
(d) Segmentation result of proposed algorithm with $\omega \geq 0.5$

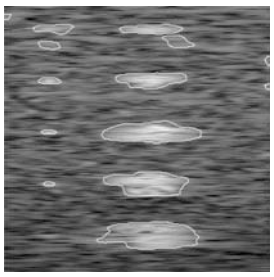
(e) 本文算法对应的成员函数 ω
(e) Corresponding membership function ω



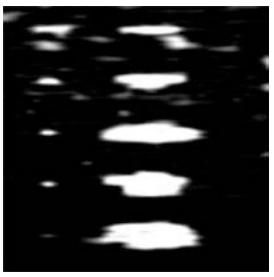
(f) 本文算法求解时, 目标函数 (5) 所对应能量随时间变化曲线
(f) Energy function (5) with CPU time of proposed algorithm

图 2　算法时间比较 ($\lambda = 5$)

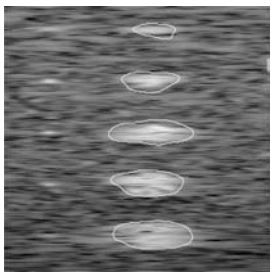
Fig. 2　Comparison of convergence time with $\lambda = 5$



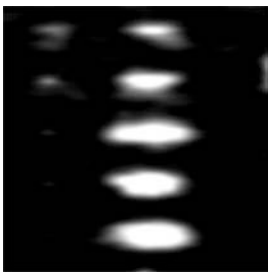
(a) 分割结果 ($\omega \geq 0.5, \lambda = 5$)
(a) Segmentation result with $\omega \geq 0.5$, $\lambda = 50$



(b) 相应的成员函数 ω
(b) Corresponding membership function ω



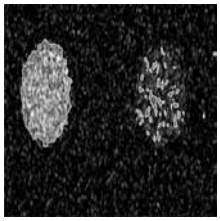
(c) 分割结果 ($\omega \geq 0.5, \lambda = 50$)
(c) Segmentation result with $\omega \geq 0.5$, $\lambda = 50$



(d) 相应的成员函数 ω
(d) Corresponding membership function ω

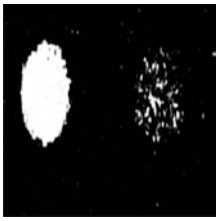
图 3　λ 的作用 ((a) 和 (b): $\lambda = 5$ 时本文模型及算法的分割结果; (c) 和 (d): $\lambda = 50$ 时本文模型及算法的分割结果)

Fig. 3　The effect of parameter λ ((a) and (b): Segmentation results of the proposed model and algorithm with $\lambda = 5$; (c) and (d): Segmentation results of the proposed model and algorithm with $\lambda = 50$)



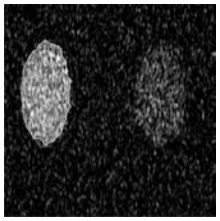
(a) 快速 CV 方法在 $\lambda = 1$ 时的分割结果 ($\omega \geq 0.5$)

(a) Segmentation result of fast CV method with $\lambda = 1$, $\omega \geq 0.5$



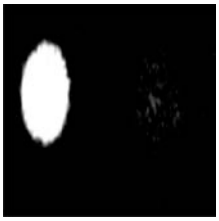
(b) 实验 (a) 所对应的成员函数 ω

(b) Membership function ω of experiment (a)



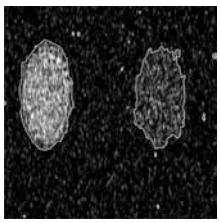
(c) 快速 CV 方法在 $\lambda = 10$ 时的分割结果 ($\omega \geq 0.5$)

(c) Segmentation result of fast CV method with $\lambda = 10$, $\omega \geq 0.5$



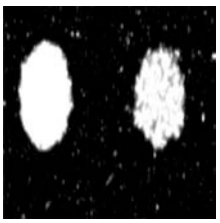
(d) 实验 (c) 所对应的成员函数 ω

(d) Membership function ω of experiment (c)



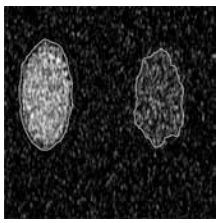
(e) 本文方法在 $\lambda = 10$ 时的分割结果 ($\omega \geq 0.5$)

(e) Segmentation result of proposed method with $\lambda = 10$, $\omega \geq 0.5$



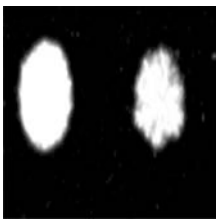
(f) 实验 (e) 所对应的成员函数 ω

(f) Membership function ω of experiment (e)



(g) 本文方法在 $\lambda = 100$ 时的分割结果 ($\omega \geq 0.5$)

(g) Segmentation result of proposed method with $\lambda = 100$, $\omega \geq 0.5$

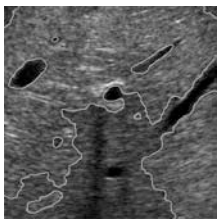


(h) 实验 (g) 所对应的成员函数 ω

(h) Membership function ω of experiment (g)

图 4 本文方法与快速 CV 方法[15] 比较

Fig. 4 Comparison of the proposed method with fast CV method[15]



(a) 快速 CV 方法在 $\lambda = 1$ 时的分割结果 ($\omega \geq 0.5$)

(a) Segmentation result of fast CV method with $\lambda = 1$, $\omega \geq 0.5$

(b) 实验 (a) 所对应的成员函数 ω

(b) Membership function ω of experiment (a)

(c) 快速 CV 方法在 $\lambda = 10$ 时的分割结果 ($\omega \geq 0.5$)

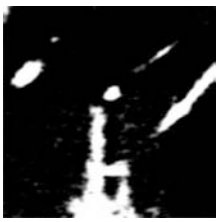
(c) Segmentation result of fast CV method with $\lambda = 10$, $\omega \geq 0.5$

(d) 实验 (c) 所对应的成员函数 ω

(d) Membership function ω of experiment (c)

(e) 本文方法在 $\lambda = 10$ 时的分割结果, $\omega \geq 0.5$

(e) Segmentation result of the proposed method with $\lambda = 10$, $\omega \geq 0.5$



(f) 实验 (e) 所对应的成员函数 ω

(f) Membership function ω of experiment (e)

(g) 本文方法在 $\lambda = 100$ 时的分割结果 ($\omega \geq 0.5$)

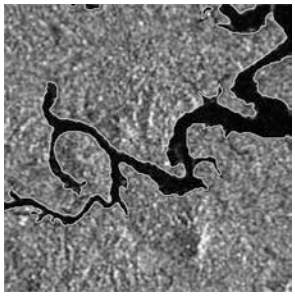
(g) Segmentation result of proposed method with $\lambda = 100$, $\omega \geq 0.5$

(h) 实验 (g) 所对应的成员函数 ω

(h) Membership function ω of experiment (g)

图 5 本文方法与快速 CV 方法[15] 比较

Fig. 5 Comparison of the proposed method with fast CV method[15]

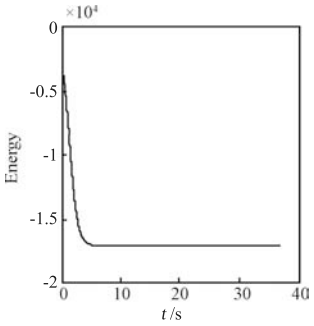


(a) 本文模型及算法对 SAR 河流图像的分割结果 ($\lambda = 10$, $\omega \geq 0.5$)

(a) Segmentation result of an SAR river image with $\lambda = 10$, $\omega \geq 0.5$

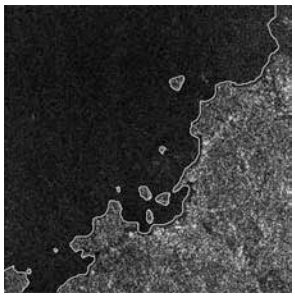
(b) 其所对应的成员函数 ω

(b) The corresponding membership function ω



(c) 目标函数 (5) 对应的能量随时间曲线

(c) Energy function (5) with CPU time

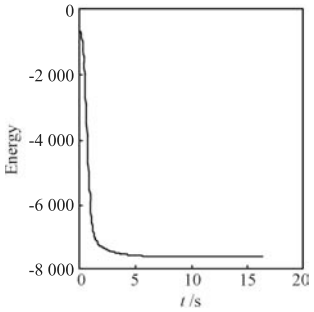


(d) 本文模型及算法对 SAR 海岸线图像的分割结果 ($\lambda = 10$, $\omega \geq 0.5$)

(d) Segmentation result of a SAR sea image with $\lambda = 10$, $\omega \geq 0.5$

(e) 其所对应的成员函数 ω

(e) The corresponding membership function ω



(f) 目标函数 (5) 对应的能量随时间曲线

(f) Energy function (5) with CPU time

图 6　SAR 图像分割

Fig. 6　Experiments on SAR image segmentation

λ, 若只需要提取较大目标可增大 λ.

图 4 和图 5 中, 我们比较快速 CV 算法[15] 和本文所提模型及算法对模拟 B 超图像和实际 B 超图像的分割. 图 4 和图 5 中上排图像为不同 λ 下, 快速 CV 方法的分割结果, 下排图像为不同 λ 下本文方法的分割结果. 其中, 图 4 模拟了两个损伤物体的 B 超图像, 从图 4 中我们可以看出, 当选取较小 λ (快速 CV 模型中 $\lambda = 1$, 本文模型中 $\lambda = 10$) 时, 两种分割方法的分割的物体边缘都不是很光滑, 且两种方法均未能得到有效的分割结果. 当选取较大 λ 时 (快速 CV 模型中 $\lambda = 10$, 本文模型中 $\lambda = 100$), 快速 CV 方法只能分割出一个有效物体, 而本文方法可以有效地分割出两个物体. 图 5 为实际 B 超肝脏图像, 其中暗区部分为组织的血管, 囊肿或成像的阴影部分, 为医生所关注的区域. 可以看出, 应用快速 CV 方法在较小的 λ ($\lambda = 1$) 和较大的 λ ($\lambda = 10$) 时均不能有效地提取感兴趣区域. 而所提方法在较小的 λ 时能提取较小的物体 (见图 5 (e) 左上方), 而在 λ 较大时, 只提取较大的目标物体.

图 6 中, 我们将所提模型与算法应用于 SAR 图像的分割, 其中, 图 6 (a) 为河流图像分割, 图 6(b) 为海岸线分割, 所提模型也能有效提取 SAR 图像中目标, 这更推广了模型的适用性. 实际上, 所提模型及算法对具有 Rayleigh 分布图像二相分割均有适用性.

4　结论

本文从 B 超幅度图像分割出发, 提出了一种基于贝叶斯风险分类的分割模型, 即贝叶斯 Rayleigh 模型. 再结合凸松弛方法及分裂 Bregman 算法, 提出一种基于贝叶斯 Rayleigh 模型的快速分割算法. 由于利用了图像的统计特征, 与分片常数的 CV 模型相比, 该模型更能适应强斑点噪声下 B 超图像的分割. 此外, 该模型还能推广到一般具有 Rayleigh 分布的图像分割中. 对于复杂的具有强斑点噪声的图像分割问题, 所提算法均能快速得到分割结果, 与传统的梯度下降法相比, 大大降低了分割时间.

致谢

感谢中国人民解放军南京军区总医院放射科和医学工程科提供 B 超医学图片及 B 超临床诊断的指导.

References

1 Zhu S C, Yuille A L. Region competition: unifying snakes, region growing and Bayes/MDL for multiband image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996, **18**(9): 884−900

2 Paragios N, Deriche R. Geodesic active regions and level set methods for supervised texture segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 2002, **46**(3): 223−247

3 Kass M, Witkin A P, Terzopoulos D. Snakes: active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1988, **1**(4): 321−331

4 Caselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 1997, **22**(1): 61−79

5 Mumford D, Shah J. Optical approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989, **42**(5): 577−684

6 Liu Guo-Cai, Wang Yao-Nan, Duan Xuan-Chu. Knowledge based hierarchical Mumford-Shah model for vector-valued image segmentation. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(4): 356−363
(刘国才, 王耀南, 段宣初. 基于知识的多层 Mumford-Shah 向量值图像分割模型. 自动化学报, 2009, **35**(4): 356−363)

7 Chan T F, Vese L A. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, **10**(2): 266−277

8 Zhong T, Tagare H D, Beaty J D. Evaluation of four probability distribution models for speckle in clinical cardiac ultrasound images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2006, **25**(11): 1483−1491

9 Sarti A, Corsi C, Mazzini E, Lamberti C. Maximum likelihood segmentation of ultrasound images with Rayleigh distribution. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 2005, **52**(6): 947−960

10 Liu Bo, Huang Jian-Hua, Tang Xiang-Long, Liu Jia-Feng, Zhang Ying-Tao. Combining global probability density difference and local gray level fitting for ultrasound image segmentation. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 951−959
(刘博, 黄剑华, 唐降龙, 刘家锋, 张英涛. 结合全局概率密度差异与局部灰度拟合的超声图像分割. 自动化学报, 2010, **36**(7): 951−959)

11 Han Shou-Dong, Zhao Yong, Tao Wen-Bing, Sang Nong. Gaussian super-pixel based fast image segmentation using graph cuts. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(1): 11−20
(韩守东, 赵勇, 陶文兵, 桑农. 基于高斯超像素的快速 Graph Cuts 图像分割方法. 自动化学报, 2011, **37**(1): 11−20)

12 Li C M, Huang R, Ding Z H, Gatenby J C, Metaxas D N, Gore J C. A level set method for image segmentation in the presence of intensity inhomogeneities with application to MRI. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, **20**(7): 2007−2016

13 Nikolova M, Esedoglu S, Chan T F. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denosing models. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2006, **66**(5): 1632−1648

14 Bresson X, Esedoglu S, Vandergheynst P, Thiran J P, Osher S. Fast global minimization of the active contour/snake model. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2007, **28**(2): 151−167

15 Goldstein T, Bresson X, Osher S. Geometric applications of split Bregman method: segmentation and surface reconstruction. *Journal of Scientific Computing*, 2009, **45**(1−3): 272−293

16 Nambakhsh M S, Yuan J, Ayed I B, Punithakumar K, Goela A, Islam A, Peters T, Shuo L. A convex max-flow segmentation of LV using subject-specific distributions on cardiac MRI. In: Proceedings of the 22nd International Conference on Information Processing in Medical Imaging. Kloster Irsee, Germany: Springer, 2011. 171−183

17 Wanger R F, Smith S W, Sandrik J M, Lopez H. Statistics of speckle in ultrasound B-scans. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, 1983, **30**(3): 156−163

18 Burckhardt C B. Speckle in ultrasound B-mode scans. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, 1978, **25**(1): 1−6

19 Casella G, Berger R L. *Statistical Inference*. California: Wadsworth, 1990. 373−413

20 Goldstein T, Osher S. The split Bregman algorithm for L_1-regularized problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, **2**(2): 323−343

21 Osher S, Burger M, Goldfarb D, Xu J J, Yin W T. An iterative regularization method for total variation-based image restoration. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2005, **4**(2): 460−489

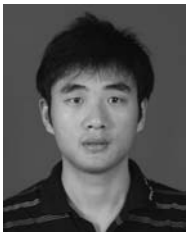
22 Setzer S, Steidla G, Teuber T. Deblurring Poissonian images by split Bregman techniques. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2010, **21**(3): 193−199

23 Setzer S. Operator splittings, Bregman methods and frame shrinkage in image processing. *International Journal of Computer Vision*, 2011, **92**(3): 265−280

24 Cai J F, Osher S, Shen Z W. Split Bregman methods and frame based image restoration. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2010, **8**(2): 337−370

25 Jensen J A. Field: a program for simulating ultrasound systems. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 1996, **34**(S1): 351−353

26 Jensen J A, Svendsen N B. Calculation of pressure fields from arbitrarily shaped, apodized, and excited ultrasound transducers. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1992, **39**(2): 262−267



黄 杰 南京理工大学理学院应用数学系博士研究生. 2007 年获南京理工大学理学院信息与计算科学学士学位. 主要研究方向为基于变分偏微分方程方法的图像处理模型、算法和理论分析, 医学图像处理. E-mail: colourfulhj@163.com
(**HUANG Jie** Ph. D. candidate in the Department of Applied Mathematics, School of Science, Nanjing University of Science and Technology. He received his bachelor degree from the Department of Information and Computing Science, Nanjing University of Science and Technology in 2007. His research interest covers modeling, algorithms, and their theoretical analysis in image processing based on variational and partial differential equation (PDE) methods, and medical image processing.)

杨孝平 教授, 博士. 主要研究方向为几何分析、非线性偏微分方程及图像处理. E-mail: yangxp@njust.edu.cn
(**YANG Xiao-Ping** Professor, Ph. D.. His research interest covers geometric analysis, nolinear PDEs and their applications in image processing.)