

# USV 集群对正态分布目标的拦截任务筹划: 布阵设计、方案实现与概率计算

王晓玲<sup>1</sup> 徐英杰<sup>1</sup> 徐伟辰<sup>2</sup> 刘浏<sup>3</sup> 苏厚胜<sup>2</sup>

**摘要** 移动目标出现的时空信息不确定性为水面无人艇 (USV) 集群拦截带来巨大挑战. 针对出现位置服从正态分布、出现时间服从均匀分布的水面移动目标, 开展 USV 集群对这类移动目标的拦截任务筹划研究. 首先, 在 USV 集群的布阵设计阶段, 结合目标出现位置的正态分布特性, 提出 USV 集群“非均匀”布阵设计方案, 生成与目标出现位置的正态分布特性相匹配的优化拦截线; 其次, 分别通过预设时间控制、主从一致性等关键技术, 实现 USV 集群入阵、定速跟踪以及协同撤收, 三者共同完成 USV 集群对移动目标的拦截控制; 最后, 根据正态分布概率密度函数特性, 给出该拦截方案下 USV 集群对该类移动目标拦截概率的解析表达式. 研究表明, 该方案能显著应对目标出现的时空不确定性, 显著提升了对该类移动目标的拦截效能.

**关键词** 正态分布目标; USV 集群; 目标拦截; 集群布阵; USV 控制

**引用格式** 王晓玲, 徐英杰, 徐伟辰, 刘浏, 苏厚胜. USV 集群对正态分布目标的拦截任务筹划: 布阵设计、方案实现与概率计算. 自动化学报, 2026, 52(4): 846–864

**DOI** 10.16383/j.aas.c250669 **CSTR** 32138.14.j.aas.c250669

## Interception Mission Planning of USV Swarms for Normally Distributed Targets: Deployment Design, Scheme Implementation and Probability Calculation

WANG Xiao-Ling<sup>1</sup> XU Ying-Jie<sup>1</sup> XU Wei-Chen<sup>2</sup> LIU Liu<sup>3</sup> SU Hou-Sheng<sup>2</sup>

**Abstract** The spatiotemporal information uncertainty associated with emerging mobile targets presents a significant challenge for interception by unmanned surface vessel (USV) swarms. This paper addresses the problem of intercepting a surface mobile target whose emerging location follows a normal distribution and emergence time follows a uniform distribution. During the deployment design phase, a novel “non-uniform” deployment design scheme of the USV swarms is first introduced, generating an optimized interception line that matches the normal distribution characteristic of the target’s location. The scheme then integrates prescribed-time control and leader-following consensus laws to manage the entire interception cycle: Swarm deployment into formation, constant-speed tracking, and coordinated withdrawal. Finally, leveraging the properties of the normal distribution probability density function, an analytical expression for the interception probability under the proposed scheme is derived. Simulation studies demonstrate that the proposed scheme effectively counters the spatiotemporal uncertainty of target emergence and markedly enhances interception performance.

**Keywords** normally distributed targets; USV swarms; target interception; swarm deployment; USV control

**Citation** Wang Xiao-Ling, Xu Ying-Jie, Xu Wei-Chen, Liu Liu, Su Hou-Sheng. Interception mission planning of USV swarms for normally distributed targets: Deployment design, scheme implementation and probability calculation. *Acta Automatica Sinica*, 2026, 52(4): 846–864

收稿日期 2025-11-26 录用日期 2026-01-20

Manuscript received November 26, 2025; accepted January 20, 2026

国家自然科学基金 (62522313, 62425602, 62473207, U25B2078, 62561160100) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62522313, 62425602, 62473207, U25B2078, 62561160100)

本文责任编辑 杨涛

Recommended by Associate Editor YANG Tao

1. 南京邮电大学自动化学院 南京 210023 2. 华中科技大学人工智能与自动化学院 武汉 430074 3. 南京邮电大学通信与信息工程学院 南京 210023

1. College of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023 2. School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and

Technology, Wuhan 430074 3. School of Communications and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023

海洋关乎国家生存发展与民族复兴伟业, 维护海洋安全、建设海洋强国是攸关国计民生与主权完整的核心战略. 面对日益复杂的海上威胁与广袤海域的管控挑战, 水面无人艇 (unmanned surface vessel, USV) 集群以其分布式、智能化和低成本的优势, 正成为重塑海上防御体系、实现“制胜未来”的关键力量<sup>[1-5]</sup>. 海洋目标拦截能力已从传统的战术

辅助角色演变为衡量一个国家能否有效掌控海权、维护安全、促进繁荣的战略能力。USV 集群凭借其分布式探测、协同决策与饱和攻击能力, 正成为应对海上高动态、多维度威胁的高效拦截手段。面对敌方可能发动的快速突防、骚扰侦察或协同攻击, 单一平台往往难以实现广域封锁与有效拒止, 而 USV 集群通过构建动态拦截网络, 可实现对重点水域的立体封控与智能抗击, 大幅提升我国海上防御体系的韧性与反应速度<sup>[6]</sup>。因此, 在当前无人化、智能化的战争形态变革背景下, 发展以无人艇集群为代表的先进拦截手段, 不仅是应对当前海上威胁的迫切需求, 更是面向未来、抢占军事科技竞争制高点的必然选择。

USV 集群的目标拦截研究主要包括“非动能”拦截(电磁干扰、电子攻击、声/光波干扰等)、“动能”拦截(如撞击式拦截、自杀式拦截、非致命物理拦截等)以及两者的混合。本文主要聚焦 USV 集群对移动目标的非致命物理拦截, 主要探究和解决移动目标的时空信息不确定性给 USV 集群拦截任务带来的挑战。

移动目标探测的研究主要遵循静态与动态两种技术路径。静态探测体系的研究中, 海军航空工程学院的梁巍等<sup>[7]</sup>通过布设静态声纳浮标以实现移动目标的搜索, 并且当浮标阵发现移动目标后可采用“十”字定位法进行快速搜索定位。同样通过布设声纳浮标拦截阵, 海军航空大学的章尧卿等<sup>[8]</sup>实现了对以固定航向航速运动的移动目标拦截。动态探测体系的研究关键在于如何充分利用平台的移动特性。往返拦截, 即平台通过往返运动实现对目标的拦截, 是移动平台目标拦截的常用方式。海军潜艇学院的张会等<sup>[9]</sup>研究了单个船舰往返运动以实现移动目标的拦截, 并给出这一方案下的拦截概率。进一步地, 文献<sup>[10-11]</sup>将文献<sup>[9]</sup>中的拦截问题拓展到 USV 集群。具体地, 在这两篇文献中, 作者研究使用一组 USV 集群实施对移动目标拦截的拦截概率计算等问题。然而, 在这两篇文献中, 作者首先是将 USV 简化为质点模型, 这种模型的抽象化不仅不符合实际的应用场景, 也会直接影响概率计算的精确性。其次, 文献<sup>[7-11]</sup>仅仅讨论了拦截概率的计算问题, 并没有讨论 USV 集群如何有效执行拦截任务以确保拦截概率计算的意义。

基于以上考虑, 本文聚焦一组 USV 集群如何有效实施对出现位置服从正态分布、出现时间服从均匀分布的水面移动目标的拦截任务这一科学问题, 采用 USV 集群往返运动的运动方式, 拟从 USV 集群的布阵设计、USV 集群运动控制以及 USV 集群对该移动目标拦截的概率计算等三个方

面开展研究。本文将这三方面分别简记为布阵设计、方案实现以及概率计算。

布阵设计的主要目的在于解决 USV 集群的路径规划问题。本文充分考虑移动目标出现位置的正态分布特性, 提出 USV 集群的“非均匀”布阵设计方案。该方案的核心思想是, 已知目标的出现位置呈期望为  $\mu$ 、标准差为  $\sigma$  的正态分布, 根据正态分布函数的  $3\sigma$  原则, 则该目标以概率 99.74% 出现在区间  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ , 本文提出“中间密、两边疏”的非均匀往返拦截阵型, 并给出刚体 USV 模型实施该非均匀往返拦截的优化路径。进一步地, 本文从 USV 集群入阵、定速跟踪以及协同撤收三个方面, 开展 USV 集群如何实现对具有上述特征的移动目标往返拦截的研究。具体地, 为实现 USV 集群的同频往返拦截, 每个 USV 被要求以期望的速度同时抵达布阵中的指定位置, 即预设时间的轨迹跟踪任务。因此, 预设时间控制理论发挥着重要的作用。

近年来, 时间控制理论发展迅速, 从有限时间控制<sup>[12-13]</sup>、固定时间控制<sup>[5, 14]</sup>到预设时间控制<sup>[15-16]</sup>。具体地, 文献<sup>[13]</sup>提出随机扰动下具有输入饱和和约束的 USV 有限时间路径跟踪控制方法; 而文献<sup>[5]</sup>解决了模型参数不确定的 USV 集群的固定时间二分编队跟踪控制问题; 文献<sup>[17]</sup>研究了随机噪声和切换拓扑条件下 USV 集群的预设时间自适应编队控制问题。另一方面, 反步控制<sup>[18]</sup>、滑模控制<sup>[19]</sup>等都是处理复杂未知海域环境下刚体 USV 集群轨迹跟踪控制的常用方法<sup>[17-21]</sup>。具体地, 文献<sup>[19]</sup>实现了复杂海况下基于全局积分滑模控制的 USV 集群的轨迹跟踪。为满足实际工程中对任务完成及时性的要求, 文献<sup>[20]</sup>将预设时间控制理论与强化学习相结合, 解决了 USV 集群的编队跟踪问题; 然而, 该方法融合了反步法与强化学习方法, 导致控制器结构复杂。文献<sup>[21]</sup>将预设时间控制和模糊控制结合以实现 USV 的高性能轨迹跟踪, 虽在一定程度上避免了对 USV 系统模型的依赖, 但仍需依赖强化学习进行函数逼近, 其性能受参数选择影响显著, 且与实际系统偏差较大。文献<sup>[22]</sup>将传统视距制导原理拓展至 Dubins 路径跟踪问题, 构建具有侧滑角参数自适应能力的跟踪控制器, 并且通过采用最近投影点来定义横向跟踪误差, 令误差  $x_e = 0$ , 大大简化刚体 USV 的路径跟踪算法设计。本文在文献<sup>[22]</sup>提出的基于传统视距制导原理的路径跟踪算法的启发下, 通过将 LOS 算法与预设时间控制理论有效结合, 实现每一个 USV 在预设时间内以期望速度抵达指定位置。其次, 为更好地保障 USV 集群的同频拦截, 即 USV 集群在对各自期望轨迹跟踪时能够同时转弯和同时掉头, 当 USV 集群抵

达指定位置时, 本文通过对 USV 实施纵向和偏航控制, 确保其定速跟踪. 进一步地, 为安全、高效、有序地结束当前任务, 回收高价值的装备并为下一次任务做好准备, 本文进一步讨论了 USV 集群的协同撤收问题, 即实现 USV 集群到达指定的母艇上. 这一问题被转化为多智能体系统的主从一致性 (leader-following consensus) 问题, 其中母艇是领航者, 而 USV 集群是跟随者. 为更好地克服高动态、强干扰等对 USV 集群通信的影响, 在基于采样数据的多智能体系统一致性<sup>[23-24]</sup>的基础上, 本文引入随机采样策略<sup>[25-26]</sup>, 完成随机采样信息下的 USV 集群协同撤收任务. 具体地, 在对 USV 模型进行线性化的基础上, 考虑到 USV 集群的相对速度信息要比相对位置信息难以获取这一事实, 本文设计仅依赖随机采样位置信息的分布式主从一致性控制算法. 基于严格的理论分析, 给出 USV 集群协同撤收时随机采样间隔需要满足的条件.

最后, 根据正态分布式概率密度函数特性, 在前面设计的拦截方案下, 给出 USV 集群对出现位置服从正态分布、出现时间服从均匀分布的水面移动目标拦截概率的解析表达式. 仿真实验验证了本文所给出的拦截概率的有效性, 同时也突出了本文方案能显著提升 USV 集群对该类移动目标的拦截效能.

## 1 问题描述

本文中,  $\mathbf{R}$  表示实数集,  $\mathbf{N}$  表示自然数集,  $\mathbf{R}^N$  表示  $N$  维实向量空间,  $\mathbf{R}^{N \times N}$  表示  $N \times N$  维实矩阵空间. 对于任意矩阵  $X$ , 其转置记为  $X^T$ .  $\otimes$  表示 Kronecker 积,  $X \succ 0$  表示矩阵  $X$  为正定矩阵. 本文以  $\mathbf{e}_i$  表示单位列向量, 其维数由上下文确定, 其中第  $i$  个分量为 1, 其余分量均为 0.

本文聚焦如何使用一组 USV 集群实施对移动目标的拦截问题. 具体地, 该移动目标的出现概率在时间上呈均匀分布, 在方位上呈正态分布. 本文将从布阵设计、方案实现以及概率计算等三个方面, 完善 USV 集群对该目标的拦截筹划. 为此, 首先对 USV 集群进行运动学和动力学建模.

### 1.1 USV 模型介绍

本文所考虑的 USV 集群由  $N$  个三自由度的 USV 构成. 文献 [27] 对各种海上航行器的刚体运动建模进行了系统且深入的分析, 在该文献及文献 [28] 的启发下, 设计第  $i$  个 USV 的运动学模型与动力学模型, 分别如第 1.1.1 节和第 1.1.2 节所述.

#### 1.1.1 USV 运动学建模

令  $\eta_i = [x_i, y_i, \psi_i]^T$  表示第  $i$  个 USV 的位姿信

息, 其中  $x_i \in \mathbf{R}$ 、 $y_i \in \mathbf{R}$  和  $\psi_i \in \mathbf{R}$  分别表示第  $i$  个 USV 的横向位置、纵向位置和艏摇角. 另一方面, 令  $\nu_i = [u_i, v_i, r_i]^T$  表示第  $i$  个 USV 的速度信息, 其中  $u_i \in \mathbf{R}$ 、 $v_i \in \mathbf{R}$  和  $r_i \in \mathbf{R}$  分别表示第  $i$  个 USV 的纵荡速度 (前进后退)、横漂速度 (横向偏移) 和艏摇角速度. 基于此, 第  $i$  个 USV 的三自由度运动模型可表示为

$$\dot{\eta}_i = J(\psi_i)\nu_i \quad (1)$$

其中,  $J(\psi_i)$  是转换矩阵, 其具体形式如下

$$J(\psi_i) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_i) & -\sin(\psi_i) & 0 \\ \sin(\psi_i) & \cos(\psi_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将式 (1) 展开为运动学方程可写成

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i \cos(\psi_i) - v_i \sin(\psi_i) \\ \dot{y}_i = u_i \sin(\psi_i) + v_i \cos(\psi_i) \\ \dot{\psi}_i = r_i \end{cases}$$

#### 1.1.2 USV 动力学建模

USV 的高精度控制依赖于外部作用力, 为此, 需要对其进行动力学建模. 第  $i$  个 USV 的三自由度动力学方程如下:

$$M_i \dot{\nu}_i + C(\nu_i)\nu_i + D(\nu_i)\nu_i + F_g(\eta_i) = \tau_i \quad (2)$$

其中,  $M_i \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  是惯性矩阵且  $M_i \succ 0$ ;  $C(\nu_i) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  为科里奥利和向心矩阵;  $D(\nu_i) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  是阻尼矩阵;  $F_g(\eta_i) \in \mathbf{R}^3$  是由重力和浮力引起的力矩矩阵;  $\tau_i = [\tau_{u_i}, \tau_{v_i}, \tau_{r_i}]^T \in \mathbf{R}^3$  表示第  $i$  个 USV 的控制输入, 并且  $\tau_{u_i} \in \mathbf{R}$ 、 $\tau_{v_i} \in \mathbf{R}$  和  $\tau_{r_i} \in \mathbf{R}$  分别表示第  $i$  个 USV 在纵向、横向和偏航上的输入. 假设船体的坐标与重心重合, 式 (2) 可简化成

$$M_i \dot{\nu}_i + C(\nu_i)\nu_i + D(\nu_i)\nu_i = \tau_i \quad (3)$$

且有

$$M_i = \begin{bmatrix} m_{i,11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{i,22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{i,33} \end{bmatrix}$$

$$C(\nu_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{i,22}v_i \\ 0 & 0 & m_{i,11}u_i \\ m_{i,22}v_i & -m_{i,11}u_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(\nu_i) = \begin{bmatrix} -X_u - X_{u|u}|u_i| & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v - Y_{v|v}|v_i| & 0 \\ 0 & 0 & -N_r - N_{r|r}|r_i| \end{bmatrix}$$

其中,  $m_{i,11}$ ,  $m_{i,22}$ ,  $m_{i,33}$  为第  $i$  个 USV 的附加质量系数;  $X_u$ ,  $Y_v$ ,  $N_r$  分别为纵荡一阶阻尼, 横漂一

阶阻尼, 艏摇角一阶阻尼;  $X_{u|u|}$ ,  $Y_{v|v|}$ ,  $N_{r|r|}$  分别为纵荡二阶阻尼, 横漂二阶阻尼, 艏摇角二阶阻尼. 值得注意的是, 本文默认同一作业海域中同构 USV 的阻尼系数都是相同的. 因此对  $X_u$ ,  $Y_v$ ,  $N_r$ ,  $X_{u|u|}$ ,  $Y_{v|v|}$ ,  $N_{r|r|}$  等参数并未使用下标  $i$  作具体区分, 并且各参数的选取如表 1 所示.

表 1 USV 动力学参数  
Table 1 Dynamic parameters of USV

参数	符号	数值	单位
纵荡一阶阻尼	$X_u$	-0.72	kg/s
纵荡二阶阻尼	$X_{u u }$	-1.62	kg/m
横漂一阶阻尼	$Y_v$	-0.86	kg/s
横漂二阶阻尼	$Y_{v v }$	-56.30	kg/m
艏摇角一阶阻尼	$N_r$	-1.90	kg·m <sup>2</sup> /s
艏摇角二阶阻尼	$N_{r r }$	-6.40	kg·m <sup>2</sup>

令  $W(\nu_i) = C(\nu_i) + D(\nu_i)$ , 则有

$$W(\nu_i) = \begin{bmatrix} -X_u - X_{u|u|}|u_i| & 0 & -m_{i, 22}\nu_i \\ 0 & -Y_v - Y_{v|v|}|v_i| & m_{i, 11}u_i \\ m_{i, 22}\nu_i & -m_{i, 11}u_i & -N_r - N_{r|r|}|r_i| \end{bmatrix}$$

此时, 该 USV 的三自由度动力学模型可写为

$$M_i \dot{\nu}_i + W(\nu_i)\nu_i = \tau_i \quad (4)$$

根据 (3), 可得

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \frac{1}{m_{i, 11}}(m_{i, 22}\nu_i r_i + X_u u_i + X_{u|u|}|u_i| + \tau_{u_i}) \\ \dot{v}_i = \frac{1}{m_{i, 22}}(-m_{i, 11}u_i r_i + Y_v v_i + Y_{v|v|}|v_i| + \tau_{v_i}) \\ \dot{r}_i = \frac{1}{m_{i, 33}}((m_{i, 11} - m_{i, 22})u_i v_i + N_r r_i + N_{r|r|}|r_i| + \tau_{r_i}) \end{cases}$$

## 1.2 图论

本文用一个无向图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  来描述由  $N$  个 USV 组成的集群之间的交互关系, 其中  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$  为节点集,  $\mathcal{E} = \{(i, j) \mid \text{节点 } i \text{ 与节点 } j \text{ 之间存在一条边}\}$  为边集. 而无向路径是指无向图中的边序列, 如  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots$  表示节点的信息可以沿着路径双向传递. 定义  $\mathcal{G}$  的邻接矩阵为  $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]_{ij} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ , 并且当  $(j, i) \in \mathcal{E}$  时, 有  $[\mathcal{A}]_{ij} = [\mathcal{A}]_{ji} > 0$ , 否则  $[\mathcal{A}]_{ij} = 0$ . 本文仅考虑  $\mathcal{G}$  为简单图的情况, 因此有  $[\mathcal{A}]_{ii} = 0$ . 在  $\mathcal{A}$  的基础上, 定义  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵为  $\mathcal{L} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ , 其中, 当  $i \neq j$  时,  $[\mathcal{L}]_{ij} = -[\mathcal{A}]_{ij}$ ; 而当  $i = j$  时,  $[\mathcal{L}]_{ij} = \sum_{j=1, j \neq i}^N [\mathcal{A}]_{ij}$ . 若无向图中任意两个不同节点之间存在一条无向

路径, 那么这个无向图是连通的. 本文将  $\mathcal{L}$  的特征值表示为  $\lambda_i(\mathcal{L})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 详细描述可参考文献 [29].

当 USV 集群被赋予一个母艇时 (被记为 0), 本文引入一个对角矩阵  $\mathcal{H} = \text{diag}\{[\mathcal{H}]_1, \dots, [\mathcal{H}]_N\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  以表征母艇对 USV 集群的作用关系. 具体地, 当第  $i$  个 USV 可以接收到母艇的信息时, 有  $[\mathcal{H}]_i > 0$ , 否则  $[\mathcal{H}]_i = 0$ , 相关描述可以参考文献 [30].

为方便叙述, 本文将  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$  中的节点称作跟随者, 标记为 0 的母艇称作领航者, 并且下文涉及 USV 集群协同的讨论均是在假设 1 上开展的.

**假设 1.**  $\mathcal{G}$  连通且至少有一个跟随者能够获取领航者的信息, 即  $\mathcal{G}$  连通且对角矩阵  $\mathcal{H} = \text{diag}\{[\mathcal{H}]_1, \dots, [\mathcal{H}]_N\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  中至少有一个元素大于 0.

**引理 1** [31]. 在假设 1 下, 有  $\mathcal{L} + \mathcal{H} \succ 0$ , 且矩阵  $\mathcal{L} + \mathcal{H}$  的特征值满足  $0 < \lambda_1(\mathcal{L} + \mathcal{H}) \leq \lambda_2(\mathcal{L} + \mathcal{H}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathcal{L} + \mathcal{H})$ .

## 2 布阵设计

为提高 USV 集群对移动目标的拦截能力, 本节重点研究如下问题: 如何针对该移动目标“出现位置呈正态分布且出现时间呈均匀分布”的机动特性, 设计与之匹配的协同拦截方案, 形成有效的“拦截线”以优化集群的搜索与拦截策略, 进而从根本上提高 USV 集群的拦截概率和作战效能.

针对以上特定的移动目标, USV 集群的拦截布阵仅需考虑目标出现位置的正态分布特征. 因此, 本方案中 USV 的数量  $N$  也将设定为偶数个, 以匹配目标出现位置正态分布的对称特性. 图 1 给出了由  $N = 4$ 、探测半径为  $r_{tc}$  的 USV 构成的 USV 集群所形成的拦截布阵设计.

具体地, 将宽度为  $L$  的拦截海域划分为  $\frac{L}{3}$ 、 $\frac{L}{6}$ 、 $\frac{L}{6}$ 、 $\frac{L}{3}$  的四块区域, 其中每一个 USV 负责一块海域的巡逻搜索, 从而形成“中间密、两边疏”的非均匀巡逻搜索阵型, 构成如图 1 所示“拦截线”. USV 的具体巡逻搜索轨迹如图 1 中的红色实线表征.

图 2 将对图 1 中的红色实线表征的巡逻搜索轨迹进行说明. 若 USV 的巡逻搜索轨迹如图 2(a) 中的黑色虚线所示 (即为一个矩形), USV 的刚体特性决定着其在转弯 (尤其是 90° 急转) 时会偏离预设的轨迹, 实际运行轨迹为图 2(a) 中的红色实线. 这种发生偏离的实际轨迹不仅会增加能量消耗, 还会导致 USV 难以维持匀速运动, 影响目标拦截概率. 为避免该问题的出现, 本文将 USV 的巡逻搜索轨迹设计为如图 2(b) 中的红色实线所示, 即 USV 转

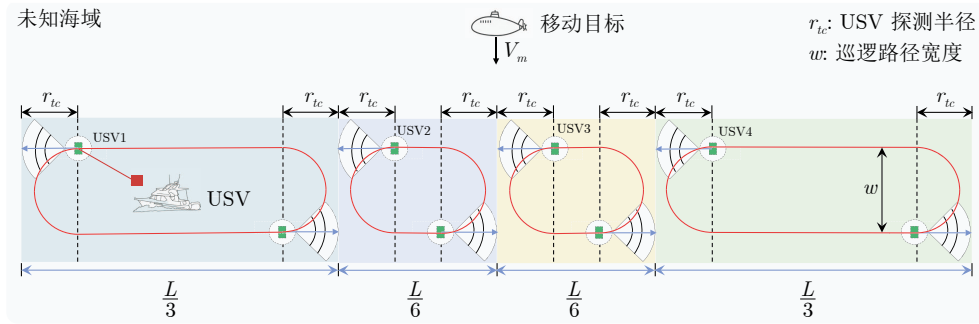


图 1 USV 集群拦截布阵设计

Fig.1 Interception deployment design for USV swarms

弯路径为圆弧状，其中，巡逻路径宽度  $w$  满足  $2r_{\min} \ll w \leq 2r_{tc}$  ( $r_{\min}$  为最小转弯半径). 这种圆弧转弯路径既能有效避免 USV 在转弯时偏离轨迹，也有利于 USV 保持匀速运动状态.

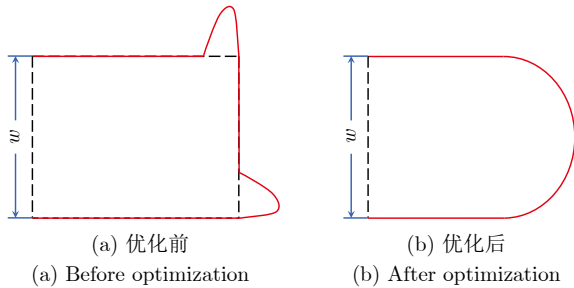


图 2 路径优化

Fig.2 Path optimization

### 3 方案实现

为提高 USV 集群对出现位置呈正态分布且出现时间呈均匀分布的移动目标的拦截能力, USV 集群的运动控制方案设计如下:

- 1) 集群入阵: USV 集群以期望速度同时抵达布阵设计中按非均匀布阵轨迹路径长度的比例进行划分的目标位置;
- 2) 定速跟踪: 各 USV 以指定的速度完成对各自期望轨迹的同频搜索;
- 3) 协同撤收: 为实现 USV 集群隐蔽、高效的协同撤收, 本方案旨在在领导者-跟随者模型下解决仅依赖随机历史位置采样信息的集群一致性问题.

#### 3.1 集群入阵

本节针对应用于目标拦截任务的 USV 集群, 设计基于预设时间理论的 LOS 控制律, 该控制律包括运动学控制律设计和动力学控制律设计两个部分. 为便于描述相关参数, 现引入以下路径描述.

根据布阵设计结果, 如图 1 中红色曲线所示, 第  $i$  个 USV 的期望路径可表示为  $(x_{i,d}(\theta_i), y_{i,d}(\theta_i))$ ,

其中  $\theta_i \geq 0$  为路径变量. 期望路径的切向角为  $\gamma_{i,d}(\theta_i) = \arctan\left(\frac{\partial y_{i,d}}{\partial \theta_i}, \frac{\partial x_{i,d}}{\partial \theta_i}\right)$ , 路径跟踪误差  $x_{i,e}, y_{i,e}$  定义为

$$\begin{bmatrix} x_{i,e} \\ y_{i,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_{i,d}(\theta_i)) & -\sin(\gamma_{i,d}(\theta_i)) \\ \sin(\gamma_{i,d}(\theta_i)) & \cos(\gamma_{i,d}(\theta_i)) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} x_i - x_{i,d}(\theta_i) \\ y_i - y_{i,d}(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (5)$$

#### 3.1.1 运动学控制律设计

本文将通过设计基于 LOS 算法的运动控制律, 实现对 USV 集群的运动控制. 该方法由 Fossen 等<sup>[21]</sup> 于 2014 年提出, 其基本原理是通过采用最近投影点来定义横向跟踪误差. 如图 3 所示, 当对该 USV 采用最近投影点来定义横向坐标误差时, USV 的最近投影点的横坐标与期望路径上的期望点 (如图 3 中的  $(x_{i,d}, y_{i,d})$  所示) 的横坐标重合, 即该 USV 在期望路径上的横向跟踪误差为  $x_{i,e} = 0$ . 因此, 后文的讨论只需要聚焦于  $y_{i,e}$  的稳定性上.

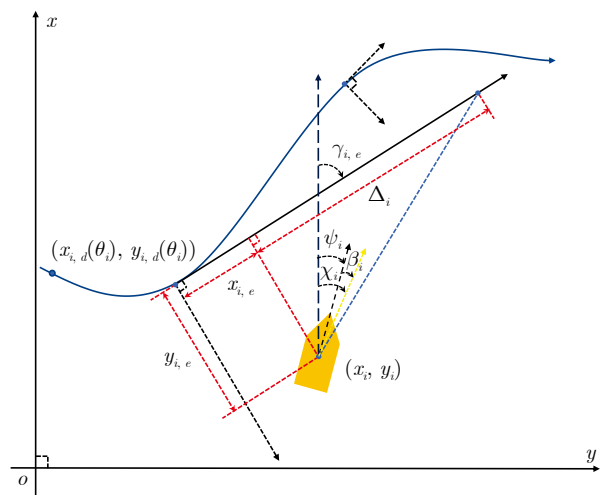


图 3 路径描述

Fig.3 Path description

根据 (5), 则有

$$\begin{aligned} \dot{y}_{i,e} = & -(\dot{x}_i - \dot{x}_{i,d}) \sin(\gamma_{i,d}) + (\dot{y}_i - \dot{y}_{i,d}) \cos(\gamma_{i,d}) - \\ & ((x_i - x_{i,d}) \cos(\gamma_{i,d}) + (y_i - y_{i,d}) \sin(\gamma_{i,d})) \dot{\gamma}_{i,d} \end{aligned} \quad (6)$$

令  $x_{i,e} = 0$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{y}_{i,e} = & -\dot{x}_i \sin(\gamma_{i,d}) + \dot{y}_i \cos(\gamma_{i,d}) = -(u_i \cos(\psi_i) - \\ & v_i \sin(\psi_i)) \sin(\gamma_{i,d}) + (u_i \sin(\psi_i) + v_i \cos(\psi_i)) \times \\ & \cos(\gamma_{i,d}) = \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \sin(\psi_i - \gamma_{i,d} + \beta_i) \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $\sqrt{u_i^2 + v_i^2} > 0$  表示第  $i$  个 USV 的行进速度;  $\beta_i = \arctan(v_i, u_i)$  表示第  $i$  个 USV 的侧滑角, 并且第  $i$  个 USV 的航向角为  $\chi_i = \psi_i + \beta_i$ . 在 USV 正常行驶过程中, USV 会自然地产生抵抗侧滑的恢复力矩, 从而使得 USV 的侧滑角  $\beta_i$  很小且稳定, 这一事实如假设 2 陈述.

**假设 2.** 在轨迹跟踪过程中, 第  $i$  个 USV 的侧滑角  $\beta_i$  很小且稳定, 即有  $\dot{\beta}_i = 0$ , 其中  $i \in \mathcal{V}$ .

根据假设 2 可得  $\cos(\beta_i) \approx 1$  和  $\sin(\beta_i) \approx \beta_i$ , 因此, 式 (7) 可写成:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{i,e} = & \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \sin(\psi_i - \gamma_{i,d} + \beta_i) = \\ & \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \sin(\psi_i - \gamma_{i,d}) \cos \beta_i + \\ & \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \cos(\psi_i - \gamma_{i,d}) \sin \beta_i = \\ & \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \sin(\psi_i - \gamma_{i,d}) + \\ & \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \cos(\psi_i - \gamma_{i,d}) \beta_i \end{aligned} \quad (8)$$

在假设 2 的条件下,  $\beta_i$  近似为 0, 从而有

$$\dot{y}_{i,e} = \sqrt{u_i^2 + v_i^2} \sin(\psi_i - \gamma_{i,d})$$

当  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_i - \gamma_{i,d} = 0$  时, 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}_{i,e} = 0$ , 进而  $y_{i,e}$  的稳定性问题可转换成艏摇角  $\psi_i$  的控制问题.

### 3.1.2 动力学控制律设计

本部分将通过设计 (2) 中的  $\tau_i$  以达成  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_i - \gamma_{i,d} = 0$ , 并且为实现 USV 集群以期速度同时抵达布阵设计中按非均匀布阵轨迹路径长度的比例进行划分的目标位置, 本部分将通过文献 [32] 中的预设时间控制算法实现对艏摇角的定时控制. 结合图 3, 可得期望艏摇角  $\psi_{i,d}$  的表达式为

$$\psi_{i,d} = \gamma_{i,d} - \arctan\left(\frac{y_{i,e}}{\Delta_i}\right) \quad (9)$$

其中,  $\Delta_i$  为第  $i$  个 USV 的视距, 即每个 USV 在进行轨迹跟踪时的可视范围, 一般为 2 ~ 6 个 USV 的

船身长度. 并且由式 (9) 可知, 为实现对 USV 的轨迹跟踪控制, 仅需对  $y_i$  和  $\psi_i$  实施控制. 因此, 本部分将分别解决纵向输入  $\tau_{u_i}$  和偏航输入  $\tau_{r_i}$  如何设计的问题.

首先, 定义第  $i$  个 USV 的纵荡速度与期望纵荡速度分别为  $u_i$  与  $u_{i,d}$ , 并且两者之间的误差为  $u_{i,e}$ , 即  $u_{i,e} = u_i - u_{i,d}$ , 则有  $\dot{u}_{i,e} = \dot{u}_i - \dot{u}_{i,d}$ . 由 (4) 可得

$$\dot{u}_{i,e} = -\frac{1}{m_{i,11}} (W_{i,11} u_i + W_{i,13} r_i - \tau_{u_i}) - \dot{u}_{i,d} \quad (10)$$

其中,  $W_{i,11}$  和  $W_{i,13}$  分别表示矩阵  $W(\nu_i)$  的第 1 行第 1 列元素和第 1 行第 3 列元素. 在文献 [32] 启发下, 可得定理 1.

**定理 1.** 对于任意初始时间  $t_s$ 、预设时间  $t_p > 0$  以及大于 2 的常数  $\vartheta$ , 设计

$$\begin{aligned} \tau_{u_i} = & -m_{i,11} \left( \left( c_1 + c_2 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \right) u_{i,e} - \dot{u}_{i,d} \right) + \\ & W_{i,11} u_i + W_{i,13} r_i \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $c_1$  和  $c_2$  均为正常数; 时变标量函数  $\varrho$  满足

$$\begin{aligned} \varrho(t) = & \begin{cases} \frac{t_p^\vartheta}{(t_p + t_s - t)^\vartheta}, & t \in [t_s, t_s + t_p] \\ 1, & t \in [t_s + t_p, \infty) \end{cases} \\ \dot{\varrho}(t) = & \begin{cases} \frac{\vartheta}{t_p} \varrho^{1+\frac{1}{\vartheta}}, & t \in [t_s, t_s + t_p] \\ 0, & t \in [t_s + t_p, \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

则该纵向输入控制器  $\tau_{u_i}$  可以驱动第  $i$  个 USV 的纵荡速度  $u_i$  在预设时间  $t_p > 0$  内达到期望纵荡速度  $u_{i,d}$ .

**引理 2**<sup>[32]</sup>. 对于系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbf{R} \quad (12)$$

考虑一个非负且可微的函数  $V(t)$ , 满足

$$\dot{V}(t) \leq -k_1 V(t) - k_2 \frac{\dot{\varrho}(t)}{\varrho(t)} V(t)$$

其中,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ , 则系统 (12) 为预设时间稳定.

**证明.** 为验证  $u_{i,e}$  的收敛性, 构造如下 Lyapunov 函数  $V_{i,1} = \frac{1}{2} u_{i,e}^2$ . 根据式 (10) 与式 (11), 对其进行求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,1} = & u_{i,e} \dot{u}_{i,e} = u_{i,e} \left( -\frac{1}{m_{i,11}} (W_{i,11} u_i + W_{i,13} r_i - \right. \\ & \left. \tau_{u_i}) - \dot{u}_{i,d} \right) = u_{i,e} \left( -\left( c_1 + c_2 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \right) u_{i,e} \right) = \\ & -c_1 u_{i,e}^2 - c_2 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} u_{i,e}^2 \leq -c_1 V_{i,1} - c_2 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} V_{i,1} \end{aligned}$$

由引理 2 可得, 该纵向输入控制器  $\tau_{u_i}$  可以驱动系统纵荡速度跟踪误差  $u_{i,e}$  在预设时间  $t_p > 0$  内收敛至 0. 该纵向输入控制器  $\tau_{u_i}$  可以驱动第  $i$  个 USV 的纵荡速度  $u_i$  在预设时间  $t_p$  内达到期望纵荡速度  $u_{i,d}$ .  $\square$

其次, 定义第  $i$  个 USV 的艏摇角速度、期望艏摇角速度以及两者之间的误差分别为  $r_i$ 、 $r_{i,d}$  以及  $r_{i,e}$ , 即  $r_{i,e} = r_i - r_{i,d}$ , 则有  $\dot{r}_{i,e} = \dot{r}_i - \dot{r}_{i,d}$ . 由 (4) 可得

$$\dot{r}_{i,e} = -\frac{1}{m_{i,33}}(W_{i,31}u_i + W_{i,32}v_i + W_{i,33}r_i - \tau_{r_i}) - \dot{r}_{i,d} \quad (13)$$

其中,  $W_{i,31}$ ,  $W_{i,32}$ ,  $W_{i,33}$  分别表示矩阵  $W(\nu_i)$  的第 3 行第 1 列元素, 第 3 行第 2 列元素和第 3 行第 3 列元素.

**定理 2.** 对于任意初始时间  $t_s$ 、预设时间  $t_p > 0$  以及大于 2 的常数  $\vartheta$ , 设计

$$\tau_{r_i} = -m_{i,33} \left( \left( c_3 + c_4 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \right) r_{i,e} - \dot{r}_{i,d} \right) + W_{i,31}u_i + W_{i,32}v_i + W_{i,33}r_i \quad (14)$$

其中,  $c_3$  和  $c_4$  均为正常数. 则该艏摇角速度控制器  $\tau_{r_i}$  可以驱使第  $i$  个 USV 的艏摇角速度  $r_i$  在预设时间  $t_p > 0$  内达到期望艏摇角速度  $r_{i,d}$ .

**证明.** 为验证  $r_{i,e}$  的收敛性, 构造如下 Lyapunov 函数  $V_{i,2} = \frac{1}{2}r_{i,e}^2$ . 根据 (13) 和 (14), 对其进行求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i,2} &= r_{i,e}\dot{r}_{i,e} = r_{i,e} \left( -\frac{1}{m_{i,33}}(W_{i,31}u_i + W_{i,32}v_i + \right. \\ & \quad \left. W_{i,33}r_i - \tau_{r_i}) - \dot{r}_{i,d} \right) = r_{i,e} \left( -\left( c_3 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. c_4 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \right) r_{i,e} \right) = -c_3 r_{i,e}^2 - c_4 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} r_{i,e}^2 \leq \\ & \quad -c_3 V_{i,2} - c_4 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} V_{i,2} \end{aligned}$$

由引理 2 可得, 该艏摇角速度控制器  $\tau_{r_i}$  可以驱使系统艏摇角速度跟踪误差  $r_{i,e}$  在预设时间  $t_p > 0$  内收敛至 0. 该艏摇角速度控制器  $\tau_{r_i}$  可以驱动第  $i$  个 USV 的艏摇角速度  $r_i$  在预设时间  $t_p$  内达到期望艏摇角速度  $r_{i,d}$ .  $\square$

最后, 通过本文所采用的预设时间控制方法对 USV 进行轨迹跟踪控制. 选取的 USV 参数如表 1 所示, 且  $m_{i,11} = 30 \text{ kg}$ ,  $m_{i,22} = 30 \text{ kg}$ ,  $m_{i,33} = 3.45 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . 选取  $x_{i,d} = t$ ,  $y_{i,d} = 0.1t$ ,  $\psi_{i,d} = \arctan(y_{i,d}/x_{i,d})$ ,  $u_{i,d} = 2$ ,  $v_{i,d} = 0$ ,  $r_{i,d} = 0$ . USV

的相关初始参数选取为  $[x_i(0), y_i(0)]^T = [0, 2]^T$ ,  $\psi_i(0) = 0.12$ ,  $u_i(0) = 4$ ,  $v_i(0) = 0$ ,  $r_i(0) = 0$ . 选取的控制器参数  $c_1 = c_3 = 24$ ,  $c_2 = c_4 = 6$ . 预设轨迹误差和速度误差收敛时间为  $t_p = 30 \text{ s}$ . 图 4 为 USV 集群在预设时间  $t_p = 30 \text{ s}$  时各个变量的收敛轨迹示意图. 如图 4 所示, USV 集群可在预设时间实现对期望轨迹的跟踪, 纵荡速度和艏摇角速度都收敛于期望纵荡速度和期望艏摇角速度.

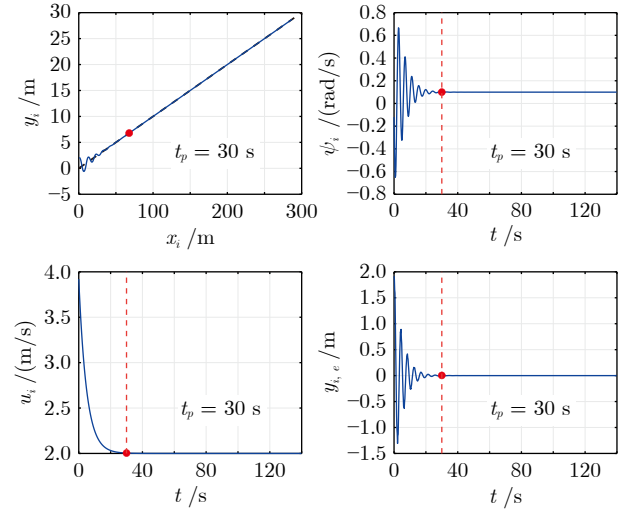


图 4 第  $i$  艘 USV 在  $t_p = 30 \text{ s}$  时各个变量的收敛轨迹示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the convergence trajectories of the state variables for the  $i$ -th USV at the prescribed time  $t_p = 30 \text{ s}$

### 3.2 定速跟踪

第 3.1 节实现了每一个 USV 以期望的速度、在指定时间运动到各自的指定位置  $D_{i,o}$ . 本节探讨如何实现每一艘 USV 按照期望的速度对目标轨迹进行跟踪, 以完成 USV 集群的同频搜索, 即 USV 集群中的每一艘 USV 完成一轮拦截搜索的时间是相同的. 因此, 第  $i$  艘 USV 与第  $j$  艘 USV 的入阵速度在大小上满足以下关系:

$$\frac{\sqrt{u_i^2 + v_i^2}}{\sqrt{u_j^2 + v_j^2}} = \frac{S_i}{S_j}$$

其中,  $S_i$  和  $S_j$  分别表示第  $i$  艘 USV 和第  $j$  艘 USV 完成一轮拦截搜索的总路程. 如图 1 所示, 将 4 艘 USV 从左到右进行排序, 分别为 USV1、USV2、USV3、USV4. 则 USV1 与 USV2 在行进速度上满足如下关系:

$$\frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{2\left(\frac{L}{3} - 2r_{tc}\right) + 2\pi r_{tc}}{2\left(\frac{L}{6} - 2r_{tc}\right) + 2\pi r_{tc}}$$

以这 4 艘 USV 为例, 在控制输入 (11) 和 (14) 控制下, USV 可以实现对期望路径的定速跟踪. 当  $t > t_s + t_p$  时,  $\dot{q}(t) = 0$ , 此时

$$\begin{cases} \tau_{u_i} = -m_{i,11}(c_1 u_{i,e} - \dot{u}_{i,d}) + W_{i,11}u_i + W_{i,13}r_i \\ \tau_{r_i} = -m_{i,33}(c_3 r_{i,e} - \dot{r}_{i,d}) + W_{i,31}u_i + \\ W_{i,32}v_i + W_{i,33}r_i \end{cases} \quad (15)$$

在式 (15) 中的控制输入下, 对于在证明中所构建的 Lyapunov 函数  $V_{i,1}$  和  $V_{i,2}$ , 仍有

$$V_{i,1} = \frac{1}{2}u_{i,e}^2 > 0, \dot{V}_{i,1} \leq -c_1 V_{i,1} < 0$$

$$V_{i,2} = \frac{1}{2}r_{i,e}^2 > 0, \dot{V}_{i,2} \leq -c_3 V_{i,2} < 0$$

成立. 因此, 在式 (15) 中的纵向输入  $\tau_{u_i}$  和偏航输入  $\tau_{r_i}$  下, 由 (11) 和 (14) 控制的 USV 集群仍能保持纵荡速度误差和舵摆角速度误差收敛且稳定, 即可以实现对期望路径的定速跟踪.

取  $r_{tc} = 10$  m,  $L = 180$  m, 并且  $\sqrt{u_1^2 + v_1^2} = \sqrt{u_4^2 + v_4^2} = 2$  m/s,  $\sqrt{u_2^2 + v_2^2} = \sqrt{u_3^2 + v_3^2} = 0.58$  m/s. 表 2 为各 USV 巡逻一周到达起始入阵点位  $D_{i,o}$  (如图 5 中绿色空心三角形所示位置) 的时刻. 如表 2 所示, 每个 USV 巡逻一周到达起始入阵点位  $D_{i,o}$  的时刻相同, 意味着 USV 在巡逻过程中可以实现同步 (同时转弯、同时掉头), 也可以实现同频搜索. 为进一步验证这一结果, 随机选取  $t > t_p$  时刻, 从所选取时刻 USV 集群的实时位置来验证其是否能够实现同频搜索. 具体如图 5 所示.

表 2 各 USV 巡逻一周到达起始点位的时刻 (s)  
Table 2 The time when each USV returns to its starting point after one patrol cycle (s)

	第 1 次	第 2 次	第 3 次
USV1	$t_0 = 30.0$	$t_1 = 101.4$	$t_2 = 172.8$
USV2	$t_0 = 30.0$	$t_1 = 101.4$	$t_2 = 172.8$
USV3	$t_0 = 30.0$	$t_1 = 101.4$	$t_2 = 172.8$
USV4	$t_0 = 30.0$	$t_1 = 101.4$	$t_2 = 172.8$

### 3.3 协同撤收

USV 集群的撤收是 USV 集群任务执行中的重要环节, 事关资源节约、信息安全等, 本节将解决 USV 集群的协同撤收问题. 为此, 本节首先将第 1.1 节的 USV 模型简化为二阶线性模型.

#### 3.3.1 USV 模型的反馈线性化

反馈线性化的目的是通过非线性反馈来抵消系统固有的非线性, 从而将一个非线性控制问题转化

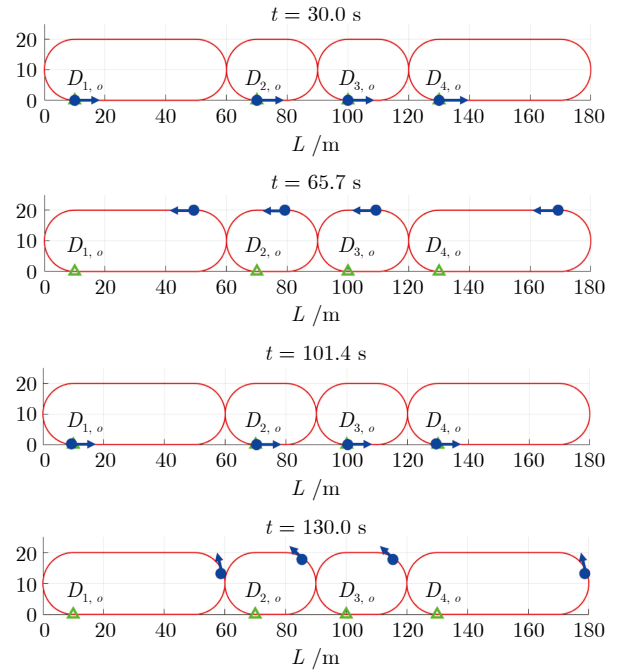


图 5 在控制算法 (11) 和 (14) 作用下, USV 集群位置的连续仿真时间快照

Fig. 5 The successive simulation time snapshots of the positions of the USV swarm under control algorithms (11) and (14)

为一个线性控制问题. 本节主要通过反馈线性化对 USV 非线性模型进行线性化处理. 首先, 由式 (1) 和式 (4) 可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_i \\ \dot{\nu}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -M_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J(\psi_i)\nu_i \\ W(\nu_i)\nu_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M_i^{-1} \end{bmatrix} \tau_i \quad (16)$$

令  $\varpi_i = [\eta_i^T, \nu_i^T]^T$ ,  $s_i = z(\varpi_i) = \eta_i$ , 则非线性 USV 模型 (16) 可进一步写为如下非线性仿射系统形式

$$\begin{cases} \dot{\varpi}_i = f(\varpi_i) + g(\varpi_i)\tau_i \\ s_i = z(\varpi_i) \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $f(\varpi_i) = \begin{bmatrix} J(\psi_i)\nu_i \\ -M_i^{-1}W(\nu_i)\nu_i \end{bmatrix}$ ,  $g(\varpi_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M_i^{-1} \end{bmatrix}$ . 为

验证非线性仿射系统 (17) 是否可以实现反馈线性化, 引入以下引理.

**引理 3**<sup>[33]</sup>.  $n$  阶非线性仿射系统精确线性化有解的充分必要条件是:

- 1) 系统的输入维度和输出维度相同;
- 2) 系统具有相对度, 即, 对输出量求导一定次数后, 控制输入会显式出现;
- 3) 系统的相对度之和等于系统维数.

非线性仿射系统 (17) 的输入为  $\tau_i \in \mathbf{R}^3$ , 输出

为  $\eta_i \in \mathbf{R}^3$ , 则系统 (17) 的输入维度和输出维度相同, 满足条件 1). 其次, 对系统 (17) 的输出  $\eta_i$  求取二阶导数后, 控制输入  $\tau_i$  才会显式出现, 从而说明系统 (17) 具有相对度, 且每一个输出的相对度为 2, 满足条件 2). 另外, 系统 (17) 的输出维度为 3, 且每一个输出的相对度为 2, 因此系统 (17) 的相对度之和为 6, 等于系统 (17) 的维数, 满足条件 3). 因此, 由引理 3 得知, 系统 (17) 可以进行精确反馈线性化且有解. 分别定义  $z(\varpi_i)$  的一阶李导数和二阶李导数为  $\mathcal{L}_f z(\varpi_i)$ ,  $\mathcal{L}_g z(\varpi_i)$  和  $\mathcal{L}_f^2 z(\varpi_i)$ ,  $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f z(\varpi_i)$ , 则

$$\begin{aligned}\dot{s}_i &= \frac{\partial z(\varpi_i)}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i = \frac{\partial z(\varpi_i)}{\partial \varpi_i} (f(\varpi_i) + g(\varpi_i)\tau_i) = \\ &\mathcal{L}_f z(\varpi_i) + \mathcal{L}_g z(\varpi_i)\tau_i = \mathcal{L}_f z(\varpi_i) \\ \ddot{s}_i &= \frac{\partial(\mathcal{L}_f z(\varpi_i))}{\partial \varpi_i} \dot{\varpi}_i = \frac{\partial(\mathcal{L}_f z(\varpi_i))}{\partial \varpi_i} (f(\varpi_i) + \\ &g(\varpi_i)\tau_i) = \mathcal{L}_f^2 z(\varpi_i) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f z(\varpi_i)\tau_i\end{aligned}$$

令  $s_i = \xi_i(t)$ ,  $\dot{s}_i = \zeta_i(t)$ ,  $\mathcal{T}_i(t) = \mathcal{L}_f^2 z(\varpi_i) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f z(\varpi_i) \times \tau_i$ , 可得 USV 的线性化模型为:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = \zeta_i(t) \\ \dot{\zeta}_i(t) = \mathcal{T}_i(t) \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $\xi_i(t) \in \mathbf{R}^3$ ,  $\zeta_i(t) \in \mathbf{R}^3$  和  $\mathcal{T}_i(t) \in \mathbf{R}^3$  分别表示第  $i$  个 USV 的位置信息、速度信息和控制输入. 由文献 [33] 可得矩阵  $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f z(\varpi_i)$  是非奇异的, 则有

$$\tau_i = (\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f z(\varpi_i))^{-1}(\mathcal{T}_i(t) - \mathcal{L}_f^2 z(\varpi_i)) \quad (19)$$

### 3.3.2 基于主从一致性的 USV 集群协同撤收

考虑一个由  $N$  个 USV 组成的 USV 集群, 其母艇是一个标号为 0 的 USV 且满足 (3). 记  $\xi_0(t) \in \mathbf{R}^3$  和  $\zeta_0(t) \in \mathbf{R}^3$  分别表示母艇的位置和速度信息, 并且母艇做匀速运动, 则有

$$\begin{cases} \dot{\xi}_0(t) = \zeta_0(t) \\ \dot{\zeta}_0(t) = \mathbf{0} \end{cases}$$

对应到 (19) 中有

$$\tau_0 = (\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f z(\varpi_0))^{-1}(-\mathcal{L}_f^2 z(\varpi_0)) \quad (20)$$

为更好地刻画高动态海洋环境对 USV 集群通信的影响, 本文将随机采样机制引入到 USV 控制器的设计中. 为此, 首先定义采样时刻序列  $\{t_k\}$ :  $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$ , 其中  $k \in \mathbf{N}$  且  $t_0 = 0$ . 设  $t_{k+1} - t_k$  为采样间隔, 其值从一组有限的不同数值中随机选取, 该集合为  $\{h_r\}$ :  $h_1 < h_2 < \dots < h_r < \dots < h_\ell$ , 其中  $h_r \in \mathbf{R}_+$ . 记  $\text{Prob}\{\cdot\}$  表示事件发生的概率, 则有  $\sum_{r=1}^{\ell} \text{Prob}\{t_{r+1} - t_r = h_r\} = 1$ .

为简化理论分析, 假设采样间隔  $t_{k+1} - t_k$  仅在两个不同的取值  $h_1$  和  $h_2$  之间随机切换. 更进一步地, 考虑到相对位置信息比相对速度信息的获取更易实现, 本文将设计仅依赖相对位置信息的控制器  $\mathcal{T}_i(t)$ . 令  $p(t) = t - t_k$ ,  $q(t) = t - t_{k-1}$ , 则  $\mathcal{T}_i(t)$  设计如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i(t) &= -\kappa_1 \sum_{j=1}^N [\mathcal{A}]_{ij} (\xi_i(t - p(t)) - \xi_j(t - p(t))) + \\ &\kappa_2 \sum_{j=1}^N [\mathcal{A}]_{ij} (\xi_i(t - q(t)) - \xi_j(t - q(t))) - \\ &\kappa_1 [\mathcal{H}]_i (\xi_i(t - p(t)) - \xi_0(t - p(t))) + \\ &\kappa_2 [\mathcal{H}]_i (\xi_i(t - q(t)) - \xi_0(t - q(t))), \\ &t \in [t_k, t_{k+1})\end{aligned} \quad (21)$$

其中,  $\kappa_1$  和  $\kappa_2$  均为正常数. 令  $\Pi = \text{Prob}\{0 < p(t) \leq h_1\}$ ,  $0 \leq \Pi \leq 1$ , 这意味着  $\text{Prob}\{h_1 < p(t) \leq h_2\} = 1 - \Pi$ . 现在引入一个随机变量  $\gamma(t)$  且定义如下

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, & 0 < p(t) \leq h_1 \\ 0, & h_1 < p(t) \leq h_2 \end{cases}$$

因此,  $\gamma(t)$  服从伯努利分布并且期望  $E\{\gamma(t)\} = \Pi$ , 则 (21) 可写成

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i(t) &= -\kappa_1(1 - \gamma(t)) \sum_{j=1}^N [\mathcal{A}]_{ij} (\xi_i(t - p_1(t)) - \\ &\xi_j(t - p_1(t))) - \kappa_1 \gamma(t) \sum_{j=1}^N [\mathcal{A}]_{ij} (\xi_i(t - p_2(t)) - \\ &\xi_j(t - p_2(t))) - \kappa_1(1 - \gamma(t)) [\mathcal{H}]_i (\xi_i(t - p_1(t)) - \\ &\xi_0(t - p_1(t))) - \kappa_1 \gamma(t) [\mathcal{H}]_i (\xi_i(t - p_2(t)) - \\ &\xi_0(t - p_2(t))) + \kappa_2 \sum_{j=1}^N [\mathcal{A}]_{ij} (\xi_i(t - q(t)) - \\ &\xi_j(t - q(t))) + \kappa_2 [\mathcal{H}]_i (\xi_i(t - q(t)) - \xi_0(t - \\ &q(t))), \quad t \in [t_k, t_{k+1})\end{aligned} \quad (22)$$

其中,  $0 < p_1(t) \leq h_1$ ;  $h_1 < p_2(t) \leq h_2$ .

本文通过实现 USV 集群的主从一致性来实现 USV 集群的协同撤收, 为此需要实现对于任意初始状态的 USV 都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_i(t) - \xi_0(t)\| = 0$  与  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\zeta_i(t) - \zeta_0(t)\| = 0$  成立,  $i \in \mathcal{V}$ . 令  $e_{i, \xi}(t) = \xi_i(t) - \xi_0(t)$ ,  $e_{i, \zeta}(t) = \zeta_i(t) - \zeta_0(t)$ , 则 USV 集群的协同撤收问题将转化为误差系统  $e_{i, \xi}(t)$  与  $e_{i, \zeta}(t)$  的稳定性问题. 基于上文, 可得

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{e}_i, \xi(t) &= e_i, \zeta(t) \\ \dot{e}_i, \zeta(t) &= -\kappa_1(1 - \gamma(t)) \sum_{j=1}^N [\mathcal{L}]_{ij} e_{j, \xi}(t - p_1(t)) - \\ &\quad \kappa_1 \gamma(t) \sum_{j=1}^N [\mathcal{L}]_{ij} e_{j, \xi}(t - p_2(t)) - \kappa_1(1 - \\ &\quad \gamma(t)) [\mathcal{H}]_i e_{i, \xi}(t - p_1(t)) - \kappa_1 \gamma(t) [\mathcal{H}]_i e_{i, \xi}(t - \\ &\quad p_2(t)) + \kappa_2 \sum_{j=1}^N [\mathcal{L}]_{ij} e_{j, \xi}(t - q(t)) + \\ &\quad \kappa_2 [\mathcal{H}]_i e_{i, \xi}(t - q(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned} \right. \quad (23)$$

为方便后续讨论, 令

$$\varsigma_i(t) = \begin{bmatrix} e_i, \xi(t) \\ e_i, \zeta(t) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

则系统 (23) 可被表示为

$$\begin{aligned} \dot{\varsigma}_i(t) &= C\varsigma_i(t) - \kappa_1(1 - \gamma(t)) \sum_{j=1}^N [\mathcal{L}]_{ij} D\varsigma_j(t - p_1(t)) - \\ &\quad \kappa_1 \gamma(t) \sum_{j=1}^N [\mathcal{L}]_{ij} D\varsigma_j(t - p_2(t)) - \kappa_1(1 - \\ &\quad \gamma(t)) [\mathcal{H}]_i D\varsigma_i(t - p_1(t)) - \kappa_1 \gamma(t) [\mathcal{H}]_i D\varsigma_i(t - \\ &\quad p_2(t)) + \kappa_2 \sum_{j=1}^N [\mathcal{L}]_{ij} D\varsigma_j(t - q(t)) + \\ &\quad \kappa_2 [\mathcal{H}]_i D\varsigma_i(t - q(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned} \quad (24)$$

令  $\varsigma = [\varsigma_1^T, \dots, \varsigma_N^T]^T$ , 系统 (24) 可修改为

$$\begin{aligned} \dot{\varsigma}(t) &= (I_N \otimes C)\varsigma(t) - \kappa_1(1 - \gamma(t))((\mathcal{L} + \mathcal{H}) \otimes D)\varsigma(t - \\ &\quad p_1(t)) - \kappa_1 \gamma(t)((\mathcal{L} + \mathcal{H}) \otimes D)\varsigma(t - p_2(t)) + \\ &\quad \kappa_2((\mathcal{L} + \mathcal{H}) \otimes D)\varsigma(t - q(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned} \quad (25)$$

由引理 1 可得, 存在正交矩阵  $Q \in \mathbf{R}^{N \times N}$  使得  $\mathcal{L} + \mathcal{H} = Q\Lambda Q^{-1}$ , 其中  $\Lambda = \text{diag}\{[\Lambda]_1, \dots, [\Lambda]_N\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ , 并且  $[\Lambda]_i > 0, i = 1, \dots, N$ . 令  $\varepsilon(t) = (Q^{-1} \otimes I_6)\varsigma(t) = (\varepsilon_1^T, \dots, \varepsilon_N^T)^T$ , 则 (25) 可写为

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= (I_N \otimes C)\varepsilon(t) - \kappa_1(1 - \gamma(t))(\Lambda \otimes D)\varepsilon(t - \\ &\quad p_1(t)) - \kappa_1 \gamma(t)(\Lambda \otimes D)\varepsilon(t - p_2(t)) + \\ &\quad \kappa_2(\Lambda \otimes D)\varepsilon(t - q(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned} \quad (26)$$

针对系统 (26), 选取如下 Lyapunov 函数:

$$V(\varepsilon(t)) = \sum_{i=1}^N V_i(\varepsilon(t)) \quad (27)$$

其中,

$$\begin{aligned} V_1(\varepsilon(t)) &= \varepsilon^T(t)(I_N \otimes \mathcal{P})\varepsilon(t) \\ V_2(\varepsilon(t)) &= \int_{t-h_1}^t \varepsilon^T(t)(I_N \otimes R_1)\varepsilon(t)d\theta \\ V_3(\varepsilon(t)) &= \int_{t-h_2}^t \varepsilon^T(t)(I_N \otimes R_2)\varepsilon(t)d\theta \\ V_4(\varepsilon(t)) &= \int_{t-h_1-h_2}^t \varepsilon^T(t)(I_N \otimes R_3)\varepsilon(t)d\theta \\ V_5(\varepsilon(t)) &= \int_{t-2h_1}^t \varepsilon^T(t)(I_N \otimes R_4)\varepsilon(t)d\theta \\ V_6(\varepsilon(t)) &= \int_{t-2h_2}^t \varepsilon^T(t)(I_N \otimes R_5)\varepsilon(t)d\theta \\ V_7(\varepsilon(t)) &= h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_1)\dot{\varepsilon}(s)dsd\theta \\ V_8(\varepsilon(t)) &= h_2 \int_{-h_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_2)\dot{\varepsilon}(s)dsd\theta \\ V_9(\varepsilon(t)) &= (h_1 + h_2) \int_{-h_1-h_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_3) \times \\ &\quad \dot{\varepsilon}(s)dsd\theta \\ V_{10}(\varepsilon(t)) &= 2h_1 \int_{-2h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_4)\dot{\varepsilon}(s)dsd\theta \\ V_{11}(\varepsilon(t)) &= 2h_2 \int_{-2h_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_5)\dot{\varepsilon}(s)dsd\theta \end{aligned}$$

其中,  $\theta \in [-2h_2, 0]$ . 定义无穷小算子  $LV(\varepsilon(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{E\{V(\varepsilon(t+\Delta))|\varepsilon(t)\} - V(\varepsilon(t))}{\Delta}$ , 则有引理 4 成立.

**引理 4**<sup>[34]</sup>. 对于由 (27) 定义的 Lyapunov 泛函, 若存在标量  $\epsilon$  使得  $E\{LV(\varepsilon(t))\} \leq -\epsilon E\{\|\varepsilon(t)\|^2\}$ , 则称系统 (26) 为均方意义下指数稳定的.

**定理 3.** 在假设 1 下, 考虑一个由式 (4) 驱动的 USV 集群, 其从艇的控制输入如式 (19) 所示. 若存在正定矩阵  $\mathcal{P} \succ 0, R_1 \succ 0, R_2 \succ 0, R_3 \succ 0, R_4 \succ 0, R_5 \succ 0, Z_1 \succ 0, Z_2 \succ 0, Z_3 \succ 0, Z_4 \succ 0, Z_5 \succ 0$  以及常数  $h_1 > 0, h_2 > 0$ , 使得下列线性矩阵不等式 (LMI) 成立:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \Omega_1 \mathcal{P} \Theta_i^T + \Theta_i \mathcal{P} \Omega_1^T + \Omega_1(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \\ &\quad R_5)\Omega_1^T + \Theta_i(h_1^2 Z_1 + h_2^2 Z_2 + (h_1 + h_2)^2 Z_3 + \\ &\quad (2h_1)^2 Z_4 + (2h_2)^2 Z_5)\Theta_i^T - \Omega_3 R_1 \Omega_3^T - \\ &\quad \Omega_5 R_2 \Omega_5^T - \Omega_7 R_3 \Omega_7^T - \Omega_8 R_4 \Omega_8^T - \Omega_9 R_5 \Omega_9^T - \\ &\quad h_1(\Omega_1 - \Omega_3)Z_1(\Omega_1 - \Omega_3)^T - h_2(\Omega_1 - \Omega_5)Z_2(\Omega_1 - \\ &\quad \Omega_5)^T - (h_1 + h_2)(\Omega_1 - \Omega_7)Z_3(\Omega_1 - \Omega_7)^T - \\ &\quad (2h_1)^2(\Omega_1 - \Omega_8)Z_4(\Omega_1 - \Omega_8)^T - (2h_2)^2(\Omega_1 - \\ &\quad \Omega_9)Z_5(\Omega_1 - \Omega_9)^T \prec 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

其中,  $\Omega_m = e_m \otimes I_6$ ,  $m = 1, \dots, 9$ ;  $\Theta_i = C\Omega_1^T - \kappa_1(1 - \Pi)[\Lambda]_i D\Omega_2^T - \kappa_1\Pi[\Lambda]_i D\Omega_4^T + \kappa_2[\Lambda]_i D\Omega_6^T$ ,  $i = 1, \dots, N$ . 则该 USV 集群与由 (20) 驱动的母亲可以形成均方主从一致 (mean-square leader-following consensus).

**证明.** 定义  $\phi(t) = [\varepsilon^T(t), \varepsilon^T(t - p_1(t)), \varepsilon^T(t - h_1), \varepsilon^T(t - p_2(t)), \varepsilon^T(t - h_2), \varepsilon^T(t - q(t)), \varepsilon^T(t - h_1 - h_2), \varepsilon^T(t - 2h_1), \varepsilon^T(t - 2h_2)]^T$ , 其中, 对于  $m = 1, \dots, 9$ ,  $\Xi_m = e_m \otimes I_{6N}$ ,  $\Upsilon = (I_N \otimes C)\Xi_1^T - \kappa_1(1 - \Pi)(\Lambda \otimes D)\Xi_2^T - \kappa_1\Pi(\Lambda \otimes D)\Xi_4^T + \kappa_2(\Lambda \otimes D)\Xi_6^T$ .

在定理 3 的条件下, 则有

$$\begin{aligned} LV_1(\varepsilon(t)) &= 2\phi^T(t)\Xi_1(I_N \otimes \mathcal{P})\Upsilon^T\phi(t) \\ LV_2(\varepsilon(t)) &= \phi^T(t)(\Xi_1(I_N \otimes R_1)\Xi_1^T - \Xi_3(I_N \otimes R_1)\Xi_3^T)\phi(t) \\ LV_3(\varepsilon(t)) &= \phi^T(t)(\Xi_1(I_N \otimes R_2)\Xi_1^T - \Xi_5(I_N \otimes R_2)\Xi_5^T)\phi(t) \\ LV_4(\varepsilon(t)) &= \phi^T(t)(\Xi_1(I_N \otimes R_3)\Xi_1^T - \Xi_7(I_N \otimes R_3)\Xi_7^T)\phi(t) \\ LV_5(\varepsilon(t)) &= \phi^T(t)(\Xi_1(I_N \otimes R_4)\Xi_1^T - \Xi_8(I_N \otimes R_4)\Xi_8^T)\phi(t) \\ LV_6(\varepsilon(t)) &= \phi^T(t)(\Xi_1(I_N \otimes R_5)\Xi_1^T - \Xi_9(I_N \otimes R_5)\Xi_9^T)\phi(t) \\ LV_7(\varepsilon(t)) &= h_1^2\phi^T(t)\Upsilon(I_N \otimes Z_1)\Upsilon^T\phi(t) - \\ &\quad h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_1)\dot{\varepsilon}(s)ds \\ LV_8(\varepsilon(t)) &= h_2^2\phi^T(t)\Upsilon(I_N \otimes Z_2)\Upsilon^T\phi(t) - \\ &\quad h_2 \int_{t-h_2}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_2)\dot{\varepsilon}(s)ds \\ LV_9(\varepsilon(t)) &= (h_1 + h_2)^2\phi^T(t)\Upsilon(I_N \otimes Z_3)\Upsilon^T\phi(t) - (h_1 + \\ &\quad h_2) \int_{t-h_1-h_2}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_3)\dot{\varepsilon}(s)ds \\ LV_{10}(\varepsilon(t)) &= (2h_1)^2\phi^T(t)\Upsilon(I_N \otimes Z_4)\Upsilon^T\phi(t) - \\ &\quad 2h_1 \int_{t-2h_1}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_4)\dot{\varepsilon}(s)ds \\ LV_{11}(\varepsilon(t)) &= (2h_2)^2\phi^T(t)\Upsilon(I_N \otimes Z_5)\Upsilon^T\phi(t) - \\ &\quad 2h_2 \int_{t-2h_2}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_5)\dot{\varepsilon}(s)ds \end{aligned}$$

通过将 Jensen 不等式应用于  $LV_7(\varepsilon(t))$ , 可得

$$\begin{aligned} & -\mathbb{E} \left\{ \int_{t-h_1}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_1)\dot{\varepsilon}(s)ds \right\} \leq \\ & -\mathbb{E} \left\{ \left( \int_{t-h_1}^t \dot{\varepsilon}(s)ds \right)^T (I_N \otimes Z_1) \left( \int_{t-h_1}^t \dot{\varepsilon}(s)ds \right) \right\} = \\ & -\mathbb{E} \left\{ \phi^T(t)(\Xi_1 - \Xi_3)(I_N \otimes Z_1)(\Xi_1 - \Xi_3)^T\phi(t) \right\} \end{aligned}$$

类似地, 可得

$$\begin{aligned} & -\mathbb{E} \left\{ \int_{t-h_2}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_2)\dot{\varepsilon}(s)ds \right\} \leq \\ & -\mathbb{E} \left\{ \phi^T(t)(\Xi_1 - \Xi_5)(I_N \otimes Z_2)(\Xi_1 - \Xi_5)^T\phi(t) \right\} \\ & -\mathbb{E} \left\{ \int_{t-h_1-h_2}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_3)\dot{\varepsilon}(s)ds \right\} \leq \\ & -\mathbb{E} \left\{ \phi^T(t)(\Xi_1 - \Xi_7)(I_N \otimes Z_3)(\Xi_1 - \Xi_7)^T\phi(t) \right\} \\ & -\mathbb{E} \left\{ \int_{t-2h_1}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_4)\dot{\varepsilon}(s)ds \right\} \leq \\ & -\mathbb{E} \left\{ \phi^T(t)(\Xi_1 - \Xi_8)(I_N \otimes Z_4)(\Xi_1 - \Xi_8)^T\phi(t) \right\} \\ & -\mathbb{E} \left\{ \int_{t-2h_2}^t \dot{\varepsilon}^T(s)(I_N \otimes Z_5)\dot{\varepsilon}(s)ds \right\} \leq \\ & -\mathbb{E} \left\{ \phi^T(t)(\Xi_1 - \Xi_9)(I_N \otimes Z_5)(\Xi_1 - \Xi_9)^T\phi(t) \right\} \end{aligned}$$

综上可得  $\mathbb{E}\{LV(\varepsilon(t))\} \leq \mathbb{E}\{\phi^T(t)\Psi\phi(t)\}$ , 其中  $\Psi = \Xi_1(I_N \otimes \mathcal{P})\Upsilon^T + \Upsilon(I_N \otimes \mathcal{P})\Xi_1^T + \Xi_1(I_N \otimes R_1)\Xi_1^T - \Xi_3(I_N \otimes R_1)\Xi_3^T + \Xi_1(I_N \otimes R_2)\Xi_1^T - \Xi_5(I_N \otimes R_2)\Xi_5^T + \Xi_1(I_N \otimes R_3)\Xi_1^T - \Xi_7(I_N \otimes R_3)\Xi_7^T + \Xi_1(I_N \otimes R_4)\Xi_1^T - \Xi_8(I_N \otimes R_4)\Xi_8^T + \Xi_1(I_N \otimes R_5)\Xi_1^T - \Xi_9(I_N \otimes R_5)\Xi_9^T + h_1^2\Upsilon(I_N \otimes Z_1)\Upsilon^T + h_2^2\Upsilon(I_N \otimes Z_2)\Upsilon^T + (h_1 + h_2)^2\Upsilon(I_N \otimes Z_3)\Upsilon^T + (2h_1)^2\Upsilon(I_N \otimes Z_4)\Upsilon^T + (2h_2)^2\Upsilon(I_N \otimes Z_5)\Upsilon^T - (\Xi_1 - \Xi_3)(I_N \otimes Z_1)(\Xi_1 - \Xi_3)^T - (\Xi_1 - \Xi_5)(I_N \otimes Z_2)(\Xi_1 - \Xi_5)^T - (\Xi_1 - \Xi_7)(I_N \otimes Z_3)(\Xi_1 - \Xi_7)^T - (\Xi_1 - \Xi_8)(I_N \otimes Z_4)(\Xi_1 - \Xi_8)^T - (\Xi_1 - \Xi_9)(I_N \otimes Z_5)(\Xi_1 - \Xi_9)^T < 0$  (28)

特别地, 对于每个 USV, 令  $\phi_i(t) = [\varepsilon_i^T(t), \varepsilon_i^T(t - p_1(t)), \varepsilon_i^T(t - h_1), \varepsilon_i^T(t - p_2(t)), \varepsilon_i^T(t - h_2), \varepsilon_i^T(t - q(t)), \varepsilon_i^T(t - h_1 - h_2), \varepsilon_i^T(t - 2h_1), \varepsilon_i^T(t - 2h_2)]^T$ ,  $i = 1, \dots, N$ , 其中  $\Omega_m = e_m \otimes I_6$ ,  $\Theta_i = C\Omega_1^T - \kappa_1(1 - \Pi)[\Lambda]_i D\Omega_2^T - \kappa_1\Pi[\Lambda]_i D\Omega_4^T + \kappa_2D[\Lambda]_i\Omega_6^T$ , 则有  $\Psi_i = \Omega_1\mathcal{P}\Theta_i^T + \Theta_i\mathcal{P}\Omega_1^T + \Omega_1(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5)\Omega_1^T + \Theta_i(h_1^2Z_1 + h_2^2Z_2 + (h_1 + h_2)^2Z_3 + (2h_1)^2Z_4 + (2h_2)^2Z_5)\Theta_i^T - \Omega_3R_1\Omega_3^T - \Omega_5R_2\Omega_5^T - \Omega_7R_3\Omega_7^T - \Omega_8R_4\Omega_8^T - \Omega_9R_5\Omega_9^T - h_1(\Omega_1 - \Omega_3)Z_1(\Omega_1 - \Omega_3)^T - h_2(\Omega_1 - \Omega_5)Z_2(\Omega_1 - \Omega_5)^T - (h_1 + h_2)(\Omega_1 - \Omega_7)Z_3(\Omega_1 - \Omega_7)^T - (2h_1)^2(\Omega_1 - \Omega_8)Z_4(\Omega_1 - \Omega_8)^T - (2h_2)^2(\Omega_1 - \Omega_9)Z_5(\Omega_1 - \Omega_9)^T < 0$  (29)

综合 (28) 与 (29), 可得  $E\{LV(\varepsilon(t))\} \leq 0$ . 由此可确定存在标量  $\epsilon$  使得

$$E\{LV(\varepsilon(t))\} \leq -\epsilon E\{\|\varepsilon(t)\|^2\}$$

最后, 由引理 4 可得式 (26) 所描述的系统可实现指数均方稳定性.  $\square$

**注 1.** 采样周期以随机方式在两个正值  $h_1$  与  $h_2$  之间交替变化, 在每个采样时刻  $t_k$  对各 USV 的位置状态进行采样. 具体而言,  $t_k$  与  $t_{k-1}$  之间的采样周期是固定且已知的. 由于控制决策依赖于当前及上一采样周期的信息, 而上一采样周期已知, 因此对于上一采样周期, 理论上存在  $h_1$  和  $h_2$  两种采样周期情况. 当考虑当前采样周期时, 一共包含以下 4 种采样周期组合:  $h_1 + h_1$ ,  $h_1 + h_2$ ,  $h_2 + h_1$ ,  $h_2 + h_2$ . 综上所述, 一共会存在  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_1 + h_2$ ,  $2h_1$ ,  $2h_2$  这 5 个节点.

### 3.3.3 USV 集群协同撤收的仿真验证

本节将使用  $N = 4$  艘 USV ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) 对定理 3 进行数值仿真, USV 参数选取具体如表 1 所示. 从艇之间的无向通信拓扑关系为  $[A]_{12} = [A]_{21} = [A]_{23} = [A]_{32} = 1$ , 且至少有一个从艇可以获取母艇的消息,  $[H]_1 = [H]_3 = 1$ . 考虑 USV 集群系统 (18) 和输入控制律 (21), 其中  $\kappa_1 = 0.11$ ,  $\kappa_2 = 0.1$ . 初始位姿信息为  $\eta_0 = [5, 0, 0]$ ,  $\eta_1 = [2, 0, 0.2]$ ,  $\eta_2 = [3, 0, 0.1]$ ,  $\eta_3 = [4, 0, 0.3]$ , 初始速度信息为  $\nu_0 = [0.4, 0.1, 0]$ ,  $\nu_1 = [0.5, 0.2, 0.1]$ ,  $\nu_2 = [0.8, 0, 0.3]$ ,  $\nu_3 = [0.7, 0.3, -0.1]$ . 选取随机采样周期  $T_1 = 0.5$  s 和  $T_2 = 1$  s, 具体仿真结果如图 6 ~ 8 所示.

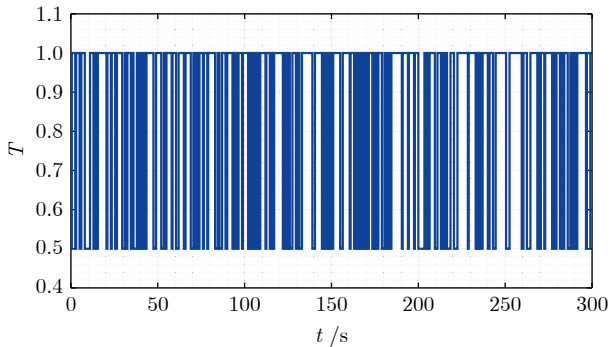


图 6 随机采样序列

Fig.6 Stochastic sampling sequence

## 4 概率计算

针对图 1 中所设计的非均匀“拦截线”, 本节将从理论上求解出该非均匀拦截阵型下的拦截概率, 并通过数值仿真验证该理论值的正确性.

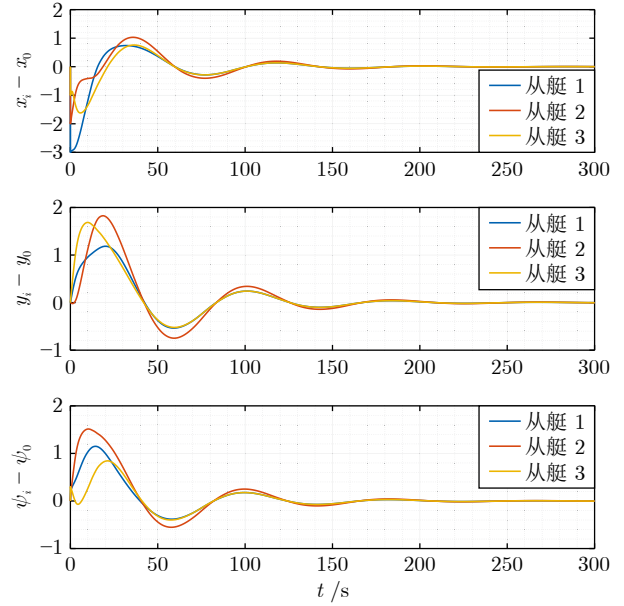


图 7 在图 6 所示随机采样序列下, 各个从艇与母艇的位姿误差

Fig.7 Pose errors between the leader and each follower USV under the stochastic sampling sequence in Fig.6

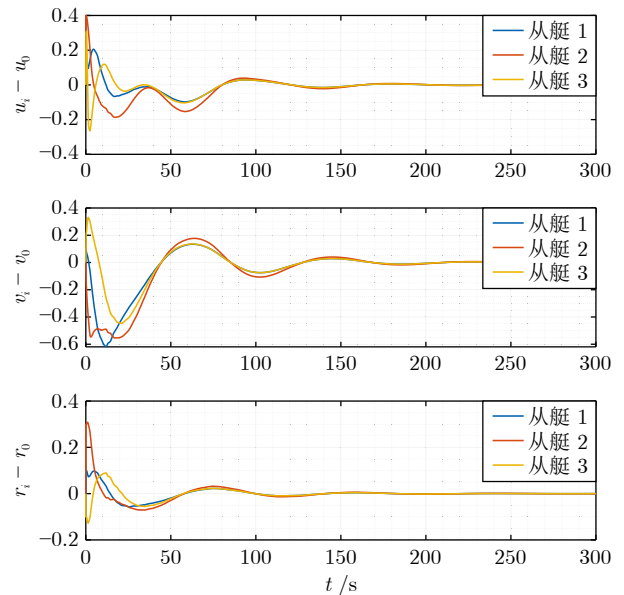


图 8 在图 6 所示随机采样序列下, 各个从艇与母艇的速度误差

Fig.8 Velocity errors between the leader and each follower USV under the stochastic sampling sequence in Fig.6

### 4.1 概率密度函数求取

已知目标航行方向且方向保持不变, 运动速度大小记为  $V_m$ . 如图 1 所示, 第 2 节所设计的“拦截线”垂直于目标航行方向, 并以“拦截线”为  $x$  轴, 目标航向为  $y$  轴, 建立如图 9 所示的直角坐标系, 并

且当 USV 的运动轨迹如图 1 中红色实线所示时, USV 集群相对移动目标的探测区域为图 9 中的浅绿色区域. 基于该直角坐标系, 将目标水平方向的位置用横坐标  $x$  表示, 目标竖直方向的位置用纵坐标  $y$  表示, 具体如图 9 所示. 如上文陈述, USV 集群所构成的拦截线满足对称性, 对于某些  $i, j$ , 有  $L_i = L_j$  成立. 因此, 图 9 中有  $L_1 = L_N$  和  $L_i = L_{i+1}$  成立.

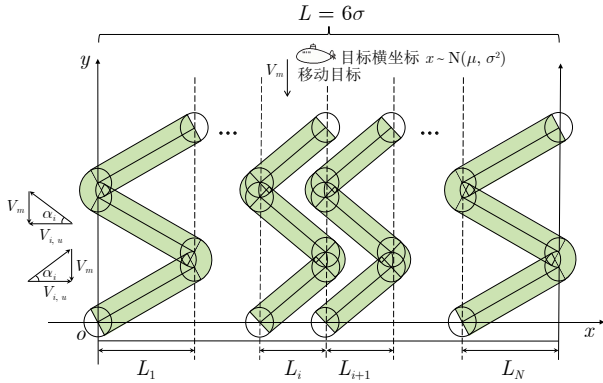


图 9 USV 集群与移动目标的相对运动示意图

Fig.9 Schematic diagram of the relative motion between the USV swarm and the moving target

已知目标水平方向的位置呈正态分布性质, 则根据目标出现的位置区间, 按照正态分布函数的  $3\sigma$  原则, 将位置区间即目标横坐标描述为  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ , 表明该区间中心的横坐标为  $x = \mu$ , 即所设计的正态分布函数的数学期望, 区间长度总长  $L$  与正态分布函数的标准差  $\sigma$  的关系为  $L = 6\sigma$ , 则目标水平方向位置的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in (-\infty, \infty)$$

根据正态分布函数的性质可得, 目标出现在该区间的概率为 99.74%. 根据目标可能通过 USV 巡逻线的时间段  $(a, b)$ , 且目标在该时间段内呈均匀分布, 则目标通过巡逻线的时间的概率密度函数为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in (a, b) \\ 0, & t \notin (a, b) \end{cases}$$

由均匀分布性质可得, 由于目标通过巡逻线的时间呈均匀分布, 则目标在竖直方向上的位置仍服从均匀分布. 令 USV 的巡逻区间长度为  $L_i$ , 每个 USV 的探测半径均为  $r_{tc}$ , 巡逻速度为  $V_{i,u}$  且  $V_{i,u} < V_m$ , 转弯半径为  $r_{i,u}$  且  $r_{i,u} \leq r_{tc}$ . 任取常数  $\rho > 0$ , 假设目标抵达图 1 所示的拦截线的时长是 USV 完成一次完整的往返巡逻时长的  $\rho/2$  倍, 则目标竖直方向位置的概率密度函数为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{\rho V_m (L_i + \pi r_{i,u})}{V_{i,u}}}, & y \in \left(-r_{tc}, \frac{\rho V_m (L_i + \pi r_{i,u})}{V_{i,u}} - r_{tc}\right) \\ 0, & y \notin \left(-r_{tc}, \frac{\rho V_m (L_i + \pi r_{i,u})}{V_{i,u}} - r_{tc}\right) \end{cases}$$

由上述概率密度函数的性质以及直角坐标系的性质可得, 目标的分布区域为矩形, 且其位置的联合概率密度函数即为水平方向的位置与竖直方向的位置的联合概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \frac{\rho V_m (L_i + \pi r_{i,u})}{V_{i,u}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \in (-\infty, \infty), y \in \left(-r_{tc}, \frac{\rho V_m (L_i + \pi r_{i,u})}{V_{i,u}} - r_{tc}\right) \\ 0, & x \in (-\infty, \infty), y \notin \left(-r_{tc}, \frac{\rho V_m (L_i + \pi r_{i,u})}{V_{i,u}} - r_{tc}\right) \end{cases} \quad (30)$$

每个 USV 的相对探测区域如图 10 所示. 当联合概率密度函数确定为式 (30) 时, 只需关注该概率密度函数所在的积分区域, 即积分区间, 而与积分区间的起始点无关. 基于这一事实, 对于第  $i$  艘 USV, 可以如图 10 建立直角坐标系, 将 USV 首次位于其工作区间的左端点的时刻设为 0. USV 沿巡逻线巡逻的速度大小保持不变, 每当航行至其水平工作区间的端点则立即沿如图 1 中红色实线中的半圆形巡逻线进行转弯.

相对于移动目标, USV 的位置按式 (30) 中的联合概率密度在矩形的分布区域中随机分布, 数学

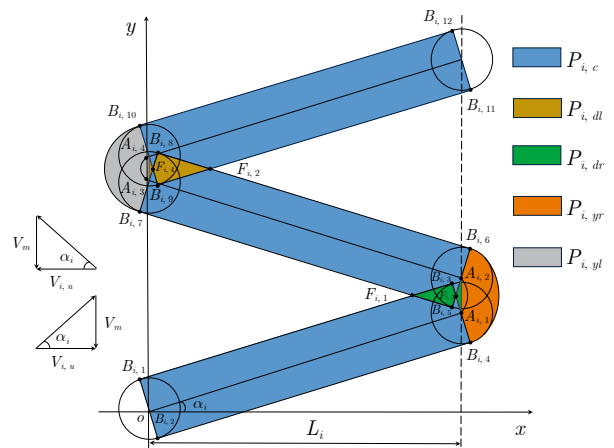


图 10 第  $i$  艘 USV 完成一次完整往返巡逻的相对探测区域  
Fig.10 The relative detection area of the  $i$ -th USV completing one full round-trip patrol

期望为  $\mu = L/2$ . 再利用相对运动原理, 即 USV 在竖直方向获得与目标速度大小相同、方向相反的速度. 由于 USV 探测范围为圆形, 其在水平方向速度和竖直方向速度的联合作用下, 在目标分布区域中生成了由多个半圆探测区域以及多个矩形探测区域构成的规则图形. 由于垂直方向均匀分布函数的特性, 每个 USV 在其相对探测区域的积分 (即为探测目标概率) 都相等, 因此只需计算其在一个完整的往返巡逻单航段所生成的相对探测区域的概率积分并乘以  $\rho$  即可. 不失一般性, 假设  $\rho/2$  为整数, 并令  $g(x, y) = \frac{\rho}{2} f(x, y) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma} \frac{V_m(L_i + \pi r_{i,u})}{V_{i,u}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \\ x \in (-\infty, \infty), y \in \left(-r_{tc}, \frac{\rho V_m(L_i + \pi r_{i,u})}{V_{i,u}} - r_{tc}\right) \\ 0, \\ x \in (-\infty, \infty), y \notin \left(-r_{tc}, \frac{\rho V_m(L_i + \pi r_{i,u})}{V_{i,u}} - r_{tc}\right) \end{cases}$$

为单艘 USV 对移动目标的拦截概率密度函数.

## 4.2 概率计算

基于概率密度函数  $g(x, y)$ , 第  $i$  个 USV 对移动目标的拦截概率为  $g(x, y)$  在如图 10 所示的一次完整往返巡逻的相对探测区域中的积分.

为方便起见, 令  $P_{i,c}$  为第  $i$  艘 USV 在所有矩形探测区域 (即图 10 中的蓝色区域) 中的总探测目标概率,  $P_{i,dr}$  为第  $i$  艘 USV 在右侧多边形组 (即图 10 中的绿色区域) 中的总探测目标概率,  $P_{i,dl}$  为第  $i$  艘 USV 在左侧多边形组 (即图 10 中的咖啡色区域) 中的总探测目标概率,  $P_{i,yr}$  为第  $i$  艘 USV 在右侧扇形组 (即图 10 中的橙色区域) 中的总探测目标概率,  $P_{i,yl}$  为第  $i$  艘 USV 在左侧扇形组 (即图 10 中的灰色区域) 中的总探测目标概率. 由于 USV 在拦截搜索过程中相对速度的动态变化, 使得 USV 在同路段对同一运动目标的探测区域出现交替性的扩大与收缩, 从而形成了探测范围 (扫过面积) 的重叠与差异. 有如下定理成立.

**定理 4.** 考虑由  $N$  艘 USV 构建如图 1 所示的非均匀长度为  $L$  的拦截线, 且该 USV 集群在巡逻线上做匀速运动, 则该拦截线对在时间上做均匀分布、在方位上做正态分布的移动目标的拦截概率为

$$\begin{cases} P_{tc} = \sum_{i=1}^N P_i \\ P_i = P_{i,c} - P_{i,dr} - P_{i,dl} + P_{i,yr} + P_{i,yl} \end{cases}$$

其中,

$$P_{i,c} = P_{i,c1} + P_{i,c2} + P_{i,c3}$$

$$P_{i,dr} = P_{i,dr1} + P_{i,dr2} + P_{i,dr3}$$

$$P_{i,dl} = P_{i,dl1} + P_{i,dl2} + P_{i,dl3}$$

$$P_{i,yr} = 2P_{i,yr1} + P_{i,yr2} + P_{i,yr3}$$

$$P_{i,yl} = 2P_{i,yl1} + P_{i,yl2} + P_{i,yl3}$$

且

$$P_{i,c1} = 2 \int_{x_{B_{i,1}}}^{x_{B_{i,2}}} \int_{y_{o1}}^{y_2} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,c2} = 2 \int_{x_{B_{i,2}}}^{x_{B_{i,3}}} \int_{y_1}^{y_2} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,c3} = 2 \int_{x_{B_{i,3}}}^{x_{B_{i,4}}} \int_{y_1}^{y_{A_{i,11}}} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,dr1} = \int_{x_{F_{i,1}}}^{x_{B_{i,3}}} \int_{y_3}^{y_2} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,dr2} = \int_{x_{B_{i,3}}}^{x_{F_{i,3}}} \int_{y_{A_{i,12}}}^{y_{A_{i,11}}} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,dr3} = \int_{x_{F_{i,3}}}^{x_{A_{i,1}}} \int_{y_{A_{i,11}}}^{y_{A_{i,12}}} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,dl1} = \int_{x_{B_{i,9}}}^{x_{F_{i,2}}} \int_{y_5}^{y_4} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,dl2} = \int_{x_{B_{i,9}}}^{x_{F_{i,4}}} \int_{y_{A_{i,21}}}^{y_{A_{i,22}}} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,dl3} = \int_{x_{A_{i,2}}}^{x_{F_{i,4}}} \int_{A_{i,22}}^{A_{i,21}} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,yr1} = \int_{x_{F_{i,3}}}^{x_{B_{i,6}}} \int_{y_{F_{i,3}}}^{y_{A_{i,12}}} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,yr2} = \int_{x_{B_{i,6}}}^{x'_r} \int_{y_{F_{i,3}}}^{y'_r} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,yr3} = \int_{x_{B_{i,6}}}^{x'_r} \int_{y'_{F_{i,3}}}^{y_{F_{i,3}}} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,yl1} = \int_{x_{F_{i,4}}}^{x_{B_{i,10}}} \int_{y_{F_{i,4}}}^{y_{A_{i,21}}} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,yl2} = \int_{x_{B_{i,10}}}^{x'_l} \int_{y_{F_{i,3}}}^{y'_l} g(x, y) dx dy$$

$$P_{i,yl3} = \int_{x_{B_{i,10}}}^{x'_l} \int_{y''_l}^{y_{F_{i,3}}} g(x, y) dx dy$$

式中相关积分上/下限的定义如下文所示.

**证明.** 定义摆放在最左端的 USV 从 0 时刻到

首次开始变换巡逻方向的过程中所生成的矩形探测区域为矩形  $B_{i,1}B_{i,2}B_{i,3}B_{i,4}$ , 且四个顶点的横坐标满足  $x_{B_{i,1}} < x_{B_{i,2}} < x_{B_{i,3}} < x_{B_{i,4}}$ . 首次完成变换巡逻方向 (即首次完成转弯任务) 后到第二次开始变换巡逻方向前的过程中所生成的矩形探测区域为矩形  $B_{i,5}B_{i,6}B_{i,7}B_{i,8}$ , 且四个顶点的横坐标满足  $x_{B_{i,7}} < x_{B_{i,8}} < x_{B_{i,5}} < x_{B_{i,6}}$ . 第二次完成变换巡逻方向后到第三次开始变换巡逻方向前的过程中所生成的矩形探测区域为矩形  $B_{i,9}B_{i,10}B_{i,11}B_{i,12}$ , 且四个顶点的横坐标满足  $x_{B_{i,10}} < x_{B_{i,9}} < x_{B_{i,12}} < x_{B_{i,11}}$ . 在时刻 0 时, 该 USV 的坐标为 (0, 0).

在上述 USV 生成的矩形探测区域的描述下, 定义其首次开始变换巡逻方向的坐标为  $(x_{A_{i,1}}, y_{A_{i,1}})$ , 且

$$x_{A_{i,1}} = L_i, \quad y_{A_{i,1}} = L_i \tan \alpha_i$$

其中,  $\alpha_i = \arctan(V_m/V_{i,u})$ . 首次完成转弯任务后的坐标为  $(x_{A_{i,2}}, y_{A_{i,2}})$ , 则该 USV 从  $(x_{A_{i,1}}, y_{A_{i,1}})$  运动至  $(x_{A_{i,2}}, y_{A_{i,2}})$ , 即在右半巡逻线过程中的运动方程为:

$$\begin{cases} x = L_i + r_{i,u} \sin \omega_i t \\ y = L_i \tan \alpha_i + r_{i,u} (1 - \cos \omega_i t) + V_m t \end{cases}$$

其中,  $\omega_i = V_{i,u}/r_{i,u}$ . 则有

$$x_{A_{i,2}} = L_i, \quad y_{A_{i,2}} = L_i \tan \alpha_i + \left(2 + \frac{\pi V_m}{V_{i,u}}\right) r_{i,u}$$

以及

$$\begin{aligned} x_{B_{i,1}} &= x_{B_{i,7}} = x_{B_{i,10}} = -r_{tc} \sin \alpha_i \\ x_{B_{i,2}} &= x_{B_{i,8}} = x_{B_{i,9}} = r_{tc} \sin \alpha_i \\ x_{B_{i,3}} &= x_{B_{i,5}} = x_{B_{i,12}} = L_i - r_{tc} \sin \alpha_i \\ x_{B_{i,4}} &= x_{B_{i,6}} = x_{B_{i,11}} = L_i + r_{tc} \sin \alpha_i \end{aligned}$$

令线段  $B_{i,1}B_{i,3}$  和线段  $B_{i,5}B_{i,7}$  的交点为  $F_{i,1}$ , 线段  $B_{i,3}B_{i,4}$  和线段  $B_{i,5}B_{i,6}$  的交点为  $F_{i,3}$ , 则

$$x_{F_{i,1}} = L_i - \frac{r_{tc}}{\sin \alpha_i} + \frac{r_{i,u}}{2 \tan \alpha_i} \left(2 + \frac{\pi V_m}{V_{i,u}}\right)$$

$$x_{F_{i,3}} = L_i - \left(1 + \frac{\pi V_m}{2V_{i,u}}\right) r_{i,u} \tan \alpha_i$$

$$y_{F_{i,1}} = L_i \tan \alpha_i + \left(1 + \frac{\pi V_m}{2V_{i,u}}\right) r_{i,u}$$

$$y_{F_{i,3}} = L_i \tan \alpha_i + \left(1 + \frac{\pi V_m}{2V_{i,u}}\right) r_{i,u}$$

并且线段  $B_{i,1}B_{i,2}$  满足

$$y_{o1} = -\frac{x}{\tan \alpha_i}$$

线段  $B_{i,3}B_{i,4}$  满足

$$y_{A_{i,11}} = -\frac{x}{\tan \alpha_i} + \frac{L_i}{\tan \alpha_i} + L_i \tan \alpha_i$$

线段  $B_{i,2}B_{i,4}$  满足

$$y_1 = x \tan \alpha_i - \frac{r_{tc}}{\cos \alpha_i}$$

线段  $B_{i,1}B_{i,3}$  满足

$$y_2 = x \tan \alpha_i + \frac{r_{tc}}{\cos \alpha_i}$$

线段  $B_{i,5}B_{i,6}$  满足

$$y_{A_{i,12}} = \frac{x}{\tan \alpha_i} - \frac{L_i}{\tan \alpha_i} + L_i \tan \alpha_i + \left(2 + \frac{\pi V_m}{V_{i,u}}\right) r_{i,u}$$

线段  $B_{i,5}B_{i,7}$  满足

$$y_3 = -x \tan \alpha_i - \frac{r_{tc}}{\cos \alpha_i} + 2L_i \tan \alpha_i + \left(2 + \frac{\pi V_m}{V_{i,u}}\right) r_{i,u}$$

当 USV 在左半圆巡逻线上工作时, 类似地, 其在该联合概率分布平面内形成的运动方程应为

$$\begin{cases} x = r_{i,u} \sin \omega_i t \\ y = 2L_i \tan \alpha_i + \left(2 + \frac{\pi V_m}{V_{i,u}}\right) r_{i,u} - r_{i,u} (1 - \cos \omega_i t) + V_m t \end{cases}$$

则有

$$x_{A_{i,4}} = 0, \quad y_{A_{i,4}} = 2L_i \tan \alpha_i + \frac{2\pi V_m}{V_{i,u}} r_{i,u}$$

令线段  $B_{i,6}B_{i,8}$  和线段  $B_{i,9}B_{i,11}$  的交点为  $F_{i,2}$ , 线段  $B_{i,7}B_{i,8}$  和线段  $B_{i,9}B_{i,10}$  的交点为  $F_{i,4}$ , 则有

$$x_{F_{i,2}} = \frac{r_{tc}}{\sin \alpha_i} + \frac{r_{i,u}}{\tan \alpha_i} \left(1 - \frac{\pi V_m}{2V_{i,u}}\right)$$

$$x_{F_{i,4}} = \left(\frac{\pi V_m}{2V_{i,u}} - 1\right) r_{i,u} \tan \alpha_i$$

$$y_{F_{i,2}} = 2L_i \tan \alpha_i + \left(1 + \frac{3\pi V_m}{2V_{i,u}}\right) r_{i,u}$$

$$y_{F_{i,4}} = 2L_i \tan \alpha_i + \left(1 + \frac{3\pi V_m}{2V_{i,u}}\right) r_{i,u}$$

并且线段  $B_{i,6}B_{i,8}$  满足

$$y_4 = -x \tan \alpha_i + \frac{r_{tc}}{\cos \alpha_i} + 2L_i \tan \alpha_i + \left(2 + \frac{\pi V_m}{V_{i,u}}\right) r_{i,u}$$

线段  $B_{i,7}B_{i,8}$  满足

$$y_{A_{i,22}} = \frac{x}{\tan \alpha_i} + 2L_i \tan \alpha_i + \left(2 + \frac{\pi V_m}{V_{i,u}}\right) r_{i,u}$$

线段  $B_{i,9}B_{i,10}$  满足

$$y_{A_{i,21}} = -\frac{x}{\tan \alpha_i} + 2L_i \tan \alpha_i + \frac{2\pi V_m}{V_{i,u}} r_{i,u}$$

线段  $B_{i,9}B_{i,11}$  满足

$$y_5 = x \tan \alpha_i - \frac{r_{tc}}{\cos \alpha_i} + 2L_i \tan \alpha_i + \frac{2\pi V_m}{V_{i,u}} r_{i,u}$$

线段  $B_{i,10}B_{i,12}$  满足

$$y_6 = x \tan \alpha_i + \frac{r_{tc}}{\cos \alpha_i} + 2L_i \tan \alpha_i + \frac{2\pi V_m}{V_{i,u}} r_{i,u}$$

综上, 该 USV 在生成的所有矩形探测区域中的总探测目标概率为:

$$P_{i,c} = P_{i,c1} + P_{i,c2} + P_{i,c3}$$

其中,  $P_{i,c1}$ ,  $P_{i,c2}$  和  $P_{i,c3}$  如定理 4 定义.

考虑到存在多个弧形探测区域以及每个矩形探测区域间存在重合部分, 有效相对探测区域为 USV 所生成的所有矩形探测区域总和中剔除每个矩形探测区域间存在的重合部分, 并加入多个弧形探测区域. 因此, 计算该 USV 有效相对探测区域中的探测目标概率, 即计算该 USV 在此区间中所生成相对探测区域的实际概率总和, 需对上述概率公式进行修正. 根据均匀分布特性以及正态分布特性, 只需对该 USV 在其相对探测区域中的前两个多边形重合部分进行积分相加并乘以  $\rho/2$  即可.

USV 在右侧多边形组中的总探测目标概率为:

$$P_{i,dr} = P_{i,dr1} + P_{i,dr2} + P_{i,dr3}$$

其中,  $P_{i,dr1}$ ,  $P_{i,dr2}$  和  $P_{i,dr3}$  如定理 4 定义.

USV 在左侧多边形组中的总探测目标概率为:

$$P_{i,dl} = P_{i,dl1} + P_{i,dl2} + P_{i,dl3}$$

其中,  $P_{i,dl1}$ ,  $P_{i,dl2}$  和  $P_{i,dl3}$  如定理 4 定义.

同理, USV 在右侧扇形组中的总探测目标概率为:

$$P_{i,yr} = 2P_{i,yr1} + P_{i,yr2} + P_{i,yr3}$$

其中,  $P_{i,yr1}$ ,  $P_{i,yr2}$  和  $P_{i,yr3}$  如定理 4 定义, 并且

$$x'_r = L_i + r_{tc} + r_{i,u}$$

$$y'_r = \sqrt{(r_{tc} + r_{i,u})^2 - (x - L_i)^2} + y_{F_{i,3}} +$$

$$\frac{V_m r_{tc}}{V_{i,u}} \arcsin \frac{x - L_i}{r_{tc} + r_{i,u}}$$

$$y''_r = -\sqrt{(r_{tc} + r_{i,u})^2 - (x - L_i)^2} + y_{F_{i,3}} + \frac{V_m r_{tc}}{V_{i,u}} \arcsin \frac{x - L_i}{r_{tc} + r_{i,u}}$$

USV 在左侧扇形组中的总探测目标概率为:

$$P_{i,yl} = 2P_{i,yl1} + P_{i,yl2} + P_{i,yl3}$$

其中,  $P_{i,yl1}$ ,  $P_{i,yl2}$  和  $P_{i,yl3}$  如定理 4 定义, 并且

$$x'_l = L_i + r_{tc} - r_{i,u}$$

$$y'_l = \sqrt{(r_{tc} - r_{i,u})^2 - (x - L_i)^2} + y_{F_{i,3}} +$$

$$\frac{V_m r_{tc}}{V_{i,u}} \arcsin \frac{x - L_i}{r_{tc} - r_{i,u}}$$

$$y''_l = -\sqrt{(r_{tc} - r_{i,u})^2 - (x - L_i)^2} + y_{F_{i,3}} +$$

$$\frac{V_m r_{tc}}{V_{i,u}} \arcsin \frac{x - L_i}{r_{tc} - r_{i,u}}$$

综上, 第  $i$  个 USV 对移动目标的探测概率为定理 4 中的  $P_i$ . 至于其他 USV 在其区间内所生成的有效相对探测区域的探测目标概率, 只需在  $P_1$  的基础上, 将积分的上/下限向  $x$  轴正方向平移其相应的区间长度即可. 则所有 USV 的探测目标的概率总和即为:

$$P_{tc} = \sum_{i=1}^N P_i \quad (31)$$

□

### 4.3 仿真实验

本部分首先开展针对式 (31) 中的往返拦截概率的仿真实验, 如图 11 所示. 其中, 红色线段为由

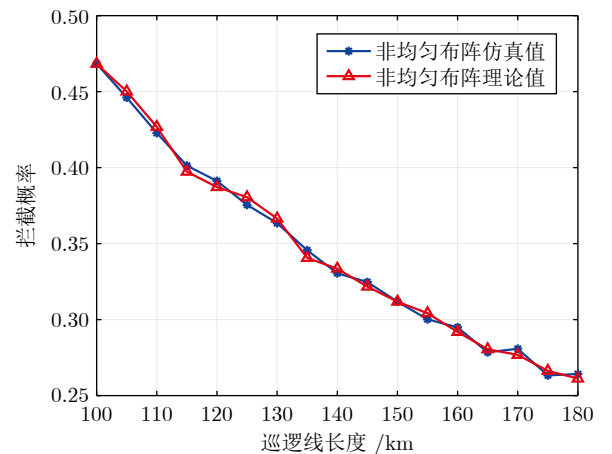


图 11 拦截概率 (31) 的仿真实验

Fig. 11 Simulation verification on the interception probability given in (31)

式 (31) 计算得到的非均匀布阵对目标拦截概率的理论值, 蓝色线段为 10000 次试验非均匀布阵对目标拦截概率的仿真结果. 由图可见, 在非均匀布阵条件下, 理论计算所得拦截概率与仿真实值基本吻合, 两条曲线拟合良好. 在 USV 集群执行往返拦截任务过程中, 探测发现概率随整体巡逻线长度的增加而逐渐降低. 该结果验证了拦截概率计算公式在 USV 集群往返拦截运动中的有效性与准确性.

图 12 给出了本文所提出的非均匀拦截布阵与均匀拦截布阵、随机拦截布阵下的拦截概率随巡逻线长度  $L$  的变化规律. 在该仿真中, 选取  $N = 4$ , 并且拦截概率是试验 10000 次的结果. 如图 12 所示, 在 USV 集群进行往返拦截运动的过程中, 本文所提出的非均匀拦截布阵的拦截概率最高, 与均匀拦截布阵相比, 拦截概率提高 20.13% ~ 29.18%, 与随机拦截布阵相比, 拦截概率提高 275.09% ~ 292.77%. 因此, 非均匀拦截布阵具有显著的高效性.

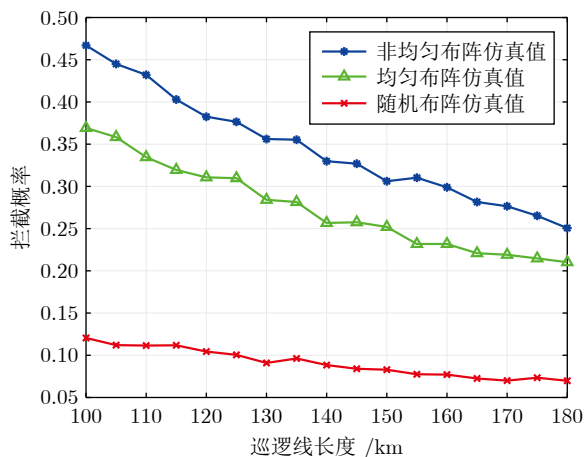


图 12 非均匀布阵、均匀布阵和随机布阵下的拦截概率  
Fig. 12 Interception probability under non-uniform, uniform and random deployment

## 5 结束语

本文针对位置与时间分别服从正态分布与均匀分布的目标, 研究了 USV 集群的协同拦截问题, 重点探讨了 USV 集群布阵设计、方案实现与拦截概率计算. 首先, 基于建立的 USV 模型, 在布阵设计阶段, 综合考虑目标位置的正态分布特性, 规划并优化拦截线阵型, 通过路径优化策略提升整体拦截效率. 其次, 结合预设时间控制理论设计运动学与动力学控制器, 确保 USV 能够在预设时间内以期望速度准确抵达目标阵位, 实现 USV 集群在拦截搜索过程中的定速跟踪和同频搜索. 进一步地, 在集群协同撤收阶段, 针对速度信息难以直接获取的

实际约束, 提出一种仅依赖历史位置信息的分布式一致性控制协议. 该协议结合随机采样机制与领导者-跟随者一致性模型, 能够在不同采样周期条件下维持集群一致性, 同时提升了隐蔽性. 最后, 进行概率计算, 仿真结果验证了所提方案的有效性. 在未来的工作中, 将探索更为复杂的拦截场景与动态目标分布, 进一步利用历史数据优化协同控制协议, 提升其在实际复杂环境中的适应性与鲁棒性.

## 参考文献

- 1 Yan Jing, Guan Xin-Ping. Development status and key techniques for cross-domain swarm of maritime unmanned systems. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(4): 744-761 (闫敬, 关新平. 海上无人系统跨域集群发展现状及其关键技术. *自动化学报*, 2025, **51**(4): 744-761)
- 2 Wang Duan-Song, Li Dong-Yu, Liang Xiao-Ling. Finite time synchronized formation control of unmanned surface vehicles with external disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(5): 1047-1058 (王端松, 李东禹, 梁晓玲. 干扰条件下无人艇编队有限时间同步控制. *自动化学报*, 2024, **50**(5): 1047-1058)
- 3 Ren Lu, Ke Ya-Nan, Liu Wen-Zhang, Mu Chao-Xu, Sun Chang-Yin. Multi-USVs cooperative policy optimization method based on disturbed input of advantage function. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(4): 824-834 (任璐, 柯亚男, 柳文章, 穆朝絮, 孙长银. 基于优势函数输入扰动的多无人艇协同策略优化方法. *自动化学报*, 2025, **51**(4): 824-834)
- 4 Yuan Yang, Duan Hai-Bin, Wei Chen. Heterogeneous cooperative fixed-time prescribed performance evolution control for unmanned aerial/surface vehicle. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(5): 1052-1066 (袁洋, 段海滨, 魏晨. 无人机/无人艇异构协同固定时间预设性能演化控制. *自动化学报*, 2025, **51**(5): 1052-1066)
- 5 Wen Guang-Hui, Yu Xing-Huo, Huang Ting-Wen, Zhou Yan. Fixed-time bipartite formation tracking control for multi-USV systems with uncertain model parameters. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(3): 669-677 (温广辉, 余星火, 黄廷文, 周艳. 模型参数不确定下多无人艇系统固定时间二分编队跟踪控制. *自动化学报*, 2025, **51**(3): 669-677)
- 6 Xie Shao-Rong, Liu Jian-Jian, Zhang Dan. Current development of control technology for unmanned surface vessel clusters under complex sea conditions. *Journal of Unmanned Undersea Systems*, 2020, **28**(6): 584-596 (谢少荣, 刘坚坚, 张丹. 复杂海况无人艇集群控制技术现状与发展. *水下无人系统学报*, 2020, **28**(6): 584-596)
- 7 Liang Wei, Yang Ri-Jie, Xiong Xiong. Optimal deployment of passive directional sonobuoy in underwater target tracking. *Ordinance Industry Automation*, 2017, **36**(10): 42-45 (梁巍, 杨日杰, 熊雄. 被动定向声纳浮标跟踪潜艇优化布放. *兵工自动化*, 2017, **36**(10): 42-45)
- 8 Zhang Yao-Qing, Hu Zhu-Xi. Model and simulation of antisubmarine patrol aircraft searching submarine by laying sonobuoy interception array. *Science Technology and Engineering*, 2018, **18**(21): 327-331 (章尧卿, 胡柱喜. 反潜巡逻机布设声纳浮标拦截阵对潜搜索建模与仿真. *科学技术与工程*, 2018, **18**(21): 327-331)
- 9 Zhang Hui, Wang An, Cheng Jian, Qu Ze-Jun. Derivation, examination and revision of calculation formula for detection probability of ship round-trip interception search. *Journal of Army Engineering University of PLA*, 2022, **1**(1): 54-59 (张会, 王安, 程健, 屈泽均. 舰船往返拦截搜索发现概率计算公式的推导、检验和修正. *陆军工程大学学报*, 2022, **1**(1): 54-59)
- 10 Wang Xiao-Ling, Zhang An-Kang, Zhang Hui, Xu Wei-Chen, Chen Yuan-Bao, Huang Shuang, et al. Method for Calculating Probability of Detecting Normal Distribution Target by Mul-

- multiple Unmanned Ships, China Patent CN116881625B, November 2023  
(王晓玲, 张安康, 张会, 徐伟辰, 陈源宝, 黄双, 等. 一种多无人艇探测正态分布目标概率的计算方法, 中国 CN116881625B, 2023-11)
- 11 Chen Yuan-Bao, Wang Xiao-Ling, Zhang An-Kang, Li Feng-Yun, Cao Xu, Huang Shuang, et al. Arrangement Searching Method for Uniformly Distributed Targets by Multiple UUVs (Unmanned Underwater Vehicle), China Patent CN117010153B, November 2024  
(陈源宝, 王晓玲, 张安康, 黎烽云, 曹旭, 黄双, 等. 一种多 UUV 对均匀分布目标的布阵搜索方法, 中国 CN117010153B, 2024-11)
  - 12 Amato F, Ambrosino R, Ariola M, Cosentino C, de Tommasi G. *Finite-time Stability and Control*. London: Springer, 2014.
  - 13 Shan Q H, Wang X J, Li T S, Chen C L P. Finite-time control for USV path tracking under input saturation with random disturbances. *Applied Ocean Research*, 2023, **138**: Article No. 103628
  - 14 Kim H J, Yoo S J. Adaptive fixed-time containment control of uncertain underactuated underwater vehicles under dynamic event-driven mechanism. *Ocean Engineering*, 2024, **291**: Article No. 116488
  - 15 Jia X C, Li H P, Chi X B. Prescribed-time consensus of integrator-type multi-agent systems via sampled-data control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2024, **71**(7): 3413–3417
  - 16 Sui B W, Zhang J Q, Liu Z. Extended state observer based prescribed-time trajectory tracking control for USV with prescribed performance constraints and input saturation. *Ocean Engineering*, 2025, **316**: Article No. 120005
  - 17 Su Y B, Teng F, Li T S, Sun Q Y. Adaptive prescribed-time tracking control for an unmanned surface vehicle considering motor-driven propellers. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2025, **21**(2): 1665–1673
  - 18 Liu X X, Sun B, Su Z N. Adaptive sliding mode control for AUV based on backstepping and neural networks. *Measurement Science and Technology*, 2025, **36**(1): Article No. 016215
  - 19 Jiang Y B, Guo C, Yu H M. Horizontal trajectory tracking control for an underactuated AUV adopted global integral sliding mode control. In: Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference. Shenyang, China: IEEE, 2018. 5786–5791
  - 20 Zhou Y, Li Y X, Ahn C K. Distributed prescribed-time reinforcement learning control for multiagent uncrewed surface vessels with collision avoidance. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2025, **74**(12): 18472–18482
  - 21 Zhang Y, Yan X, Zou W C, Xiang Z R. Fuzzy optimal tracking control for autonomous surface vehicles with prescribed-time convergence analysis. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2024, **32**(11): 6523–6533
  - 22 Fossen T I, Pettersen K Y, Galeazzi R. Line-of-sight path following for Dubins paths with adaptive sideslip compensation of drift forces. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, **23**(2): 820–827
  - 23 Su H S, Liu Y F, Zeng Z G. Second-order consensus for multiagent systems via intermittent sampled position data control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, **50**(5): 2063–2072
  - 24 Huang N, Duan Z S, Chen G R. Some necessary and sufficient conditions for consensus of second-order multi-agent systems with sampled position data. *Automatica*, 2016, **63**: 148–155
  - 25 Du S L, Xia W G, Ren W, Sun X M, Wang W. Observer-based consensus for multiagent systems under stochastic sampling mechanism. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, **48**(12): 2328–2338
  - 26 He W L, Zhang B, Han Q L, Qian F, Kurths J, Cao J D. Leader-following consensus of nonlinear multiagent systems with stochastic sampling. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, **47**(2): 327–338
  - 27 Fossen T I. *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*. Chichester: Wiley, 2011.
  - 28 Zhang X, Chen H J, Xing W, Feng Z G, Jiang H L. Collision-free trajectory tracking strategy of a UUV via finite-time extended state observer-based sliding mode predictive control. *Journal of the Franklin Institute*, 2024, **361**(18): Article No. 107245
  - 29 Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 655–661
  - 30 Su H S, Chen M Z Q, Wang X F. Global coordinated tracking of multi-agent systems with disturbance uncertainties via bounded control inputs. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **82**(4): 2059–2068
  - 31 Su H S, Chen G R, Wang X F, Lin Z L. Adaptive second-order consensus of networked mobile agents with nonlinear dynamics. *Automatica*, 2011, **47**(2): 368–375
  - 32 Wang Y J, Song Y D, Hill D J, Krstic M. Prescribed-time consensus and containment control of networked multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **49**(4): 1138–1147
  - 33 Yan Z P, Yang Z W, Yue L D, Wang L, Jia H M, Zhou J J. Discrete-time coordinated control of leader-following multiple AUVs under switching topologies and communication delays. *Ocean Engineering*, 2019, **172**: 361–372
  - 34 Shen B, Wang Z D, Liu X H. Sampled-data synchronization control of dynamical networks with stochastic sampling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(10): 2644–2650



**王晓玲** 南京邮电大学自动化学院教授。主要研究方向为多智能体系统协同控制, 不确定系统分布式状态估计, 及其在无人集群系统中的应用。

E-mail: [xiaolingwang@njupt.edu.cn](mailto:xiaolingwang@njupt.edu.cn)  
(**WANG Xiao-Ling** Professor at the College of Automation, Nanjing

University of Posts and Telecommunications. Her research interests include coordinated control of multi-agent systems, distributed state estimation of uncertain systems, and their applications for unmanned swarm systems.)



**徐英杰** 南京邮电大学自动化学院硕士研究生。主要研究方向为无人艇集群协同控制。

E-mail: [yingjixu0010@163.com](mailto:yingjixu0010@163.com)  
(**XU Ying-Jie** Master student at the College of Automation, Nanjing

University of Posts and Telecommunications. His main research interest is coordinated control of USV swarms.)



**徐伟辰** 华中科技大学人工智能与自动化学院博士研究生。主要研究方向为不确定系统分布式状态估计及其在无人集群系统中的应用。

E-mail: [d202581687@hust.edu.cn](mailto:d202581687@hust.edu.cn)  
(**XU Wei-Chen** Ph.D. candidate at the School of Artificial Intelligence

and Automation, Huazhong University of Science and Technology. His research interests include distributed state estimation of uncertain systems and its application for unmanned swarm systems.)



**刘 浏** 南京邮电大学通信与信息工程学院教授. 主要研究方向为无人控制系统, 机器视觉.

E-mail: [LiuLiu@njupt.edu.cn](mailto:LiuLiu@njupt.edu.cn)

**(LIU Liu** Professor at the School of Communications and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications. His research interests include unmanned control systems and ma-

chine vision.)



**苏厚胜** 华中科技大学人工智能与自动化学院教授. 主要研究方向为多智能体协同控制及其在自主机器人和移动传感器网络中的应用. 本文通信作者.

E-mail: [houshengsu@gmail.com](mailto:houshengsu@gmail.com)

**(SU Hou-Sheng** Professor at the School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and Technology. His research interests include multi-agent coordination control and its applications for autonomous robotics and mobile sensor networks. Corresponding author of this paper.)