空间移不变系统图像超分辨复原的快速解耦算法

黄丽丽 [1, 2] 肖 亮 [1] 韦志辉 [1] 张 军 [3]

摘 要 超分辨率图像复原是当今一个重要的热门研究课题. 本文提出了一种基于全变差模型的超分辨率复原快速解耦算法. 利用半二次正则化思想, 提出了一个新的解耦 TV (Total variation) 模型. 利用交替最小化方法和线性空间不变模糊的性质将上采样融合、去模糊和去噪分步进行. 算法中对上采样融合采用非迭代的直接计算方法; 去模糊过程采用基于变换的预处理共轭梯度迭代算法, 而去噪过程采用了子空间投影方法. 本文算法降低了算法复杂度; 超分辨率重建图像在去除噪声的同时, 不仅能够保证图像平坦区域的保真度, 较好地抑制阶梯效应的产生, 而且能够保持图像中边缘等重要几何结构的清晰度.

关键词 超分辨, 全变差, 融合, 去模糊, 去噪

DOI 10.3724/SP.J.1004.2010.00229

A Fast Decoupling Algorithm for Image Super-resolution Reconstruction of Space-invariant System

HUANG Li-Li[1, 2] XIAO Liang[1] WEI Zhi-Hui[1] ZHANG Jun[3]

Abstract Super-resolution reconstruction has been a very hot research topic currently. In this paper, we study a fast decoupling algorithm for TV-based (Total variation) image super-resolution reconstruction. A new TV-based decoupling model is proposed by utilizing the half-quadratic regularization approach. The treatment is separated into measurements fusion, deblurring and denoising by exploiting the alternating minimization algorithm and the property of the space-invariance blur. The fusion part is shown to be a very simple non-iterative algorithm. The deblurring part can be solved by transform-based preconditioning conjugate gradient method for improved convergence. The subspace projection method is employed to solve the denoising problem. The proposed algorithm reduces the computational complexity. Super-resolution experiment results demonstrate that the proposed algorithm is not only able to restrain the noise and preserve the important geometric structures in the image such as edges, but also able to maintain the fidelity of flat regions without producing the staircase effect.

Key words Super-resolution, total variation, fusion, deblurring, denoising

当今, 电晶体传感器如 CMOS、CCD 等已经在数字成像系统, 如数码相机、摄像机中得到广泛的应用, 但是传感器中光电探测器单元尺寸往往限制着成像的空间分辨率. 提高图像空间分辨率的硬件方法是降低光电探测器单元尺寸. 但是, 探测器单元尺寸的降低使得光通量相应地减少, 导致数字图像的低信噪比; 同时, 探测器单元尺寸的降低也会大幅提高制造成本. 提高图像空间分辨率的软件方法是当前国际上的研究热点, 即超分辨率重建技术. 超分辨重建 (Super-resolution reconstruction, SRR) 技术利用多幅低分辨率退化图像序列, 通过信号处理的方法重建一幅高分辨率图像或图像序列[1]. 与传统图像复原技术不同之处在于, SRR 充分利用了获取的多幅低分辨率图像信息, 同时能够综合考虑成像过程中的模糊效应、频谱混叠、随机噪声等各种退化因素, 因而在遥感成像、红外成像以及医学成像等实际领域具有广阔的应用前景.

在近年来的发展过程中, 对于超分辨率图像重建计算方面的研究一直比较缓慢, 主要由于超分辨率重建模型中由于下采样矩阵的存在, 获取的低分辨率图像数目的不确定, 图像之间位移的任意性, 因而不能像传统图像复原那样, 采用循环矩阵模型直接对角化来简化计算. 在降低计算复杂性方面, Kim 等[2] 提出了快速矩阵块分解法; Hardie 等[3] 提出了共轭梯度算法; Nguyen 等[4] 提出了重建计算有效性的概念, 该文献采用迭代的方法, 为了加速迭代, 采用条件预优共轭梯度法. Elad 等[5] 提出了超分辨

收稿日期 2008-12-30 录用日期 2009-05-15
Manuscript received December 30, 2008; accepted May 15, 2009
国家高技术研究发展计划 (863 计划) (2007AA12Z142), 国家自然科学基金 (60802039, 60672074), 高等学校博士学科点专项科研基金 (20070288050) 资助
Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2007AA12Z142), National Natural Science Foundation of China (60802039, 60672074), and Doctoral Program Foundation of Institutions of Higher Education of China (20070288050)

1. 南京理工大学计算机科学与技术学院模式识别与智能系统实验室 南京 210094 2. 广西工学院信息与计算科学系 柳州 545006 3. 南京理工大学理学院 南京 210094
1. Laboratory of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094 2. Department of Information and Computing Science, Guangxi University of Technology, Liuzhou 545006 3. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094

快速算法的概念, 将去模糊和上采样融合分步进行, 对于上采样融合的快速算法为非迭代的直接计算方法, 去模糊采用迭代的计算方法. Farsiu 等[6] 对 L_1 范数的鲁棒特性进行了理论证明, 并以双边 TV (Total variation, TV) 作为先验概率模型, 提出了一种快速鲁棒的超分辨率算法. Tony 等[7] 基于不动点迭代和预处理技术提出了快速算法. Xiao 等[8] 通过近似求解目标函数的导数, 采用 Amijo 原则确定步长, 利用梯度投影方法进行超分辨率图像重建. Antonio 等[9] 基于 Bregman 迭代思想提出了一种新的逆尺度空间方法来求解超分辨重建问题.

超分辨率重建问题数学本质上的非适定性需要设计合理有效的图像模型, 以达到在去除噪声的同时保持重建图像中边缘等视觉重要几何结构的目的. 因此近年来, 著名的全变差模型[10] 在超分辨率重建中得到空前广泛的应用. 本文提出了一种基于全变差模型的超分辨率复原快速解耦算法. 利用半二次正则化思想, 提出了一个新的解耦 TV 模型. 利用交替最小化方法和线性空间不变模糊的性质将上采样融合、去模糊和去噪分步进行. 算法中对上采样融合采用非迭代的直接计算方法; 去模糊过程采用基于变换的预处理共轭梯度迭代算法, 而去噪过程采用了子空间投影方法. 与经典的梯度下降法相比, 本文算法降低了算法复杂度; 超分辨率重建图像在去除噪声的同时, 不仅能够保证图像平坦区域的保真度, 较好地抑制阶梯效应的产生, 而且能够保持图像中边缘等重要几何结构的清晰度.

1 基于 TV 的 SRR 模型及经典算法

假设低分辨率图像序列中包含 P 帧 $N_1 \times N_2$ 大小的退化图像. 超分辨率的任务是重建一幅 $R_1N_1 \times R_2N_2$ 大小的高分辨率清晰图像 u, 其中 R_1, R_2 分别为水平方向和垂直方向的分辨率提高因子. 将图像相应各行顺时针旋转 90 度堆叠成列向量后, 假设高分辨率图像为 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_M)^{\mathrm{T}}$, $M = R_1N_1R_2N_2$, 低分辨率图像序列为 $\boldsymbol{g}_k = (g_{k_1}, g_{k_2}, \cdots, g_{k_L})^{\mathrm{T}}$, $L = N_1N_2$, $k = 1, 2, \cdots, P$.

图像获取是一个相对复杂的过程, 精确的退化建模对有效的超分辨率重建至关重要. 文献中普遍采用如下形式的退化模型:

$$\boldsymbol{g}_k = DHF_k\boldsymbol{u} + \boldsymbol{n}_k, \quad k = 1, 2, \cdots, P \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{u}$ 表示原始高分辨率清晰图像, $\boldsymbol{g}_k$ 表示第 k 帧低分辨率图像, $\boldsymbol{n}_k$ 表示加性随机噪声, F_k 表示 $\boldsymbol{g}_k$ 相对 $\boldsymbol{u}$ 的 $M \times M$ 运动变形矩阵, H 表示 $M \times M$ 光学模糊矩阵, D 表示 $L \times M$ 下采样矩阵.

暂且不考虑运动估计, 根据正则化理论或 Bayesian 统计, 超分辨率重建可以归结为求解下列最小能量泛函

$$\hat{u} = \arg\min_{u \in \mathrm{BV}(\Omega)} \left\{ E(u) = \sum_{k=1}^{P} \|DHF_k u - g_k\|_2^2 + \alpha \|u\|_{\mathrm{TV}} \right\} \tag{2}$$

其中, α 为正则化参数, $\|u\|_{\mathrm{TV}} = \int_\Omega |\nabla u| \, \mathrm{d}x$.

利用梯度下降法 (Gradient descent, GD) 转换为求解非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla E(u) = \alpha \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + 2\sum_{k=1}^{P} F_k^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} (g_k - DHF_k u) \tag{3}$$

在式 (3) 中, 为避免 $|\nabla u|$ 等于零, 引入参数 $\varepsilon > 0$, 将其替换为 $\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon}$[11]. 利用中心差分格式对式 (3) 进行离散, 得到离散迭代格式

$$\boldsymbol{u}^{(n+1)} = \boldsymbol{u}^{(n)} - \tau \nabla E\left(\boldsymbol{u}^{(n)}\right) \tag{4}$$

其中, n 表示第 n 步迭代.

梯度下降法的实现比较简单, 但当 ε 很小时, 方程的奇异性较强, 导致格式的收敛速度很慢. 算法的收敛及收敛速度对时间步长 τ 的选择也较为敏感, 并且每次迭代都要计算一次 $\sum_{k=1}^{P} F_k^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} DHF_k \boldsymbol{u}^{(n)}$. 由于线性空间不变模糊算子的支集一般很大, 受到模糊影响的原始高分辨率图像的像素数量也很大, 因此去模糊的计算代价很高. 针对这些问题, 根据 Huang 等[12] 最近提出的基于 TV 最小化的快速图像复原方法, 本文提出如下的解耦 TV 超分辨模型与快速解耦算法.

2 解耦 TV 超分辨模型与快速解耦算法

2.1 解耦 TV 超分辨模型与理论分析

对应于退化模型 (1), 对于 $\boldsymbol{g}_k$ 相对 $\boldsymbol{u}$ 的运动为平移, 污染各帧图像的噪声为独立同分布高斯白噪声的退化情形, 考虑如下的解耦 TV 超分辨模型:

$$(\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{w}}) = \arg\min_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}} \left\{ \alpha_1 \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\|_2^2 + \alpha_2 \|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{TV}} + \sum_{k=1}^{P} \|DHF_k\boldsymbol{u} - \boldsymbol{g}_k\|_2^2 \right\} \tag{5}$$

其中, $\|\cdot\|_2$ 为欧几里德范数, $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ 为离散 TV 范数, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ 为正则化参数. 离散梯度算子 $\nabla: \mathbf{R}^{M^2} \to \mathbf{R}^{M^2}$ 定义为

$$(\nabla \boldsymbol{w})_{i,j} = \left((\nabla \boldsymbol{w})_{i,j}^{x}, (\nabla \boldsymbol{w})_{i,j}^{y} \right), \ 1 \le i, j \le M$$

$$(\nabla \boldsymbol{w})_{i,j}^{x}=\begin{cases} w_{i+1,j}-w_{i,j}, & i<M \\ 0, & i=M \end{cases}$$

$$(\nabla \boldsymbol{w})_{i,j}^{y}=\begin{cases} w_{i,j+1}-w_{i,j}, & j<M \\ 0, & j=M \end{cases}$$

这里 $w_{i,j}$ 表示向量 $\boldsymbol{w}$ 的第 $((i-1)M+j)$ 个分量. 则 $\boldsymbol{w}$ 的离散 TV 范数为

$$\|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{TV}}=\sum_{i,j=1}^{M}\left|(\nabla \boldsymbol{w})_{i,j}\right|=\sum_{i,j=1}^{M}\sqrt{\left|(\nabla \boldsymbol{w})_{i,j}^{x}\right|^{2}+\left|(\nabla \boldsymbol{w})_{i,j}^{y}\right|^{2}}$$

比较式 (5) 和式 (2), 两式之间的差别是式 (5) 新增了一个变量 $\boldsymbol{w}$ 和一项保真项 $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|_2^2$. 注意到

$$\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}}\Big\{\sum_{k=1}^{P}\|DHF_k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{g}_k\|_2^2+\alpha_1\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|_2^2+\alpha_2\|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{TV}}\Big\}=\min_{\boldsymbol{w}}\min_{\boldsymbol{u}}\Big\{\sum_{k=1}^{P}\|DHF_k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{g}_k\|_2^2+\alpha_1\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|_2^2\Big\}+\alpha_2\|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{TV}} \tag{6}$$

当 α_1 充分大时, 式 (5) 与式 (2) 等价.

使用交替最小化算法求解式 (5). 由一初值 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 开始, 利用该方法得到一迭代序列

$$\boldsymbol{u}^{(1)},\boldsymbol{w}^{(1)},\boldsymbol{u}^{(2)},\boldsymbol{w}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{u}^{(n)},\boldsymbol{w}^{(n)},\cdots$$

使得

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{(n)} = \arg\min\limits_{\boldsymbol{u}}\{\sum\limits_{k=1}^{P}\|DHF_k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{g}_k\|_2^2+\alpha_1\left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}^{(n-1)}\right\|_2^2\} & (7) \\ \boldsymbol{w}^{(n)} = \arg\min\limits_{\boldsymbol{w}}\left\{\alpha_1\left\|\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{w}\right\|_2^2+\alpha_2\|\boldsymbol{w}\|_{\mathrm{TV}}\right\} & (8) \end{cases}$$

通过交替最小化方法, 我们将原始的 SRR 问题 (5) 分解为两个最小化问题 (7) 和 (8) 进行求解. 第一步求解最小化问题 (7), 当 $\boldsymbol{w}$ 固定时, 其能量泛函是关于 $\boldsymbol{u}$ 的二次泛函, 变分后得到一个线性方程组, 这一步可视为对问题 (5) 的线性化处理. 在下一节将看到, 利用线性空间不变模糊的性质, 在这一步我们可将去模糊和上采样分开处理. 最小化问题 (8) 是典型的 TV 去噪问题. 为了有效利用 TV 范数并避免其在求解过程中因引入参数 ε 所引起的数值问题, Carter[13] 和 Chambolle[14] 研究了式 (8) 的对偶问题. Chambolle 指出式 (8) 的解 $\boldsymbol{w}^{(n)}$ 是 $\boldsymbol{u}^{(n)}$ 到由 TV 的共轭函数所确定的凸集上的正交投影. 本文采用 Chambolle 投影算法处理去噪问题. 下面具体给出本文所提出的算法框架.

2.2　联合初值预优、预处理共轭梯度法和子空间投影的快速解耦算法

第一步: 求解最小化优化问题

$$\min_{\boldsymbol{u}}\left\{\sum_{k=1}^{P}\|DHF_k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{g}_k\|_2^2+\alpha_1\left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}^{(n-1)}\right\|_2^2\right\} \tag{9}$$

为了加速迭代, 首先预优初值 $\boldsymbol{w}^{(0)}$, 这里我们取为下列优化问题的最优解:

$$\hat{\boldsymbol{u}}=\min_{\boldsymbol{u}}\left\{\sum_{k=1}^{P}\|DHF_k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{g}_k\|_2^2\right\} \tag{10}$$

对式 (10) 用梯度下降法求解得到迭代格式:

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(n+1)}=\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)}-\mu\sum_{k=1}^{P}F_k^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}(DHF_k\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)}-\boldsymbol{g}_k) \tag{11}$$

当模糊算子线性空间不变时, 有 $F_k^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}=H^{\mathrm{T}}F_k^{\mathrm{T}}$, 以及 $HF_k=F_kH$, 因此式 (11) 变为

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(n+1)}=\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)}-\mu H^{\mathrm{T}}\sum_{k=1}^{P}F_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}(DF_kH\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)}-\boldsymbol{g}_k) \tag{12}$$

令模糊的高分辨率图像为 $\hat{\boldsymbol{z}}^{(n)}=H\hat{\boldsymbol{u}}^{(n)}$, 对式 (12) 两边同乘 H 得到

$$\hat{\boldsymbol{z}}^{(n+1)}=\hat{\boldsymbol{z}}^{(n)}-\mu HH^{\mathrm{T}}\Big[\sum_{k=1}^{P}F_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}DF_k\hat{\boldsymbol{z}}^{(n)}-\sum_{k=1}^{P}F_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_k\Big] \tag{13}$$

记 $R=\sum_{k=1}^{P}F_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}DF_k$, $\boldsymbol{s}=\sum_{k=1}^{P}F_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_k$, 注意到 $F_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}$ 是将低分辨率图像栅格上的值经过适当平移及零填充后复制到相应的高分辨率图像栅格上, 而 DF_k 与 $F_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}$ 的作用刚好相反 (图 1 给出了图像经上采样矩阵和下采样矩阵 D 作用后的结果), 故 $\boldsymbol{s}$ 为多帧低分辨率图像的上采样融合, 采用了非迭代的简单直接计算方法.

由于 HH^{T} 是半正定矩阵, 式 (13) 可视为加权值矩阵 HH^{T} 的广义梯度下降迭代格式[15]. 文献 [15] 指出若权值矩阵是半正定的, 则加权的广义梯度迭代格式与不加权的梯度迭代格式收敛至同一优化解. 又容易证明 R 为对角阵[5], 因此式 (13) 的解为

$$\hat{\boldsymbol{z}}_{\infty}=R^{-1}\boldsymbol{s} \tag{14}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{z}}_\infty = H\hat{\boldsymbol{u}}_\infty$, 对 $\hat{\boldsymbol{z}}_\infty$ 进行维纳滤波[16], 将去模糊后的图像 $\hat{\boldsymbol{u}}_\infty$ 作为初值 $\boldsymbol{w}^{(0)}$.

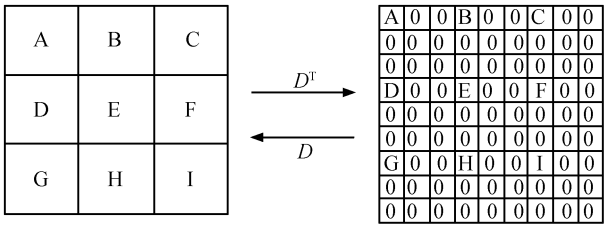


图 1 D^{T} 和 D 作用于图像的结果 (3 倍分辨率提升因子)

Fig. 1 Effect of D^{T} and D on image (Resolution enhancement factor is three)

其次将初值 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 代入式 (9), 求解最小化问题

$$\min_{\boldsymbol{u}}\left\{\sum_{k=1}^{P}\left\|DHF_k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{g}_k\right\|_2^2+\alpha_1\left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}^{(n-1)}\right\|_2^2\right\} \tag{15}$$

该问题等价于求解线性方程组

$$\left(H^{\mathrm{T}}RH+\alpha_1 I\right)\boldsymbol{u}=H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}+\alpha_1\boldsymbol{w}^{(n-1)} \tag{16}$$

对于式 (16) 中的系数矩阵 $H^{\mathrm{T}}RH+\alpha_1 I$, 即使 $H^{\mathrm{T}}RH$ 奇异, 由于正则项 $\alpha_1 I$ 的作用, 系数矩阵仍为非奇异的对称正定阵, 采用共轭梯度法对式 (16) 进行求解, 为了提高收敛速度可采用预处理技术, 本文采用块循环矩阵计算模型进行了快速傅里叶变换预处理.

第二步: 将式 (16) 的解 $\boldsymbol{u}^{(n)}$ 带入式 (8) 中, 求解最小化优化问题

$$\min_{\boldsymbol{w}}\left\{\alpha_1\left\|\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{w}\right\|_2^2+\alpha_2\left\|\boldsymbol{w}\right\|_{\mathrm{TV}}\right\} \tag{17}$$

这一步相当于对第一步生成的去模糊融合图像 $\boldsymbol{u}^{(n)}$ 基于 TV 去噪. 本文在去噪步骤中采用 Chambolle[14] 子空间投影算法, 即求解约束最小化问题

$$\min_{\boldsymbol{q}}\left\{\left\|\boldsymbol{u}^{(n)}-\frac{\alpha_2}{2\alpha_1}\mathrm{div}\boldsymbol{q}\right\|_2^2,\ \left|\boldsymbol{q}_{i,j}\right|\le 1\right\} \tag{18}$$

其中, $\boldsymbol{q}_{i,j}=\left(q_{i,j}^x,q_{i,j}^y\right)\in\mathbf{R}^2$, $(\mathrm{div}\boldsymbol{q})_{i,j}=q_{i,j}^x-q_{i-1,j}^x+q_{i,j}^y-q_{i,j-1}^y$, $q_{0,j}^x=q_{i,0}^y=0$. 为方便, 记 $\lambda=\alpha_2/2\alpha_1$. 当求出约束优化问题 (18) 的最优解 $\boldsymbol{q}^*$ 之后, 去噪图像 $\boldsymbol{w}^{(n)}=\boldsymbol{u}^{(n)}-\lambda\mathrm{div}\boldsymbol{q}^*$. 文献 [14] 利用半隐式梯度下降法求解式 (18), 迭代格式为

$$\boldsymbol{q}_{i,j}^{(m+1)}=\frac{\boldsymbol{q}_{i,j}^{(m)}+\tau\nabla\left(\mathrm{div}\boldsymbol{q}^{(m)}-\dfrac{\boldsymbol{u}^{(n)}}{\lambda}\right)_{i,j}}{1+\tau\left|\nabla\left(\mathrm{div}\boldsymbol{q}^{(m)}-\dfrac{\boldsymbol{u}^{(n)}}{\lambda}\right)_{i,j}\right|} \tag{19}$$

其中, τ 是投影梯度方法所引入的步长, m 为第 m 次迭代步数.

从而本文所采用的快速解耦算法可归结为:

步骤 1. 初始化: $\boldsymbol{s}=\sum_{k=1}^{P}F_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_k$, $R=\sum_{k=1}^{P}F_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}DF_k$, $\boldsymbol{w}^{(0)}=H^{-1}R^{-1}\boldsymbol{s}$.

步骤 2. 交替迭代:

1) 给定 $\boldsymbol{w}^{(n-1)}$, 求解线性方程组 (16) 得到 $\boldsymbol{u}^{(n)}$;

2) 给定 $\boldsymbol{u}^{(n)}$, 求解式 (19) 得到 $\boldsymbol{q}^{(m)}$, 从而 $\boldsymbol{q}^*=\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{q}^{(m)}$, $\boldsymbol{w}^{(n)}=\boldsymbol{u}^{(n)}-\lambda\mathrm{div}\boldsymbol{q}^*$.

步骤 3. 终止准则: 若

$\mathrm{ReDiff}=\left\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}-\boldsymbol{u}^{(n)}\right\|_2/\left\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}\right\|_2<\xi_{\mathrm{stop}}$, 则停止迭代. 否则, $n=n+1$, 转至步骤 2.

3 实验结果及分析

本文分别从复原图像的视觉效果、峰值信噪比 (Peak signal to noise ratio, PSNR) 和相对误差 (Relative error, ReErr) 来评价超分辨率复原算法的性能优劣. PSNR、ReErr 分别定义如下:

$$\mathrm{PSNR}=10\log 10\left\{\frac{MN\max\{\boldsymbol{u}\}^2}{\left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*\right\|_2^2}\right\}$$

$$\mathrm{ReErr}=\frac{\left\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*\right\|_2^2}{\left\|\boldsymbol{u}\right\|_2^2}$$

其中, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}^*$ 分别为 $M\times N$ 的原始高分辨率图像和恢复图像. 所有计算均在 Matlab 平台下进行, 算法中参数的选取以超分辨率复原图像具有最大 PSNR 值为最优.

由于 GD 算法实现比较简单, 是解决非线性问题最自然也是最直接的方法, 所以直到现在 GD 算法仍是求解超分辨率重建图像的常用方法[5−6, 17]. 目前的 GD 算法无论是采用显式、半隐式, 还是隐式的迭代格式进行超分辨率图像重建, 都不能利用线性空间不变模糊算子将去模糊和去噪问题分开处理. 在此, 将本文的快速解耦 (Fast decoupling, FD) 算法与 GD 算法进行比较. 两种算法的终止条件要求相继迭代的两帧恢复图像的相对差值 (Relative difference, ReDiff) 满足下列不等式:

$$\mathrm{ReDiff}=\frac{\left\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}-\boldsymbol{u}^{(n)}\right\|_2}{\left\|\boldsymbol{u}^{(n+1)}\right\|_2}<\xi_{\mathrm{stop}}$$

或迭代次数不超过 1 000 次. FD 中 $\boldsymbol{u}^{(0)}=0$, GD 中 $\boldsymbol{u}^{(0)}=(\sum_{k=1}^{P}F_k^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_k)/P$. FD 算法中交替迭代的第一步: 求解线性方程组所采用的共轭梯度迭代终止条件要求残差小于 10^{-5}.

图 2 (a) ∼ 5 (a) 给出一幅原始超分辨率图像. 原始图像经过水平方向和垂直方向分别平移 0, 1, 2, 3 个像素、标准方差为 0.5 的 3 × 3 高斯模糊、4

倍率的下采样和方差分别为 5、10 的高斯噪声退化后得到 8 帧低分辨率图像; 图 2 (b) ∼ 5 (b) 给出低分辨率图像; 图 2 (c) ∼ 5 (c) 给出 GD 复原结果; 图 2 (d) ∼ 5 (d) 给出 FD 复原结果. 表 1 对应于图 2 ∼ 5 给出了相应的实验参数取值和结果.

由图 2 ∼ 5, 在视觉效果上将本文提出的 FD 算法与 GD 算法相比. 本文算法在去除噪声的同时, 不仅能够保证图像平坦区域的保真度, 较好地抑制阶梯效应的产生, 而且能够保持图像中边缘等重要几何结构的清晰度. 对于计算效率, 由表 1 看到在迭代数和计算时间上 FD 算法要少于 GD 算法; 对于复原效果, FD 算法的 PSNR 高于 GD 算法, FD 算法的 ReErr 低于 GD 算法.

(a) 原始高分辨率图像 (256×256)

(a) Original high-resolution image

(b) 一帧低分辨率图像 (64×64)

(b) One low-resolution image

(c) 采用 GD 复原图像 (256×256, $\alpha = 25$, $\tau = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-1}$)

(c) The restored image by GD method

(d) 采用 FD 复原图像 (256×256, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 6$, $\tau = 0.1$)

(d) The restored image by FD method

图 2　方差为 5 高斯噪声情形下 “Woman” 图的超分辨率复原结果

Fig. 2　SRR results of “Woman” image in the Gaussian noise case with variance 5

表 2 给出了在方差为 5 的高斯噪声情形下, 采用 GD 算法的复原结果. 由表 2 看到, 计算时间随着时间步长 τ 的增大而增大, 随着 ε 的减小而增大, 可见 GD 算法的收敛速度对时间步长 τ 和参数 ε 的选择较为敏感.

表 3 给出了在方差为 5 的高斯噪声情形下, 采用 FD 算法的 “Women” 复原结果. 在 FD 算法中交替迭代的第二步: 子空间投影迭代次数分别取为 2 和 100. 由表 3 看到, 迭代次数越大计算代价越大, 但复原效果相差不大. 因此, 子空间投影迭代次数取为 2.

(a) 原始高分辨率图像 (256×256)

(a) Original high-resolution image

(b) 一帧低分辨率图像 (64×64)

(b) One LR image

(c) 采用 GD 复原图像 (256×256, $\alpha = 25$, $\tau = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-1}$)

(c) The restored image by GD method

(d) 采用 FD 复原图像 (256×256, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 6$, $\tau = 0.1$)

(d) The restored image by FD method

图 3　方差为 10 高斯噪声情形下 “Woman” 图的超分辨率复原结果

Fig. 3　SRR results of “Woman” image in the Gaussian noise case with variance 10

图 6 给出了在方差为 5 的高斯噪声情形下, 分别从 PSNR、ReDiff 两个角度比较 GD 和 FD 算法的收敛性能. 图 6 中横坐标表示迭代次数, 图 6 (a) 和 6 (b) 的纵坐标分别表示 PSNR 和 ReDiff. 由图 6 看到, FD 算法的收敛要快于 GD 算法.

表 1 对应图 2～5 的实验参数及复原结果 (括号内的迭代次数为共轭梯度迭代次数)

Table 1 The parameters values and computational results corresponding to Figs. 2～5 (The numbers in the bracket under the "Iteration" column refer to the total number of the inner conjugate gradient iterations.)

Experiments	GD					FD				
	ξ_{stop}	Iteration	Time (s)	PSNR (dB)	ReErr	ξ_{stop}	Iteration	Time (s)	PSNR (dB)	ReErr
Fig. 2 (b)	2×10^{-4}	212	100.406	27.718	0.0053	10^{-4}	137 (7)	14.281	32.769	0.0017
Fig. 3 (b)	2×10^{-4}	212	101.453	27.643	0.0054	10^{-4}	143 (7)	15.938	32.455	0.0018
Fig. 4 (b)	3×10^{-4}	217	102.688	23.272	0.0145	10^{-4}	183 (7)	19.828	28.504	0.0044
Fig. 5 (b)	3×10^{-4}	217	102.891	23.220	0.0147	10^{-4}	189 (7)	20.453	28.335	0.0045

表 2 GD 算法中的参数取值及复原结果

Table 2 The parameters values and restoration results of the GD method

"Woman" image						"Lena" image					
α	τ	ε	ξ_{stop}	Iteration	Time (s)	α	τ	ε	ξ_{stop}	Iteration	Time (s)
25	10^{-3}	10^{-1}	2×10^{-4}	212	100.406	25	10^{-3}	10^{-1}	3×10^{-4}	217	102.688
2.5	10^{-3}	10^{-5}	2×10^{-4}	252	119.391	2.5	10^{-3}	10^{-5}	3×10^{-4}	266	126.203
25	2×10^{-3}	10^{-1}	2×10^{-4}	1 000	480.734	25	2×10^{-3}	10^{-1}	3×10^{-4}	1 000	477.141

(a) 原始高分辨率图像 (256 × 256)

(a) Original high-resolution image

(b) 一帧低分辨率图像 (64 × 64)

(b) One LR image

(c) 采用 GD 复原图像 (256 × 256, $\alpha = 25$, $\tau = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-1}$)

(c) The restored image by GD method

(d) 采用 FD 复原图像 (256 × 256, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 6$, $\tau = 0.1$)

(d) The restored image by FD method

图 4 方差为 5 高斯噪声情形下 "Lena" 图的超分辨率复原结果

Fig. 4 SRR results of "Lena" image in the Gaussian noise case with variance 5

(a) 原始高分辨率图像 (256 × 256)

(a) Original high-resolution image

(b) 一帧低分辨率图像 (64 × 64)

(b) One LR image

(c) 采用 GD 复原图像 (256 × 256, $\alpha = 25$, $\tau = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-1}$)

(c) The restored image by GD method

(d) 采用 FD 复原图像 (256 × 256, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 6$, $\tau = 0.1$)

(d) The restored image by FD method

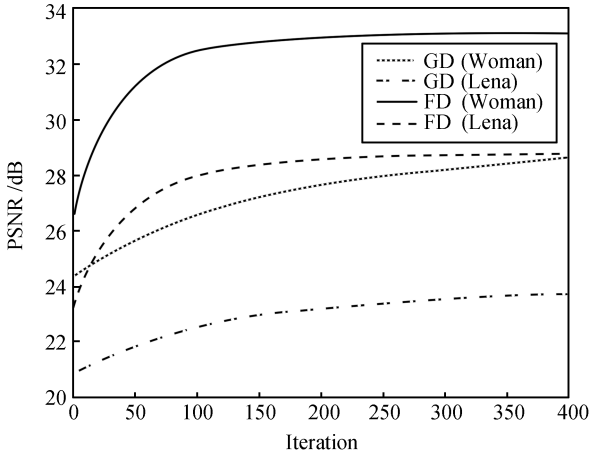
图 5 方差为 10 高斯噪声情形下 "Lena" 图的超分辨率复原结果

Fig. 5 SRR results of "Lena" image in the Gaussian noise case with variance 10

表 3　FD 算法中不同的子空间迭代次数的复原结果

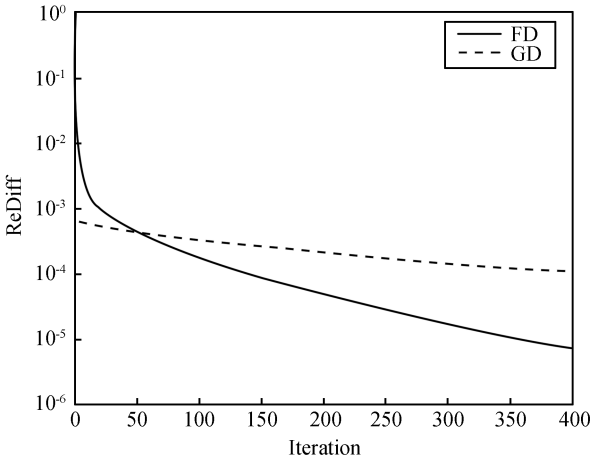
Table 3　Restoration results for different numbers (p) of subspace projection iterations in the FD method

p	Iteration	Time (s)	PSNR (dB)	ReErr
2	137	14.281	32.769	0.0017
100	155	171.797	32.704	0.0017



(a) “Woman” 和 “Lena” 复原图的 PSNR 比较

(a) Measured by PSNR value of the “Woman” and “Lena” restored image



(b) “Woman” 复原图的 ReDiff 比较

(b) Measured by ReDiff value of the “Woman” restored image

图 6　方差为 5 高斯噪声情形下的 GD 和 FD 算法的收敛性比较

Fig. 6　Convergence performance of GD and FD methods with variance 5

4　结论

本文利用半二次正则化思想, 提出了一个新的解耦 TV 模型. 利用交替最小化方法和线性空间不变模糊的性质将上采样融合、去模糊和去噪分步进行. 算法中对上采样融合采用非迭代的直接计算方法; 去模糊过程采用基于变换的预处理共轭梯度迭代算法, 而去噪过程采用了子空间投影方法. 与经典的梯度下降法相比, 本文算法降低了算法复杂度; 超分辨率重建图像在去除噪声的同时, 不仅能够保证图像平坦区域的保真度, 较好地抑制阶梯效应的产生, 而且能够保持图像中边缘等重要几何结构的清晰度.

致谢

感谢韩玉兵博士、孙玉宝、冯灿给予本文工作的支持和帮助!

References

1 Borman S. Topics in Multiframe Super-Resolution Restoration [Ph. D. dissertation], University of Notre Dame, USA, 2004

2 Kim S P, Boes N K, Valenzuela H M. Recursive reconstruction of high resolution image from noisy undersampled multiframes. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, 1990, **38**(6): 1013−1027

3 Hardie R C, Barnard K J, Bognar J G, Armstrong E E, Watson E A. High resolution image reconstruction from a sequence of rotated and translated frames and its application to an infrared imaging system. *Optical Engineering*, 1998, **73**(1): 247−260

4 Nguyen N, Milanfar P, Golub G. A computationally efficient super-resolution image reconstruction algorithm. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, **10**(4): 573−583

5 Elad M, Hel-Or Y. A fast super-resolution reconstruction algorithm for pure translational motion and common space-imvariant blur. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, **10**(8): 1187−1193

6 Farsiu S, Michael E, Milanfar P. Multi-frame demosaicing and super-resolution of color images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **15**(1): 141−159

7 Chan T F, Ng M K, Yau A C, Yip A M. Super-resolution image reconstruction using fast inpainting algorithms. *Applied and Computational Harmonic Analalysis*, 2007, **23**(1): 3−24

8 Xiao C B, Jing Y, Yi X. A high-efficiency super-resolution reconstruction algorithm from image/video sequences. In: Proceedings of the 3rd International Conference on Signal-Image Technologies and Internet-based System. Shanghai, China: IEEE, 2007. 573−580

9 Marquina A, Osher S J. Image super-resolution by TV-regularization and Bregman iteration. *Journal of Scientific Computing*, 2008, **37**(3): 367−382

10 Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 1992, **60**(1-4): 259−268

11 Michael K N, Shen H F, Lam E Y, Zhang L P. A total variation regularization based super-resolution reconstruction algorithm for digital video. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2007, **2007**(18): 124−139

12 Huang Y M, Ng M K, Wen Y W. A fast total variation minimization method for image restoration. *Mutiscale Modeling and Simulation*, 2008, **7**(2): 774−795

13 Carter J. Dual Methods for Total Variation-Based Image Restoration [Ph. D. dissertation], University of California Los Angeles, USA, 2002

14 Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and application. *Journal of Mathematic Imaging and Vision*, 2004, **20**(1-2): 89−97

15 Uertsekas D. *Nonlinear Programming*. Belmont: Athena, 1995

16 Gonzalez R C, Woods R E, Eddins S L. *Digital Image Processing Using MATLAB*. New York: Prentice Hall, 2004

17 Shao W Z, Wei Z H. Edge-and-corner preserving regularization for image interpolation and reconstruction. *Image and Vision Computing*, 2008, **26**(12): 1591−1606

黄丽丽 南京理工大学博士研究生, 讲师. 主要研究方向为图像处理, 图像建模与超分辨率重建.
E-mail: huang-lili@163.com
(**HUANG Li-Li** Lecturer, Ph. D. candidate at Nanjing University of Science and Technology. Her research interest covers image processing, image modeling, and super-resolution reconstruction.)

肖 亮 副教授. 主要研究方向为图像理解与计算机视觉. 本文通信作者.
E-mail: xtxiaoliang@163.com
(**XIAO Liang** Associate professor. His research interest covers image understanding and computer vision. Corresponding author of this paper.)

韦志辉 教授. 主要研究方向为图像处理, 图像建模, 小波分析, 多尺度变换理论, 数字水印, 编码与压缩.
E-mail: gswei@mail.njust.edu.cn
(**WEI Zhi-Hui** Professor. His research interest covers image processing, image modeling, wavelet analysis, multi-scale analysis, digital watermark, and image coding and compressing.)

张 军 讲师. 主要研究方向为图像建模与算法, 反问题的数值方法.
E-mail: phil_zj@mail.njust.edu.cn
(**ZHANG Jun** Lecturer. His research interest covers image modeling and algorithm, and numerical algorithm of inverse problem.)