

# 基于广义最大相关熵准则的几何滤波方法

杨旭升<sup>1,2</sup> 夏晓翠<sup>1,2</sup> 金宇强<sup>1,2</sup> 顾欣星<sup>1,2</sup> 张文安<sup>1,2</sup>

**摘要** 几何滤波是一种利用观测数据对流形上几何状态进行最优估计的方法,对刚体位姿估计具有重要作用和意义.针对非高斯条件下几何滤波性能下降的问题,提出一种基于广义最大相关熵准则(GMCC)的几何滤波方法.首先,根据流形上几何状态演化关系,采用流形无迹变换进行状态预测.其次,为抑制非高斯噪声引起的不利影响,将广义最大相关熵准则推广到流形上,实现对预测状态的修正来提高滤波的鲁棒性.然后,针对由GMCC引出的流形非线性优化问题,设计流形上的统计线性化方法,以及采用黎曼流形优化和定点迭代法求解优化问题.特别地,设计一种广义高斯核参数自适应调整策略,用于在线调整广义相关熵的超参数.最后,仿真结果表明,相较于现有方法,所提方法具有更高的精度和鲁棒性.

**关键词** 几何滤波,卡尔曼滤波,广义相关熵,矩阵李群

**引用格式** 杨旭升,夏晓翠,金宇强,顾欣星,张文安.基于广义最大相关熵准则的几何滤波方法.自动化学报,2025,51(7):1612-1625

**DOI** 10.16383/j.aas.c240497 **CSTR** 32138.14.j.aas.c240497

## Geometric Filtering Method Based on Generalized Maximum Correntropy Criterion

YANG Xu-Sheng<sup>1,2</sup> XIA Xiao-Cui<sup>1,2</sup> JIN Yu-Qiang<sup>1,2</sup> GU Xin-Xing<sup>1,2</sup> ZHANG Wen-An<sup>1,2</sup>

**Abstract** Geometric filtering is a method that uses observed data to optimally estimate the geometric state on a manifold, and it plays a significant role in rigid body pose estimation. Aiming at the problem of the performance degradation of geometric filtering under non-Gaussian conditions, a geometric filtering method based on the generalized maximum correntropy criterion (GMCC) is proposed. Firstly, according to the evolution relationship of the geometric state on the manifold, the state prediction is performed using the unscented transformation on the manifold. Secondly, in order to suppress the adverse effects of non-Gaussian noise, the GMCC is extended to the manifold to correct the predicted state, thereby improving the robustness of the filtering. Then, for the manifold nonlinear optimization problem induced by GMCC, a statistical linearization method on the manifold is designed, and the optimization problem is solved by Riemannian manifold optimization and fixed-point iteration method. In particular, an adaptive adjustment strategy for the generalized Gaussian kernel parameters is designed to adjust the hyperparameters of the generalized correntropy online. Finally, simulation results demonstrate that, compared to existing methods, the proposed method has higher accuracy and robustness.

**Key words** Geometric filtering, Kalman filtering, generalized correntropy, matrix Lie group

**Citation** Yang Xu-Sheng, Xia Xiao-Cui, Jin Yu-Qiang, Gu Xin-Xing, Zhang Wen-An. Geometric filtering method based on generalized maximum correntropy criterion. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(7): 1612-1625

收稿日期 2024-07-11 录用日期 2025-03-23

Manuscript received July 11, 2024; accepted March 23, 2025

国家自然科学基金(62473335, 62173305),浙江省引进培育领军型创新创业团队(2023R01006),中国博士后科学基金(2024M752864),宁波市公益性研究计划重点项目(2023S018)资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62473335, 62173305), Leading Innovative and Entrepreneur Team Introduction Program of Zhejiang (2023R01006), China Postdoctoral Science Foundation (2024M752864), and Ningbo Social Public Welfare Research Key Project (2023S018)

本文责任编辑 葛泉波

Recommended by Associate Editor GE Quan-Bo

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023 2. 浙江全省复杂系统智能感知与控制重点实验室 杭州 310023

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023 2. Zhejiang Key Laboratory of Intelligent Perception and Control for Complex Systems, Hangzhou 310023

作为机器人、自动驾驶、无人机、航空航天等领域的基础任务,刚体位姿估计问题受到广泛关注和研究<sup>[1-3]</sup>.对于位姿动态系统而言,其状态可在流形空间中完整表示,以便自然地描述和处理位姿的非线性特性,以及避免状态表示的奇异性问题.然而,由于流形空间在全局范围内具有强非线性结构,且无法进行如加法和数值乘法等线性运算,使得欧几里得空间的滤波方法难以直接应用于流形上的滤波问题,尤其是向量结构的状态空间表示法,难以适配位姿估计中的几何特性<sup>[4-5]</sup>.为此,针对刚体位姿估计问题,已形成一系列几何滤波方法以提高几何结构约束下的滤波性能<sup>[6-7]</sup>.然而,当前几何滤波方

法大多遵循基于最小均方误差 (Minimum mean square error, MMSE) 准则构建的高斯型滤波框架. 因而, 在非高斯噪声条件下, MMSE 的二阶统计量无法描述非高斯信号的高阶统计信息, 导致滤波性能显著下降甚至发散<sup>[8]</sup>.

针对流形上的状态估计问题, 最早由扩展卡尔曼滤波器 (Extended Kalman filter, EKF) 推广至流行空间, 形成相应的几何滤波方法. 文献 [9] 基于单位四元数  $S^3$  提出乘性扩展卡尔曼滤波器 (Multiplicative EKF, MEKF), 通过  $S^3$  的群乘运算来定义误差状态方程, 解决传统 EKF 的线性运算在流形空间上不封闭的问题. 然而, MEKF 是一类状态-轨迹相关系统, 其误差正反馈特性可能导致滤波器发散. 考虑特定的辅助航姿参考系统, 文献 [10] 提出广义 MEKF, 通过定义不变输出误差和不变状态误差来调整增益矩阵和协方差矩阵, 使其在大量状态轨迹上表现出更好的收敛性, 但难以适用于其他应用场景. 根据对称动力学的不变性, 文献 [11] 定义不变估计误差, 使得误差动态方程满足自治系统条件, 进而提出不变 EKF (Invariant EKF, InEKF), 从而提高姿态估计的准确性. 文献 [12] 将上述结果推广到具有群仿射性的李群 (Lie group, LG) 系统, 并证明在线性情况下, InEKF 对任何轨迹均具有局部稳定性, 可保证算法的收敛性和一致性<sup>[13]</sup>. 但是, 受限于 EKF 的一阶线性化操作, InEKF 等几何滤波方法同样对线性化误差具有敏感性. 相比之下, 无迹卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF) 通过无迹变换来预测状态均值和误差协方差, 确保至少二阶的泰勒展开近似精度, 且无需计算雅克比矩阵<sup>[14]</sup>. 然而, 当前几何滤波方法大多是基于高斯噪声假设而设计的, 在非高斯条件下精度显著下降.

针对非高斯条件下的状态估计问题, 大多在欧几里得空间中设计滤波方法. 文献 [15] 提出最大相关熵准则 (Maximum correntropy criterion, MCC), 其中, 相关熵作为一种鲁棒的局部相似性度量, 可从数据中捕获更多高阶信息. 不同于 MMSE 准则, MCC 对远离误差分布均值的样本以负指数形式衰减, 能够有效抑制异常值, 从而获得更准确的估计结果<sup>[16]</sup>. 相比于现有的鲁棒滤波方法, 如粒子滤波、高斯和滤波、M-估计方法等<sup>[17-20]</sup>, MCC 因其计算简单且易于实现, 已广泛应用于自适应滤波场景. 文献 [21] 首次将 MCC 引入滤波框架中, 但缺乏对系统不确定性的描述. 结合 MCC 和卡尔曼滤波器的优势, 文献 [22] 提出最大相关熵卡尔曼滤波器 (Maximum correntropy Kalman filter, MCKF), 其考虑了估计协方差. 为将文献 [22] 的结果推广到非线性的情况, 文献 [23-24] 提出最大相

关熵扩展卡尔曼滤波器 (Maximum correntropy EKF, MCCEKF) 和最大相关熵无迹卡尔曼滤波器 (Maximum correntropy UKF, MCCUKF), 以适用于非线性非高斯系统. 但是, 上述 MCC 类方法中使用的高斯核函数在性能上高度依赖于核带宽的选择, 限制算法在复杂场景中的准确性和适应性. 文献 [25] 扩展相似度的基本定义, 提出广义相关熵的概念, 将广义高斯密度函数作为相关熵的核函数, 不仅包含数据的高阶绝对矩信息, 还引入形状参数, 能够处理更多类型的数据分布. 通过将广义相关熵作为目标函数, 文献 [26-28] 提出一系列基于 GMCC 的自适应滤波算法, 既保留目标函数中的负指数项和核参数的阈值效应, 也能够调整相关熵的形状, 以更好地拟合非高斯噪声的分布<sup>[16]</sup>. 然而, 当前这些非高斯滤波方法难以直接应用于如位姿估计等状态演化在非线性流形上的系统.

为此, 本文提出基于最大广义相关熵的几何滤波方法 (Generalized maximum correntropy geometric filtering, GMCGF). 在 GMCGF 中, 首先基于流形无迹变换来设计状态预测. 其次, 将 GMCC 推广到流形空间构建由 GMCC 引出的流形非线性优化问题, 进而设计流形上的统计线性化方法以处理非线性函数. 同时, 利用黎曼流形优化将流形约束的优化问题转换为无约束优化问题, 再根据定点迭代法获得优化结果. 特别地, 针对广义相关熵中的核参数在实际中难以确定的问题, 设计核参数在线优化方法来提高方法的泛化性. 此外, 证明了本文方法具有可控的计算复杂度. 最后, 通过 INS/GNSS (Inertial navigation system/Global navigation satellite system) 组合导航系统的仿真结果验证了所提方法的有效性.

## 1 问题描述

考虑一类受非高斯噪声影响下的刚体位姿估计问题, 其中刚体的几何状态在矩阵李群上演化. 具体地, 系统的状态方程和观测方程描述如下:

$$\mathcal{X}_k = f(\mathcal{X}_{k-1}, u_k, w_k) \quad (1)$$

$$y_k = h(\mathcal{X}_k) + n_k \quad (2)$$

其中,  $\mathcal{X}_k \in \mathcal{G}$ ,  $u_k \in \mathbf{R}^d$  和  $y_k \in \mathbf{R}^r$  分别表示  $k$  时刻的系统状态, 输入信号和观测值;  $\mathcal{G} \in \mathbf{R}^{d \times d}$  表示矩阵李群, 是一种光滑可微流形, 其元素为可逆方阵. 过程噪声  $w_k \in \mathbf{R}^d$  和加性观测噪声  $n_k \in \mathbf{R}^r$  为零均值白噪声, 协方差矩阵分别为  $Q_k$  和  $R_k$ , 且  $w_k$  和  $n_k$  互不相关.  $f(\cdot)$  和  $h(\cdot)$  为群上的光滑非线性映射, 分别表示状态转移函数和观测函数.

对于三维空间中的位姿估计问题, 刚体的姿

态可由特殊正交群  $SO(3)$  描述, 定义为  $SO(3) = \{R \in \mathbf{R}^{3 \times 3} \mid RR^T = I, \det(R) = 1\}$ , 其中  $R$  表示将刚体坐标系转换到全局坐标系的旋转矩阵. 在此基础上, 位姿估计系统的完整状态可由矩阵李群  $SE_2(3)$  描述, 定义为

$$SE_2(3) = \left\{ \mathcal{X} = \begin{bmatrix} R & v & p \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & I_2 & \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} \mathcal{X} = (R, v, p) \\ R \in SO(3), v, p \in \mathbf{R}^3 \end{array} \right\} \quad (3)$$

其中,  $v, p$  分别表示刚体的速度和位置. 矩阵李群在群单位元处的切空间称为李代数空间. 具体地,  $SE_2(3)$  的李代数  $\mathfrak{se}_2(3)$  可定义为

$$\mathfrak{se}_2(3) = \left\{ \zeta^\wedge = \begin{bmatrix} (\phi)^\times & \eta_v & \eta_p \\ \mathbf{0}_{2 \times 5} & & \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} \zeta = [\phi, \eta_v, \eta_p]^T \\ \phi, \eta_v, \eta_p \in \mathbf{R}^3 \end{array} \right\} \quad (4)$$

其中,  $\phi$  表示旋转向量,  $(\cdot)^\wedge$  和  $(\cdot)^\times$  分别表示线性运算和斜对称矩阵. 李代数及其关联的向量空间之间的线性同构为  $(\cdot)^\wedge: \mathbf{R}^9 \rightarrow \mathfrak{se}_2(3)$  和  $(\cdot)^\vee: \mathfrak{se}_2(3) \rightarrow \mathbf{R}^9$ ; 矩阵李群及其李代数之间的映射关系为  $\exp(\cdot): \mathbf{R}^9 \rightarrow SE_2(3)$  和  $\log(\cdot): SE_2(3) \rightarrow \mathbf{R}^9$ .

由于矩阵李群为非欧氏空间, 对加法运算不封闭, 因此无法使用加性噪声的方式定义随机变量  $\mathcal{X} \in \mathcal{G}$  的概率分布. 现有研究通常将  $\mathcal{X}$  的概率分布  $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}_L(\hat{\mathcal{X}}, P)$  定义为

$$\mathcal{X} = \hat{\mathcal{X}} \exp(\xi) = \varphi_L(\hat{\mathcal{X}}, \xi), \quad \xi \sim \mathcal{N}(0, P) \quad (5)$$

其中,  $\hat{\mathcal{X}} \in \mathcal{G}$  表示无噪声均值;  $P \in \mathbf{R}^{d \times d}$  表示协方差矩阵;  $\xi \in \mathbf{R}^d$  表示不确定性扰动;  $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$  为欧氏空间上的高斯分布;  $\mathcal{N}_L(\cdot, \cdot)$  为矩阵李群上的集中高斯分布, 通过均值左乘高斯随机变量的指数定义. 类似地, 通过右乘定义集中高斯分布  $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}_R(\hat{\mathcal{X}}, P)$  为

$$\mathcal{X} = \exp(\xi) \hat{\mathcal{X}} = \varphi_R(\hat{\mathcal{X}}, \xi), \quad \xi \sim \mathcal{N}(0, P) \quad (6)$$

针对不同系统, 左乘和右乘运算的效果不同, 由系统模型决定. 为表示简便, 将式 (5) 和式 (6) 统一表示为  $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}_\varphi(\hat{\mathcal{X}}, P)$  或  $\mathcal{X} = \varphi(\hat{\mathcal{X}}, \xi)$ ,  $\xi \sim \mathcal{N}(0, P)$ ,  $\varphi(\cdot, \cdot)$  表示收缩映射. 此外, 定义  $\varphi(\cdot, \cdot)$  的逆映射为

$$\xi = \varphi^{-1}(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}) = \begin{cases} \log(\hat{\mathcal{X}}^{-1} \mathcal{X}), & \text{左乘} \\ \log(\mathcal{X} \hat{\mathcal{X}}^{-1}), & \text{右乘} \end{cases} \quad (7)$$

针对系统 (1) 和 (2), 根据系统的不确定性定义左不变估计误差和右不变估计误差, 分别为  $e_L = \exp(\xi) = \hat{\mathcal{X}}^{-1} \mathcal{X}$  和  $e_R = \mathcal{X}^{-1} \hat{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{X}$  和  $\hat{\mathcal{X}}$  分别表示状态真实值和估计值. 此外, 还要求系统的运动学具有群仿射性质, 使得系统的误差传播具有对数线性性质, 保证系统的局部收敛性<sup>[12]</sup>.

然而, 在实际应用中通常存在一些不可预测的扰动或异常值, 导致系统的噪声没有服从高斯分布, 从而引起滤波性能下降. 为提高方法的鲁棒性, 引入广义最大相关熵准则, 利用其中的局部相似性度量, 来有效抑制异常值. 对于任意两个标量随机变量  $x$  和  $y$ , 广义相关熵的定义为

$$V_{\alpha, \beta}(x, y) = E[G_{\alpha, \beta}(x, y)] \quad (8)$$

其中,  $G_{\alpha, \beta}(x, y)$  为广义核函数, 默认采用广义高斯函数, 定义为

$$G_{\alpha, \beta}(x, y) = \frac{\alpha}{2\beta\Gamma(1/\alpha)} \exp\left(-\left|\frac{e-\mu}{\beta}\right|^\alpha\right) = \tau_{\alpha, \beta} \exp(-\gamma|e-\mu|^\alpha) \quad (9)$$

其中,  $e = x - y$  表示误差变量,  $\Gamma(\cdot)$  表示伽马函数,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  分别表示形状参数和带宽参数,  $\mu$  表示误差均值向量, 本文考虑  $\mu = \mathbf{0}_{m \times 1}$ ,  $\tau_{\alpha, \beta} = \alpha/[2\beta\Gamma(1/\alpha)]$  表示归一化常数,  $\gamma = 1/\beta^\alpha$  表示核参数.

考虑误差向量  $e \in \mathbf{R}^m$ , 其协方差矩阵为  $P_e \in \mathbf{R}^{m \times m}$ , 对广义相关熵加权后作为系统目标函数, 定义为

$$J_{\text{GMCC}} = \omega G_{\alpha, \beta}(e) = \omega \tau_{\alpha, \beta} \exp\left(-\gamma \|e\|_{P_e}^\alpha\right) = \omega \tau_{\alpha, \beta} \exp\left(-\gamma |e^T P_e^{-1} e|^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (10)$$

其中,  $\omega$  为可调参数,  $\|e\|_{P_e}$  表示马氏距离, 且  $\|e\|_{P_e}^2 = e^T P_e^{-1} e$ .

**注 1.** 在引入最大广义相关熵准则后, 为获取状态估计值, 需要根据目标函数 (10) 求解非线性优化问题. 然而, 状态与误差变量  $e$  相关且在李群  $\mathcal{G}$  上演化, 使该优化问题受流形约束的限制, 表现为非凸优化. 直接使用欧氏空间上的优化方法通常无法保证收敛性, 且迭代点无法保持流形约束. 因此, 本文通过流形优化方法, 利用李群上的几何性质, 将流形约束的一般优化问题转换为流形上的无约束优化问题.

## 2 所提方法

针对非高斯噪声条件下滤波精度下降的问题, 本节首先设计广义最大相关熵准则下的矩阵李群后验分布的求解方法, 然后结合流形无迹变换形成一种基于广义最大相关熵准则的几何滤波方法.

### 2.1 广义最大相关熵准则的后验分布求解

假设观测  $y$  和状态先验概率分布  $p(\mathcal{X}) = \varphi(\hat{\mathcal{X}}, \hat{\xi})$ ,  $\hat{\xi} \sim \mathcal{N}(0, P)$  已知, 根据式 (10) 定义目标函数, 以同时处理非高斯过程噪声和观测噪声, 即

$$J(\mathcal{X}) = \omega G_{\alpha, \beta}(\|\hat{\xi}\|_P) + \omega G_{\alpha, \beta}(\|\tilde{y}\|_R) \quad (11)$$

其中,  $\hat{\xi} = \varphi^{-1}(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}})$  和  $\tilde{y} = y - h(\mathcal{X})$  分别表示预测误差和新息,  $\|\hat{\xi}\|_P$  表示马氏距离. 为表示简洁, 本节省略下标  $k$ . 通过最大化损失函数来求解状态均值的后验估计, 即求解

$$\hat{\mathcal{X}}^+ = \arg \max_{\mathcal{X} \in SE_2(3)} J(\mathcal{X}) \quad (12)$$

显然, 问题 (12) 为非线性优化问题, 其搜索空间为矩阵李群  $SE_2(3)$ . 由于  $SE_2(3)$  是一种黎曼流形  $\mathcal{M}$ , 对于问题 (12), 可采用黎曼流形梯度法求解<sup>[29-30]</sup>. 定义第  $l+1$  次迭代时的状态更新式为

$$\mathcal{X}^{l+1} = \varphi(\mathcal{X}^l, \xi^{l+\frac{1}{2}}) \quad (13)$$

其中,  $\mathcal{X}^{l+1}$  和  $\mathcal{X}^l$  分别表示第  $l+1$  次和第  $l$  次迭代的状态,  $\xi^{l+\frac{1}{2}} \in \mathbf{R}^d$  表示李代数增量. 此外, 定义状态误差为

$$\xi^{l+1} = \varphi^{-1}(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^{l+1}) \quad (14)$$

那么, 问题 (12) 可进一步描述为

$$\mathcal{X}^{l+1} = \arg \max_{\mathcal{X} \in SE_2(3)} \left[ \omega G_{\alpha, \beta}(\|\varphi^{-1}(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X})\|_P) + \omega G_{\alpha, \beta}(\|y - h(\mathcal{X})\|_R) \right] \quad (15)$$

为便于后续化简, 令权重参数  $\omega = 1/(\tau_{\alpha, \beta} \gamma \alpha)$ . 受流形约束和非线性函数影响, 问题 (15) 难以直接求解, 将由命题 1 引入统计线性化方法来处理非线性观测模型.

**命题 1 (矩阵李群上的统计线性化方法).** 给定非线性方程  $y = g(\mathcal{X})$ ,  $y \in \mathbf{R}^r$ , 若  $\mathcal{X} \in SE_2(3)$  服从集中高斯分布, 即  $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}_{\varphi}(\bar{\mathcal{X}}, P)$ ,  $\bar{\mathcal{X}}$  为无噪声均值,  $P$  为协方差矩阵, 则  $y = g(\mathcal{X})$  的线性化方程为

$$\hat{y} = \bar{y} + A\xi \quad (16)$$

其中,

$$\xi = \varphi^{-1}(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}}) \sim \mathbf{N}(0, P) \quad (17)$$

$$\bar{y} = \mathbf{E}(y) \quad (18)$$

$$A = \mathbf{E}(\xi y^T) P^{-1} \quad (19)$$

此外, 线性化误差的方差阵为

$$P_e = P_{yy} + APA^T - AP_{\xi y} - (AP_{\xi y})^T \quad (20)$$

其中,

$$P_{yy} = \mathbf{E}[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T] \quad (21)$$

$$P_{\xi y} = \mathbf{E}[\xi(y - \bar{y})^T] \quad (22)$$

证明过程见附录 A.

根据命题 1 对非线性观测模型 (2) 进行线性化, 可得第  $l+1$  次迭代时, 式 (2) 的线性化模型为

$$y \approx \hat{y}^l + H^l \xi + n^l \quad (23)$$

$$H^l = (\bar{P}_{\xi y}^l)^T P^{-1} \quad (24)$$

$$n^l \sim \mathbf{N}(0, R^l) \quad (25)$$

$$R^l = P_{yy}^l - H^l P (H^l)^T - H^l P_{\xi y}^l - (H^l P_{\xi y}^l)^T \quad (26)$$

其中,  $\hat{y}^l$  表示观测均值向量,  $H^l$  表示伪测量矩阵,  $n^l$  和  $R^l$  分别表示修正观测噪声及其协方差矩阵. 式 (24) 和式 (26) 中的矩阵参数  $P_{yy}^l$ ,  $P_{\xi y}^l$  和  $\bar{P}_{\xi y}^l$  由流形上的无迹变换生成. 具体来说, 先根据  $P^l$  生成  $2d+1$  个 sigma 点

$$\xi_j^l = \begin{cases} 0, & j = 0 \\ \text{col}(\sqrt{(d+\lambda)P^l})_j, & j = 1, \dots, d \\ -\text{col}(\sqrt{(d+\lambda)P^l})_j, & j = d+1, \dots, 2d \end{cases} \quad (27)$$

其中,  $(\cdot)_j$  表示第  $j$  列元素. 然后, 生成测量 sigma 点

$$y_0^l = h(\varphi(\mathcal{X}^l, 0)) \quad (28)$$

$$y_j^l = h(\varphi(\mathcal{X}^l, \xi_j^l)), \quad j = 1, \dots, 2d \quad (29)$$

由此可得

$$\hat{y}^l = W_0^m y_0^l + \sum_{j=1}^{2d} W_j^m y_j^l \quad (30)$$

$$P_{yy}^l = \sum_{j=1}^{2d} W_j^c (y_j^l - \hat{y}^l) (y_j^l - \hat{y}^l)^T + R \quad (31)$$

$$P_{\xi y}^l = \sum_{j=1}^{2d} W_j^c \xi_j^l (y_j^l - \hat{y}^l)^T \quad (32)$$

$$\bar{P}_{\xi y}^l = \sum_{j=1}^{2d} W_j^c \xi_j^l (y_j^l)^T \quad (33)$$

其中,  $W_j^m$  和  $W_j^c$  分别表示均值权重和协方差权重, 且  $W_0^m = \lambda/(d+\lambda)$ ,  $W_j^m = W_j^c = 1/(2(d+\lambda))$ ,  $j \neq 0$ ,  $\lambda$  表示比例校正因子.

**注 2.** 相较于传统的线性化技术, 统计线性化方法可避免计算雅克比矩阵, 减少线性化误差. 由式 (27) ~ (29) 可知, 伪测量矩阵  $H^l$  将根据当前估计  $\mathcal{X}^l$  和  $P^l$  进行调整, 以提高估计精度<sup>[31]</sup>.

根据线性化模型 (23) 可简化优化问题 (15), 然

而, 由于优化变量  $\mathcal{X}^{l+1}$  为矩阵, 增加了优化问题的复杂性. 由式 (13) 可知, 状态  $\mathcal{X}^{l+1}$  与迭代增量  $\xi^{l+\frac{1}{2}}$  之间存在指数关系, 通过调整优化变量以进一步简化问题 (15), 进而引入定理 1.

**定理 1.** 考虑由式 (1) 和式 (2) 给定的系统, 假如  $\xi^{l+\frac{1}{2}}$  和  $\xi^{l+1}$  分别满足式 (13) 和式 (14), 且伪测量矩阵  $H^l$  和修正协方差矩阵  $R^l$  由式 (24) ~ (26) 给出,  $\xi^{l+\frac{1}{2}}$  为微元小量, 那么问题 (15) 的替代目标函数为

$$\xi^{l+\frac{1}{2}} = \arg \max_{\xi \in \mathbf{R}^d} \left[ \omega G_{\alpha, \beta} (\|\xi^l + \mathcal{J}_l^{-1} \xi\|_P) + \omega G_{\alpha, \beta} (\|\hat{y}^l - H^l \xi\|_{R^l}) \right] \quad (34)$$

且式 (34) 的解为

$$\xi^{l+\frac{1}{2}} = \left( \mathcal{J}_l^{-T} G_{\text{pre}}^l P^{-1} \mathcal{J}_l^{-1} + (H^l)^T \times G_{\text{mea}}^l (R^l)^{-1} H^l \right)^{-1} \times \left( -\mathcal{J}_l^{-T} G_{\text{pre}}^l P^{-1} \xi^l + (H^l)^T G_{\text{mea}}^l (R^l)^{-1} \hat{y}^l \right) \quad (35)$$

其中,

$$\hat{y}^l = y - \hat{y}^l \quad (36)$$

$$G_{\text{pre}}^l = \exp \left( -\gamma \|\bar{\xi}^l\|_P^\alpha \right) \left\| \bar{\xi}^l \right\|_P^{\frac{\alpha}{2}-2} \|\bar{\xi}^l\|_P^2 \quad (37)$$

$$G_{\text{mea}}^l = \exp \left( -\gamma \|\hat{y}^l\|_{R^l}^\alpha \right) \left\| \hat{y}^l \right\|_{R^l}^{\frac{\alpha}{2}-2} \|\hat{y}^l\|_{R^l}^2 \quad (38)$$

$$\bar{\xi}^l = \xi^l + \mathcal{J}_l^{-1} \xi \quad (39)$$

$$\hat{y}^l = \hat{y}^l - H^l \xi \quad (40)$$

$$\mathcal{J}_l^{-1} = \begin{cases} \frac{\text{ad}(\xi^l)^\wedge}{\exp(\text{ad}(\xi^l)^\wedge) - I}, & \text{左乘} \\ \frac{\text{ad}(\xi^l)^\wedge}{-\exp(-\text{ad}(\xi^l)^\wedge) + I}, & \text{右乘} \end{cases} \quad (41)$$

式中,  $\mathcal{J}_l$  表示  $SE_2(3)$  的雅克比矩阵,  $\text{ad}(\cdot)$  表示伴随映射,  $I$  表示单位矩阵.

证明过程见附录 B.

由式 (34) 可知, 定理 1 将式 (15) 中目标函数的优化变量由矩阵李群状态  $\mathcal{X}^{l+1} \in SE_2(3)$  转化为李代数增量  $\xi^{l+\frac{1}{2}} \in \mathbf{R}^d$ , 在简化优化问题的同时也减小计算负担.

根据定理 1 的结果, 式 (35) 是关于  $\xi$  的定点方程, 进一步引入定点迭代方法来求解问题 (34).  $G_{\text{pre}}^l$  和  $G_{\text{mea}}^l$  作为关于  $\xi$  的变量, 在每次迭代过程中进行更新, 用式 (42) 替代式 (39) 和式 (40), 即

$$\bar{\xi}^l = \varphi^{-1}(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^l) \quad (42)$$

$$\hat{y}^l = \hat{y}^l - H^l \xi^l \quad (43)$$

采用定点迭代方法并结合式 (13)、(14) 和 (35), 可得后验均值更新式, 由此引出命题 2.

**命题 2.** 对于式 (1) 和式 (2), 假设系统的状态预测值  $\hat{\mathcal{X}}$ 、预测协方差矩阵  $P$  和误差  $\hat{y}^l$  均已知,  $H^l$  和  $R^l$  由式 (24) ~ (26) 给出, 则广义最大相关熵准则下状态的次优估计为

$$\mathcal{X}^{l+1} = \varphi \left( \hat{\mathcal{X}}, K^l (\hat{y}^l + H^l \xi^l) \right) \quad (44)$$

其中,

$$\xi^l = \varphi^{-1}(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^l) \quad (45)$$

$$K^l = \mathcal{J}_l^{-1} \left( \mathcal{J}_l^{-T} G_{\text{pre}}^l P^{-1} \mathcal{J}_l^{-1} + G_{\text{mea}}^l (H^l)^T \times (R^l)^{-1} H^l \right)^{-1} G_{\text{mea}}^l (H^l)^T (R^l)^{-1} \quad (46)$$

式中,  $K^l$  表示卡尔曼增益矩阵, 其等价形式为

$$K^l = P (G_{\text{pre}}^l)^{-1} \mathcal{J}_l^{-T} G_{\text{mea}}^l (H^l)^T \left( R^l + H^l \mathcal{J}_l^{-1} \times P (G_{\text{pre}}^l)^{-1} \mathcal{J}_l^{-T} G_{\text{mea}}^l (H^l)^T \right)^{-1} \quad (47)$$

当  $[\xi^l, \xi^{l+\frac{1}{2}}] = 0$  时, 式 (44) 为最优状态估计值, 其中,  $[\cdot, \cdot]$  表示李括号, 且  $\mathcal{J}_l^{-1} = I$ . 假设在第  $l^* + 1$  次迭代后收敛, 根据式 (44), 状态后验均值可更新为

$$\hat{\mathcal{X}}^+ = \varphi \left( \hat{\mathcal{X}}, K^{l^*} \left( \hat{y}^{l^*} + H^{l^*} \xi^{l^*} \right) \right) \quad (48)$$

证明过程见附录 C.

由式 (48) 可得状态均值的后验估计, 为求解后验误差协方差矩阵, 根据定理 1 的结果, 结合高斯-拉普拉斯近似方法<sup>[32]</sup>, 可得

$$P^{l+1} = \left( \mathcal{J}_l^{-T} G_{\text{pre}}^l P^{-1} \mathcal{J}_l^{-1} + (H^l)^T G_{\text{mea}}^l (R^l)^{-1} H^l \right)^{-1} = \mathcal{J}_l P (G_{\text{pre}}^l)^{-1} \mathcal{J}_l^T - \mathcal{J}_l \mathcal{J}_l^{-1} \left( \mathcal{J}_l^{-T} G_{\text{pre}}^l P^{-1} \times \mathcal{J}_l^{-1} + (H^l)^T G_{\text{mea}}^l (R^l)^{-1} H^l \right)^{-1} (H^l)^T \times G_{\text{mea}}^l (R^l)^{-1} \times H^l \mathcal{J}_l P (G_{\text{pre}}^l)^{-1} \mathcal{J}_l^T = \mathcal{J}_l (I - K^l H^l \mathcal{J}_l) P (G_{\text{pre}}^l)^{-1} \mathcal{J}_l^T \quad (49)$$

**注 3.** 虽然基于广义相关熵设计的滤波器能够有效抑制非高斯噪声产生的不利影响, 但是此类方法缺乏估计误差协方差矩阵建立的理论基础, 导致估计精度下降<sup>[33]</sup>. 为此, 与卡尔曼滤波的后验分布求解方法不同, 本文根据高斯-拉普拉斯近似方法,

用集中高斯分布来拟合后验分布, 以得到协方差矩阵的近似值.

当  $\|\varphi^{-1}(\mathcal{X}^l, \mathcal{X}^{l+1})\| / \|\varphi^{-1}(I, \mathcal{X}^l)\| \leq \varepsilon$  成立时中止迭代, 其中,  $\varepsilon$  为预设的阈值参数, 且  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . 为提高算法的灵活性和鲁棒性, 针对式 (37) 和式 (38) 中的固定核参数  $\gamma$ , 设计一种核参数在线优化方法, 优化模型为

$$\gamma^l = \arg \max_{\gamma \in \mathcal{R}} \left[ \omega_{\tau\alpha, \beta} \exp \left( -\gamma |e_d^l|^{\frac{\alpha}{2}} \right) + \omega_{\tau\alpha, \beta} \exp \left( -\gamma |e_r^l|^{\frac{\alpha}{2}} \right) \right] \quad (50)$$

其中,  $\mathcal{R}$  表示  $\gamma$  的可行集,  $e_d^l = \|\xi^l\|_P^2$ ,  $e_r^l = \|\bar{y}^l\|_{R^l}^2$ .

为提高方法的可行性, 采用梯度下降法求解问题 (50), 可得

$$\gamma^{l+1} = \gamma^l + \eta_{\gamma} \left[ |e_d^l|^{\frac{\alpha}{2}} \exp \left( -\gamma^l |e_d^l|^{\frac{\alpha}{2}} \right) + |e_r^l|^{\frac{\alpha}{2}} \exp \left( -\gamma^l |e_r^l|^{\frac{\alpha}{2}} \right) \right] \quad (51)$$

其中,  $\mu_{\gamma} \in \mathbf{R}$ ,  $\eta_{\gamma} = \mu_{\gamma} \omega_{\tau\alpha, \beta}$  表示步长参数.

**注 4.** 作为自由参数, 核带宽控制着评估相似性的观察窗口, 对滤波方法的收敛速度和稳态误差有显著影响<sup>[34]</sup>. 通常情况下, 式 (37) 和式 (38) 中预设的核参数  $\gamma$  需要进行多次调整, 在一定程度上限制了算法的性能<sup>[23, 35]</sup>. 不同于文献 [26–28], 本文通过式 (51) 自动更新核参数, 从而更好地权衡算法的收敛速度和稳态误差.

综上, 迭代更新过程如图 1 所示, 图中  $\mathcal{G}$  表示矩阵李群空间,  $\mathbf{R}^d$  表示  $\mathcal{G}$  在各点处的切空间. 广义最大相关熵准则下的后验分布求解可总结为算法 1.

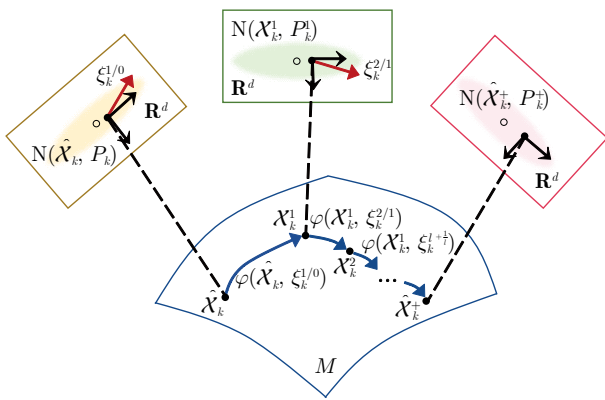


图 1 迭代更新过程示意图

Fig. 1 Illustration of the iterative updating process

**算法 1.** 基于广义最大相关熵准则的后验分布求解

- 1) 输入:  $\hat{\mathcal{X}}, P, y, R$ ;
- 2)  $l \leftarrow 0$ ;
- 3) **while**  $\frac{\|\varphi^{-1}(\mathcal{X}^l, \mathcal{X}^{l+1})\|}{\|\varphi^{-1}(I, \mathcal{X}^l)\|} \leq \varepsilon$  **do**
- 4) 由式 (23) ~ (33) 计算  $H^l$  和  $R^l$ ;
- 5) 由式 (36) ~ (43) 和式 (47) 计算  $K^l$ ;
- 6) 由式 (44) 和式 (49) 计算  $\mathcal{X}^{l+1}$  和  $P^{l+1}$ ;
- 7) 由式 (51) 计算  $\gamma^{l+1}$ ;
- 8)  $l \leftarrow l + 1$ ;
- 9) **end while**
- 10)  $\hat{\mathcal{X}}^+ \leftarrow \mathcal{X}^{l+1}$ ;
- 11)  $P^+ \leftarrow P^{l+1}$ ;
- 12) 输出:  $\hat{\mathcal{X}}^+, P^+$ .

## 2.2 基于广义最大相关熵准则的几何滤波算法

将上述最大广义相关熵准则下的后验分布求解方法应用于矩阵李群系统. 考虑式 (1) 和式 (2), 首先, 初始化状态和协方差矩阵分别为  $\hat{\mathcal{X}}_0 = \mathbf{E}(\mathcal{X}_0)$  和  $P_0$ . 然后, 根据  $k-1$  时刻状态的后验分布  $\mathcal{X}_{k-1} = \varphi(\hat{\mathcal{X}}_{k-1}^+, \xi_{k-1}^+)$ ,  $\xi_{k-1}^+ \sim \mathcal{N}(0, P_{k-1}^+)$ , 基于状态传播方程传播状态, 得到  $k$  时刻状态均值的先验估计, 即

$$\hat{\mathcal{X}}_k = f \left( \hat{\mathcal{X}}_{k-1}^+, u_k, 0 \right) \quad (52)$$

同时对  $P_{k-1}$  和  $Q_k$  进行确定性采样来获得 sigma 点

$$\xi_{k-1, j} = \begin{cases} \text{col} \left( \sqrt{(d+\lambda)P_{k-1}^+} \right)_j, & j = 1, \dots, d \\ -\text{col} \left( \sqrt{(d+\lambda)P_{k-1}^+} \right)_j, & j = d+1, \dots, 2d \end{cases} \quad (53)$$

$$w_{k, j} = \begin{cases} \text{col} \left( \sqrt{(d+\lambda)Q_k} \right)_j, & j = 1, \dots, d \\ -\text{col} \left( \sqrt{(d+\lambda)Q_k} \right)_j, & j = d+1, \dots, 2d \end{cases} \quad (54)$$

然后, 根据式 (55) 和式 (56) 计算先验协方差矩阵

$$\{\mathcal{X}_{k, j}\}_{j=1}^{2d} = f \left( \varphi \left( \hat{\mathcal{X}}_{k-1}^+, \xi_{k-1, j} \right), u_k, 0 \right) \quad (55)$$

$$\{\bar{\mathcal{X}}_{k, j}\}_{j=1}^{2d} = f \left( \hat{\mathcal{X}}_{k-1}^+, u_k, w_{k, j} \right) \quad (56)$$

$$P_k = \sum_{j=1}^{2d} \left[ W_j^c \varphi^{-1} \left( \hat{\mathcal{X}}_k, \mathcal{X}_{k, j} \right) \varphi^{-T} \left( \hat{\mathcal{X}}_k, \mathcal{X}_{k, j} \right) + W_j^c \varphi^{-1} \left( \hat{\mathcal{X}}_k, \bar{\mathcal{X}}_{k, j} \right) \varphi^{-T} \left( \hat{\mathcal{X}}_k, \bar{\mathcal{X}}_{k, j} \right) \right] \quad (57)$$

由式 (52) 和式 (57) 可得状态的先验分布为

$$p(\mathcal{X}_k | \mathcal{X}_{k-1}) \sim \mathcal{N}_{\varphi}(\hat{\mathcal{X}}_k, P_k) \quad (58)$$

上述过程与标准 UKF 的预测步具有相同的功能,同时保留状态的几何约束.当接收到新的测量值时,通过算法 1 来更新预测状态,从而获得状态均值和协方差矩阵的后验估计.所提方法的完整步骤如算法 2 所示,所提方法的框图如图 2 所示.

**算法 2. 基于广义最大相关熵的几何滤波方法**

- 1) 输入: 初始化  $\hat{\mathcal{X}}_0, P_0, \gamma^0, \varepsilon$ ;
- 2) 预测步
- 3) 由式 (52) 计算  $\hat{\mathcal{X}}_k$ ;
- 4) 由式 (53) 和式 (54) 计算  $\{\xi_{k-1, j}\}_{j=1}^{2d}$  和  $\{w_{k, j}\}_{j=1}^{2d}$ ;
- 5) 由式 (55) ~ (57) 计算  $P_k$ ;
- 6) 更新步
- 7) 如果接收到测量值, 将  $\hat{\mathcal{X}}_k$  和  $P_k$  输入算法 1, 并执行算法 1;
- 8) 输出:  $\hat{\mathcal{X}}_k^+, P_k^+$ .

**注 5.** 利用 UKF-M (UKF on manifold)<sup>[36]</sup> 框架进行状态预测具有以下优势: 1) 由式 (52) 可知, 所提方法直接使用无噪声模型预测状态均值, 相较于文献 [37] 通过求解矩阵李群上的优化问题来获得预测值, 显然所提方法的实现更简单; 2) 由式 (53) 可知, sigma 点位于向量空间  $\mathbf{R}^d$ , 可通过收缩映射  $\varphi(\cdot, \cdot)$  回到矩阵李群空间上, 使该方法便于使用欧氏空间中的数学工具; 3) 基于  $\xi_{k-1}$  和  $w_k$  不相关的假设, 式 (55) 和式 (56) 分别传播状态不确定度和输入变量, 解决了预测噪声协方差矩阵难以计算的问题, 本质上消除了矩阵超参数<sup>[38]</sup>, 使算法更加鲁棒.

**2.3 计算复杂度分析**

通过分析浮点操作数的数量可知, 所提 GMCGF 中每个操作的计算复杂度上界为  $O(12d^3)$ ,  $d$  表示状态的维度. 本文方法与 UKF-M 在渐近意义下的计

算复杂度相同, 均为  $O(d^3)$ . 特别地, 当平均迭代次数为  $L$  时, 算法 2 表明 GMCGF 相较于 UKF-M 的额外计算成本主要产生于更新步骤, 所提方法的计算负担增量为

$$C_{\text{add}} = C_{H_k^l} + C_{R_k^l} + C_{\mathcal{X}_k^{l+1}} + C_{P_k^{l+1}} + C_{K_k^l} - C_{K_k^{\text{UKF-M}}} - C_{\hat{\mathcal{X}}_k^+} - C_{P_k^+} = L(9d^3 + 12d^2r + 2dr^2 + r^3 + d^2 + dr + 3r^2 + d + r - 2 + 2C_{\text{exp}} + C_h + C_\varphi) \quad (59)$$

其中,  $d$  和  $r$  分别表示状态维度和观测维度,  $C_{\text{exp}}$ 、 $C_h$  和  $C_\varphi$  分别表示指数函数作用于标量、观测函数作用于自变量以及收缩映射的计算复杂度.

考虑到测量维度通常远小于状态维度, 即  $r \ll d$ , 式 (59) 可简化为

$$C_{\text{add}} \approx L(9d^3 + 12d^2r + 2dr^2 + d^2 + dr + d + 2C_{\text{exp}} + C_h + C_\varphi) \quad (60)$$

值得注意的是, 虽然 GMCGF 引入额外计算项, 但仍与 UKF-M 具有相同的渐近复杂度. 并且, 当系统受到显著干扰时, 算法稳定性和估计精度的提升通常优先于计算成本的考量, 此时 GMCGF 可作为 UKF-M 的有效替代方案.

**注 6.** 尽管使用迭代方法求解优化问题会增加计算负担, 但实际应用中定点迭代次数  $L$  通常较小, 文献 [24, 39] 表明, 通常只需 1 次迭代即可满足性能需求. 因此, 所提方法的计算复杂度是可控的.

**3 仿真验证**

本节采用基于惯性导航系统 (Inertial navigation system, INS) 和全球导航卫星系统 (Global

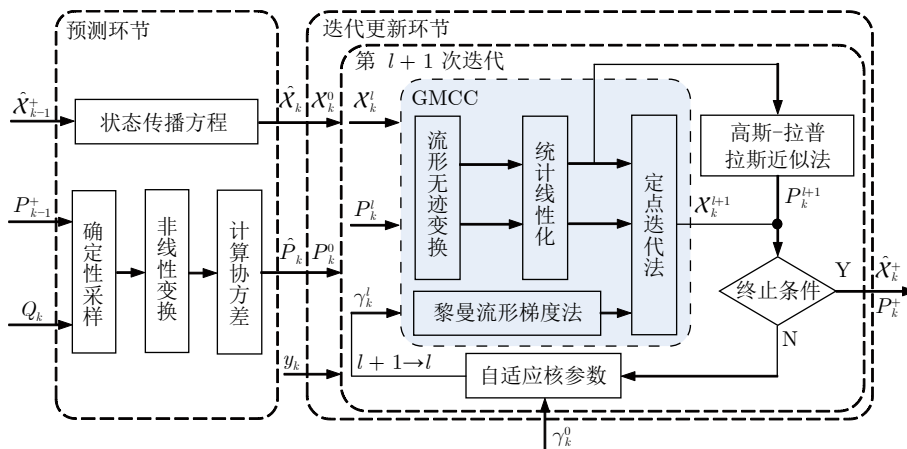


图 2 方法框图

Fig.2 Method block diagram

navigation satellite system, GNSS) 的 3D 车辆导航系统进行仿真.

### 3.1 场景限制

考虑车辆离散非线性运动学模型<sup>[40]</sup>为

$$R_k = R_{k-1} \exp((\omega_k - w_k^\omega - b_k^\omega) dt) \quad (61)$$

$$v_k = v_{k-1} + (g + R_{k-1}(a_k - w_k^a - b_k^a)) dt \quad (62)$$

$$p_k = p_{k-1} + v_{k-1} dt \quad (63)$$

$$b_k^\omega = b_{k-1}^\omega + w_k^{b\omega} \quad (64)$$

$$b_k^a = b_{k-1}^a + w_k^{ba} \quad (65)$$

观测数据由 GNSS 接收器提供, 且测量模型为

$$y_k = p_k + n_k \quad (66)$$

其中,  $R_k \in SO(3)$  表示  $k$  时刻车辆的方向 (将车身坐标系映射到导航坐标系的旋转矩阵);  $v_k \in \mathbf{R}^3$  和  $p_k \in \mathbf{R}^3$  分别表示车辆在导航坐标系中的速度和位置; 输入向量  $\omega_k, a_k \in \mathbf{R}^3$  分别表示角速度和加速度;  $b_k^\omega, b_k^a \in \mathbf{R}^3$  表示惯性测量单元 (Inertial measurement unit, IMU) 偏置;  $w_k^\omega, w_k^a \in \mathbf{R}^3$  分别表示相互独立的 IMU 传感器噪声;  $w_k^{b\omega}, w_k^{ba} \in \mathbf{R}^3$  表示偏置噪声, 它们都是零均值的高斯白噪声;  $dt$  表示采样周期;  $y_k \in \mathbf{R}^3$  表示观测值;  $n_k \in \mathbf{R}^3$  表示观测噪声;  $g = [0; 0; -9.81] \text{ m/s}^2$  为重力加速度向量. 将 IMU 状态表示为  $x_k = (\mathcal{X}_k, b_k)$ , 其中,  $\mathcal{X}_k = (R_k, v_k, p_k) \in SE_2(3)$ ,  $b_k = [b_k^\omega; b_k^a] \in \mathbf{R}^6$ .

在以下仿真中, 假设车辆在半径 15 m 的圆上持续运行 60 s. 令车辆方向、位置和速度的初始误差标准差分别为  $(\pi/180) I_{3 \times 1} \text{ rad}$ ,  $0.1 I_{3 \times 1} \text{ m}$  和  $0.1 I_{3 \times 1} \text{ m/s}$ , IMU 偏置恒为  $b_k = 0_{6 \times 1}$ . 除非特殊说明, IMU 传感器噪声为高斯白噪声, 服从  $w_k^\omega \sim N(0, 10^{-2} I_3 (\text{rad/s})^2)$ ,  $w_k^a \sim N(0, 10^{-2} I_3 (\text{m/s}^2)^2)$ . 观测噪声  $n_k$  为非高斯噪声,  $R_k \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  表示其主体部分的协方差, 并假设过程噪声和观测噪声不相关. 定义观测噪声的模型为  $n_k = (1 - q_k)A_k + q_k B_k$ , 其中,  $q_k$  遵循概率质量函数为  $P(q_k = 1) = c$ ,  $P(q_k = 0) = 1 - c$  的伯努利分布,  $0 < c < 1$  表示事件发生的概率.  $A_k$  和  $B_k$  表示两个独立的噪声分布, 且都独立于  $q_k$ .  $B_k$  为具有较大协方差的高斯白噪声, 并考虑 3 种不同分布的  $A_k$ : 高斯分布、拉普拉斯分布和伯努利分布<sup>[21]</sup>. 令初始状态协方差矩阵为  $P_0 = 0_{5 \times 5}$ , 迭代终止阈值为  $\varepsilon = 10^{-8}$ . 为确保结论的全面性, 在不同噪声场景下对 EKF、InEKF<sup>[10]</sup>、UKF-M<sup>[30]</sup>、不同核带宽下的 MCEKF-LG<sup>[19]</sup> 以及 GMC GF 进行测试和比较. 所有测试结果都是在相

同初始条件下运行 500 次独立的蒙特卡洛模拟获得的, 以保证对比实验的公平性和数据的可靠性.

采用每个时刻  $k$  处位置和方向的均方根误差 (Root mean square error, RMSE) 和所有时刻的平均均方根误差 (Average root mean square error, ARMSE) 作为性能指标评估测试结果, 定义为

$$RMSE_k^{\text{pos}} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|p_k^i - \hat{p}_k^i\|^2} \quad (67)$$

$$ARMSE_k^{\text{pos}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K RMSE_k^{\text{pos}} \quad (68)$$

其中,  $M$  表示蒙特卡洛模拟总数,  $K$  表示样本总数,  $i$  表示第  $i$  次独立蒙特卡洛模拟,  $\|\cdot\|$  表示欧几里得范数,  $p_k = (p_{k,x}, p_{k,y}, p_{k,z})$  和  $\hat{p}_k = (\hat{p}_{k,x}, \hat{p}_{k,y}, \hat{p}_{k,z})$  分别表示位置的真实值和估计值. 方向 RMSE 和 ARMSE 的定义与位置的定义类似.

### 3.2 结果与分析

情况 1.  $A_k$  服从高斯分布

1) 首先考虑观测噪声服从高斯噪声混合的情况, 令  $n_k^S \sim 0.8N(0, W_k) + 0.2N(0, 100W_k)$ , 其中  $W_k = 0.2^2 I_3 \text{ m}^2$ . 车辆的三维运动轨迹如图 3 所示, 且位置和方向上的 RMSE 如图 4 所示, 表 1 列出了不同方法的 ARMSE. 根据仿真结果, GMC GF 相比于 UKF-M 方法在位置和方向的 ARMSE 上分别减少 35.4% 和 19.0%, 并且基于 MCC 或 GMCC 的滤波器抗干扰能力优于基于 MMSE 准则的滤波器. 从表 1 可以看出, 由于应用自适应核参数并考虑李群结构, 所提方法可以将 ARMSE 保持在较低的范围, 具有最小的估计误差. 此外, 如文献 [28] 所述, 基于 MCC 的方法对核带宽高度敏感, 过大或过小的值都无法满足精度或稳定性要求.

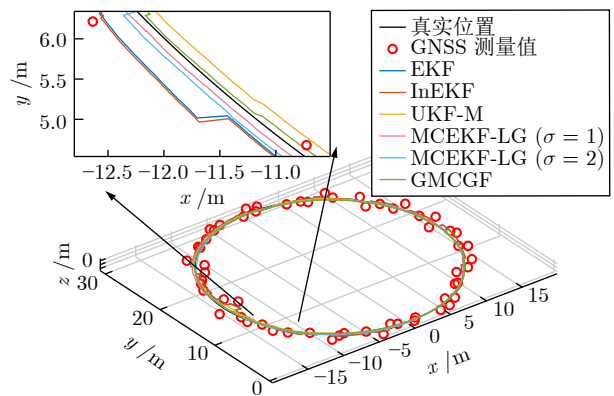


图 3 混合高斯噪声  $n_k^S$  下的运动轨迹  
Fig. 3 Motion trajectory under mixture Gaussian noise  $n_k^S$

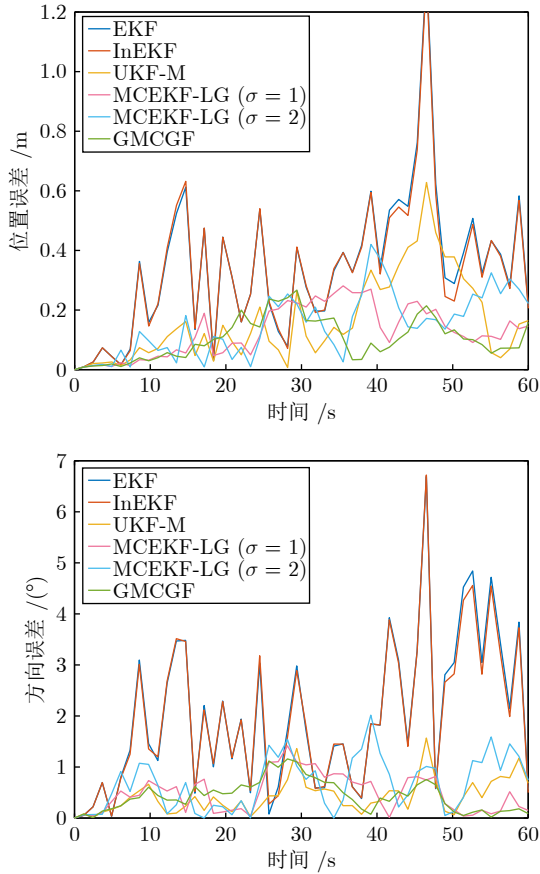


图 4 混合高斯噪声  $n_k^S$  下位姿估计的 RMSE  
Fig.4 RMSE of pose estimation under mixture Gaussian noise  $n_k^S$

表 1 混合高斯噪声  $n_k^S$  下位姿估计的 ARMSE  
Table 1 ARMSE for pose estimation under mixture Gaussian noise  $n_k^S$

方法	核参数	位置 ARMSE (m)	方向 ARMSE (°)
EKF	-	0.3238	1.8220
lnEKF	-	0.3176	1.7876
UKF-M	-	0.1631	0.4526
MCEKF-LG	$\sigma = 1.0$	0.1285	0.4756
	$\sigma = 2.0$	0.1478	0.6531
	$\sigma = 2.5$	0.2337	0.8422
	$\sigma = 4.0$	0.3980	1.2834
GMCGF	自适应	<b>0.1053</b>	<b>0.3667</b>

注: 加粗字体表示各误差指标的最优值.

2) 为进一步证明所提方法的鲁棒性, 假设观测系统受到较大脉冲噪声的干扰, 将混合高斯测量噪声描述为  $n_k^L \sim 0.5N(0, W_k) + 0.5N(0, 100W_k)$ , 其中,  $W_k = 0.5^2 I_3 \text{ m}^2$ . 图 5 和图 6 分别给出不同方法下的车辆运动轨迹和 RMSE, 可以看出所提方法仍具有最佳估计性能. 此外, 表 2 给出 ARMSE 结果, 相比于 UKF-M, GMCGF 在位置和方向上的估计

精度分别提高 81.1% 和 69.4%, 表明所提方法能够有效减少定位误差. 值得注意的是, 当观测噪声变大时, 基于 MCC 的滤波器在较小核带宽下对异常值更敏感, 因此不得不增加核带宽  $\sigma$  以保持滤波器收敛, 但会导致估计精度下降, 相比之下, 所提方法通过自适应核参数以保持鲁棒.

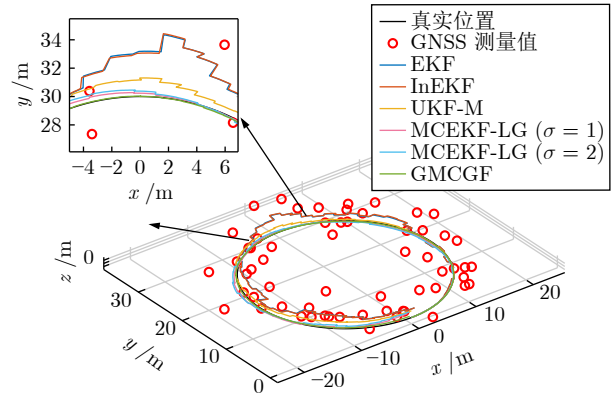


图 5 混合高斯噪声  $n_k^L$  下的运动轨迹  
Fig.5 Motion trajectory under mixture Gaussian noise  $n_k^L$

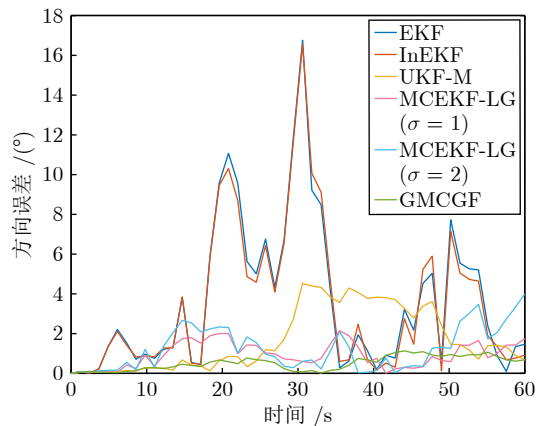
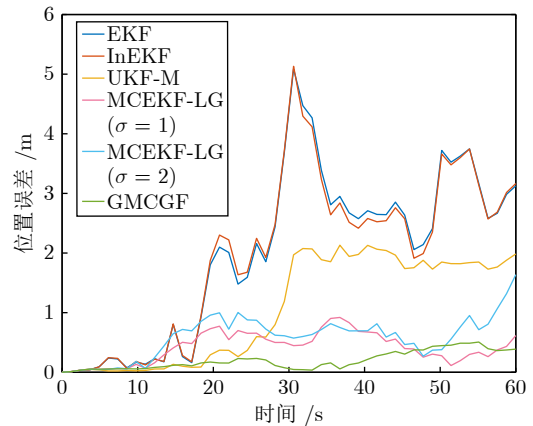


图 6 混合高斯噪声  $n_k^L$  下位姿估计的 RMSE  
Fig.6 RMSE of pose estimation under mixture Gaussian noise  $n_k^L$

表 2 混合高斯噪声  $n_k^L$  下位姿估计的 ARMSE  
Table 2 ARMSE for pose estimation under mixture Gaussian noise  $n_k^L$

方法	核参数	位置 ARMSE (m)	方向 ARMSE ( $^\circ$ )
EKF	-	2.0361	3.6154
InEKF	-	2.0174	3.5294
UKF-M	-	1.0913	1.7074
MCEKF-LG	$\sigma = 1.0$	0.4311	0.9568
	$\sigma = 2.0$	0.6099	1.2834
	$\sigma = 2.5$	0.8296	1.5069
GMC GF	$\sigma = 4.0$	1.1042	1.7246
	自适应	<b>0.2060</b>	<b>0.5214</b>

### 情况 2. $A_k$ 服从拉普拉斯分布

考虑测量噪声遵循带有异常值的拉普拉斯分布, 即  $n_k \sim 0.9N(0, 0.2^2 I_3 \text{ m}^2) + 0.1Laplace(0, 1)$ , 其中,  $Laplace(0, 1)$  表示从零均值和标度 1 的拉普拉斯分布中提取的噪声. 从图 7 可以看出, 所提 GMC GF 获得的结果优于其他方法. 这可以归因于广义相关熵抑制异常值的能力以及可变核参数的自适应能力.

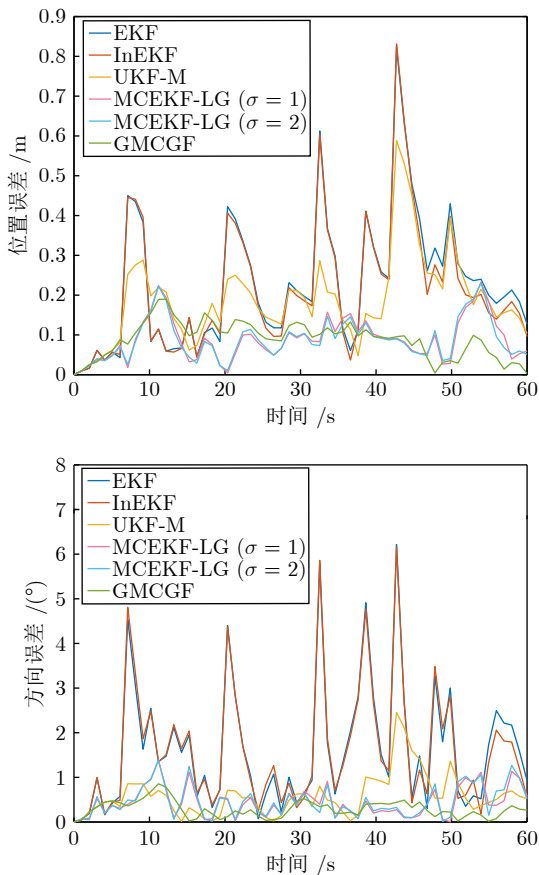


图 7 拉普拉斯分布非高斯噪声下位姿估计的 RMSE  
Fig.7 RMSE of pose estimation under Laplace distributed non-Gaussian noise

### 情况 3. $A_k$ 服从伯努利分布

考虑测量噪声遵循  $\{-1, 1\}$  上的伯努利分布, 即  $n_k \sim 0.9N(0, 0.1^2 I_3 \text{ m}^2) + 0.1B(0.5)$ , 其中,  $B(0.5)$  表示在  $\{-1, 1\}$  上的伯努利分布. 图 8 表明, 基于 MMSE 准则的滤波方法表现出较大的估计误差, 特别就位置 RMSE 而言. 相比之下, 基于相关熵的方法表现出较低且波动较小的误差曲线. 可以看出, 所提方法具有最高的滤波精度.

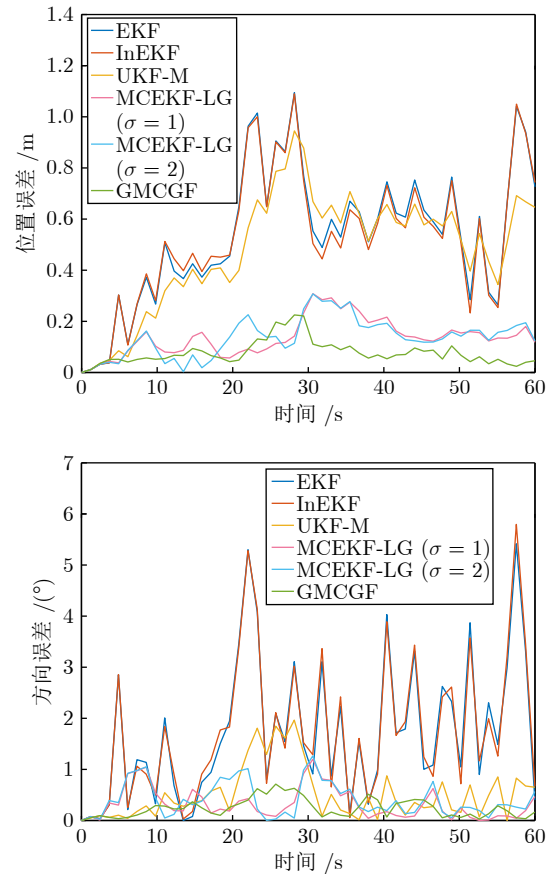


图 8 伯努利分布非高斯噪声下位姿估计的 RMSE  
Fig.8 RMSE of pose estimation under Bernoulli distribution non-Gaussian noise

### 情况 4. $n_k$ 服从高斯分布

最后, 考虑测量噪声  $n_k$  服从高斯分布  $n_k \sim N(0, 0.1^2 I_3 \text{ m}^2)$ . 图 9 展示了各算法的位姿 RMSE, 可以看出, GMC GF 的性能总体上与 UKF-M 相似, 且位姿估计的准确度仍优于其他方法.

此外, 表 3 给出了 5 种滤波算法的单步执行时间. 正如第 2.3 节所分析, 由于 GMC GF 在更新步骤中需要迭代求解, 相比于 UKF-M 需要更长的执行时间, 然而, 增加的时间在合理范围内, 表明所提方法保证了高精度要求下计算成本的可控性. 所有实验均在 Intel Core i5-9300H (2.40 GHz) 处理器

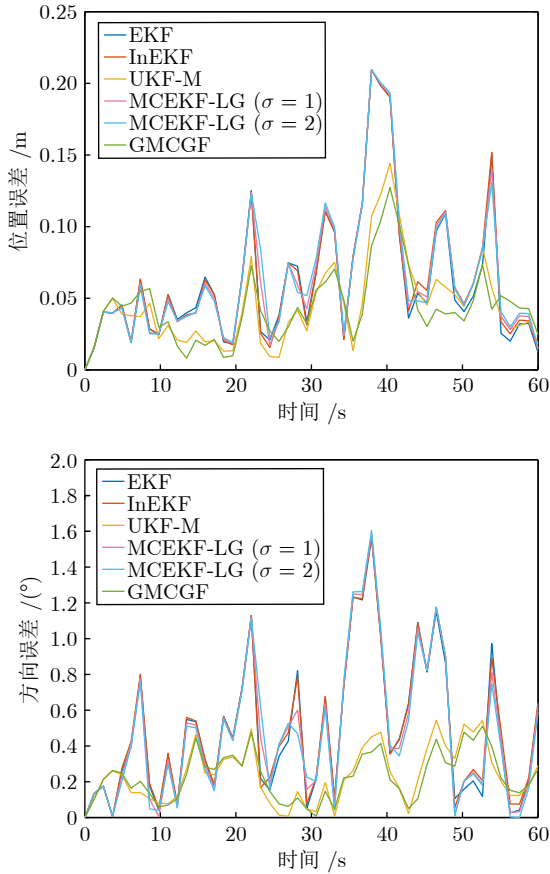


图9 高斯噪声下位姿估计的 RMSE

Fig.9 RMSE of pose estimation under Gaussian noise

表3 滤波方法的单步执行时间

Table 3 Single step execution time of filtering methods

方法	执行时间 (ms)
EKF	0.1917
lnEKF	0.2407
UKF-M	0.5043
MCEKF-LG	0.8994
GMCGF	1.0178

和 MATLAB R2023b 环境下运行, 以保证实验结果的稳定性和可靠性.

综上, 相较于 UKF-M 和 MCEKF-LG, GMCGF 实现了较高的滤波精度, 特别是在观测条件较差的情况下, 无需手动调整核参数也能表现出良好的估计性能, 表明 GMCGF 的优势源于广义相关熵以及自适应核参数在各种非高斯噪声分布下的适用性, 使其更加适用于现实环境中噪声统计特性未知的情况.

#### 4 结束语

针对矩阵李群上的非线性非高斯系统, 本文提

出一种自适应的几何滤波方法. 该方法充分利用广义相关熵能够抑制非高斯噪声的优势, 同时兼顾矩阵李群的几何结构. 此外, 本文分析了所提方法的计算复杂度, 并与 UKF-M 进行比较. 多组仿真结果验证了所提方法在不同噪声场景下的鲁棒性, 即使在观测数据质量较差的情况下, 仍可获得理想的估计结果.

#### 附录 A 命题 1 的证明

证明. 给定  $y = h(\mathcal{X})$ , 对方程进行线性化得到

$$\hat{y} = A\xi + b \quad (\text{A1})$$

为获取线性化系数  $A$  和  $b$ , 定义统计意义下的最小化均方误差, 即  $\min J$ , 其中

$$J = \text{MSE}(A, b) = \text{E}(ee^T) =$$

$$\text{E}[(y - A\xi - b)^T (y - A\xi - b)] \quad (\text{A2})$$

式中,  $e = y - \hat{y}$ , 表示线性化误差. 对式 (A2) 中的  $A$  和  $b$  分别求导并令结果为 0, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial A} &= \text{E} \frac{\partial}{\partial A} \text{tr} [(y - A\xi - b)(y - A\xi - b)^T] = \\ &- 2 [\text{E}(y\xi^T) - A\text{E}(\xi\xi^T) - b\text{E}(\xi^T)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial b} &= \text{E} \frac{\partial}{\partial b} [(y - A\xi - b)^T (y - A\xi - b)] = \\ &- 2 [\text{E}(y) - A\text{E}(\xi) - b] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

由于  $\text{E}(\xi) = 0$ ,  $\text{E}(\xi\xi^T) = P$ , 联立式 (A3) 和 (A4), 可得线性化系数为  $A = \text{E}(y\xi^T) \text{E}(\xi\xi^T)^{-1} = \text{E}(\xi y^T)^T P^{-1}$  和  $b = \text{E}(y)$ . 将上式代入式 (A1) 中, 记  $\bar{y} = \text{E}(y)$ , 有

$$\hat{y} = A\xi + b = \bar{y} + \text{E}(\xi y^T)^T P^{-1} \xi \quad (\text{A5})$$

由式 (A5) 可知,  $\text{E}(\hat{y}) = \text{E}(y)$ , 所以式 (A5) 为  $y = h(\mathcal{X})$  在统计意义下的最优线性化. 此外, 记  $\bar{P}_{\xi y} = \text{E}[\xi y^T]$ ,  $A = \bar{P}_{\xi y}^T P^{-1}$ ,  $P_{yy} = \text{E}[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T]$  和  $P_{\xi y} = \text{E}[\xi(y - \bar{y})^T]$ , 则线性化误差的方差阵为

$$\begin{aligned} P_e &= \text{E} [(y - \bar{y} - \bar{P}_{\xi y}^T P^{-1} \xi)(y - \bar{y} - \bar{P}_{\xi y}^T P^{-1} \xi)^T] = \\ &P_{yy} + A P A^T - A P_{\xi y} - (A P_{\xi y})^T \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

□

#### 附录 B 定理 1 的证明

证明. 在第  $l+1$  次迭代时, 根据式 (23) ~ (26), 可得

$$\|y - h(\mathcal{X}^{l+1})\|_R \approx \|y - \hat{y}^l - H^l \xi^{l+\frac{1}{2}}\|_{R^l} \quad (\text{B1})$$

另外, 根据式 (14), 在左乘和右乘形式下分别可得

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^{l+1}) &= \log(\hat{\mathcal{X}}^{-1} \mathcal{X}^{l+1}) = \\ &\log(\exp(\xi^l) \exp(\xi^{l+\frac{1}{t}})) \approx \\ &\xi^l + (\mathcal{J}_l^L)^{-1} \xi^{l+\frac{1}{t}} \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^{l+1}) &= \log(\mathcal{X}^{l+1} \hat{\mathcal{X}}^{-1}) = \\ &\log(\exp(\xi^{l+\frac{1}{t}}) \exp(\xi^l)) \approx \\ &\xi^l + (\mathcal{J}_l^R)^{-1} \xi^{l+\frac{1}{t}} \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

其中,

$$(\mathcal{J}_l^L)^{-1} = \frac{\text{ad}(\xi^l)^\wedge}{\exp(\text{ad}(\xi^l)^\wedge) - I} \quad (\text{B4})$$

$$(\mathcal{J}_l^R)^{-1} = \frac{\text{ad}(\xi^l)^\wedge}{-\exp(-\text{ad}(\xi^l)^\wedge) + I} \quad (\text{B5})$$

式中,  $\mathcal{J}_l^L$  和  $\mathcal{J}_l^R$  分别表示左、右雅克比矩阵,  $\text{ad}(\cdot)$  表示伴随映射,  $I$  表示单位矩阵. 综上, 式 (B2) 和式 (B3) 可统一表达为

$$\varphi^{-1}(\hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^{l+1}) \approx \xi^l + \mathcal{J}_l^{-1} \xi^{l+\frac{1}{t}} \quad (\text{B6})$$

由此, 可得替代损失函数式 (34). 对式 (34) 中的损失函数  $J(\xi)$  求偏导, 记  $\bar{\xi}^l = \xi^l + \mathcal{J}_l^{-1} \xi$ ,  $\tilde{y}^l = y - \hat{y}^l$ ,  $\tilde{y}^l = \tilde{y}^l - H^l \xi$ , 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\xi)}{\partial \xi} &= -\mathcal{J}_l^{-T} \left\| \|\bar{\xi}^l\|_P^2 \right\|^{\frac{\alpha}{2}-2} \exp(-\gamma \|\|\bar{\xi}^l\|_P\|^\alpha) \times \\ &\|\bar{\xi}^l\|_P^2 P^{-1} \bar{\xi}^l + (H^l)^T \left\| \|\tilde{y}^l\|_{R^l}^2 \right\|^{\frac{\alpha}{2}-2} \times \\ &\exp(-\gamma \|\|\tilde{y}^l\|_{R^l}\|^\alpha) \|\tilde{y}^l\|_{R^l}^2 (R^l)^{-1} \tilde{y}^l \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

记  $G_{\text{pre}}^l = \exp(-\gamma \|\|\bar{\xi}^l\|_P\|^\alpha) \|\|\bar{\xi}^l\|_P^2\|_{\frac{\alpha}{2}-2} \|\|\bar{\xi}^l\|_P^2\|$ ,  $G_{\text{mea}}^l = \exp(-\gamma \|\|\tilde{y}^l\|_{R^l}\|^\alpha) \|\|\tilde{y}^l\|_{R^l}^2\|_{\frac{\alpha}{2}-2} \|\|\tilde{y}^l\|_{R^l}^2\|$ , 并令  $\frac{\partial J(\xi)}{\partial \xi} = 0$ , 有

$$\begin{aligned} \xi^{l+\frac{1}{t}} &= \left( \mathcal{J}_l^{-T} G_{\text{pre}}^l P^{-1} \mathcal{J}_l^{-1} + (H^l)^T G_{\text{mea}}^l (R^l)^{-1} \times \right. \\ &H^l \left. \right)^{-1} \left( -\mathcal{J}_l^{-T} G_{\text{pre}}^l P^{-1} \xi^l + (H^l)^T G_{\text{mea}}^l \times \right. \\ &\left. (R^l)^{-1} \tilde{y}^l \right) \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

□

## 附录 C 命题 2 的证明

**证明.** 根据式 (14) 和式 (B6), 可得

$$\mathcal{X}^{l+1} = \varphi(\hat{\mathcal{X}}, \xi^{l+1}) \approx \varphi(\hat{\mathcal{X}}, \xi^l + \mathcal{J}_l^{-1} \xi^{l+\frac{1}{t}}) \quad (\text{C1})$$

根据式 (13), 记  $\bar{P}_l = (G_{\text{pre}}^l)^{-1} P$ ,  $\tilde{y}^l = y - \hat{y}^l$ ,  $\bar{H}_l = G_{\text{mea}}^l H^l$ , 则有

$$\begin{aligned} \xi^l + \mathcal{J}_l^{-1} \xi^{l+\frac{1}{t}} &= \\ &\mathcal{J}_l^{-1} \left( \mathcal{J}_l^{-T} \bar{P}_l^{-1} \mathcal{J}_l^{-1} + \bar{H}_l^T (R^l)^{-1} H^l \right)^{-1} \times \\ &\left( \bar{H}_l^T (R^l)^{-1} \tilde{y}^l + \bar{H}_l^T (R^l)^{-1} H^l \mathcal{J}_l \xi^l \right) = \\ &\mathcal{J}_l^{-1} \left( \mathcal{J}_l^{-T} \bar{P}_l^{-1} \mathcal{J}_l^{-1} + \bar{H}_l^T (R^l)^{-1} H^l \right)^{-1} \times \\ &\bar{H}_l^T (R^l)^{-1} (\tilde{y}^l + H^l \mathcal{J}_l \xi^l) = \\ &K^l (\tilde{y}^l + H^l \mathcal{J}_l \xi^l) \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

其中,  $K^l$  表示卡尔曼增益矩阵. 根据伴随映射的性质, 有  $\text{ad}(\xi^l)^\wedge \xi^l = 0$ , 可得

$$\mathcal{J}_l^L \xi^l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\text{ad}(\xi^l)^\wedge)^n}{(n+1)!} \xi^l = \xi^l \quad (\text{C3})$$

$$\mathcal{J}_l^R \xi^l = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\text{ad}(\xi^l)^\wedge)^n}{(n+1)!} \xi^l = \xi^l \quad (\text{C4})$$

根据式 (C3) 和式 (C4), 式 (C2) 可进一步表示为

$$\xi^l + \mathcal{J}_l^{-1} \xi^{l+\frac{1}{t}} = K^l (\tilde{y}^l + H^l \xi^l) \quad (\text{C5})$$

将式 (C5) 代入式 (C1) 中, 可得均值更新表达式为

$$\mathcal{X}^{l+1} = \varphi(\hat{\mathcal{X}}, \tilde{y}^l + H^l \xi^l) \quad (\text{C6})$$

记  $\bar{P}_l = (G_{\text{pre}}^l)^{-1} P$ ,  $\bar{H}_l = G_{\text{mea}}^l H^l$ ,  $K^l$  可等价

$$\begin{aligned} K^l &= \mathcal{J}_l^{-1} \left( \mathcal{J}_l^{-T} \bar{P}_l^{-1} \mathcal{J}_l^{-1} + \bar{H}_l^T (R^l)^{-1} H^l \right)^{-1} \times \\ &\bar{H}_l^T (R^l)^{-1} (H^l \mathcal{J}_l \bar{P}_l \mathcal{J}_l^T \bar{H}_l^T + R^l) \left( H^l \mathcal{J}_l \times \right. \\ &\left. \bar{P}_l \mathcal{J}_l^T \bar{H}_l^T + R^l \right)^{-1} = \\ &\bar{P}_l \mathcal{J}_l^{-T} \bar{H}_l^T (H^l \mathcal{J}_l \bar{P}_l \mathcal{J}_l^T \bar{H}_l^T + R^l)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C7})$$

另外, 由  $[\xi^l, \xi^{l+\frac{1}{t}}] = 0$ , 根据 BCH (Baker-Campbell-Hausdorff) 公式, 可得

$$\log(\exp(\xi^l) \exp(\xi^{l+\frac{1}{t}})) = \xi^l + \xi^{l+\frac{1}{t}} \quad (\text{C8})$$

根据李括号的反对易性 (Skew-commutativity) 性质, 有  $[\xi^{l+\frac{1}{t}}, \xi^l] = -[\xi^l, \xi^{l+\frac{1}{t}}] = 0$ . 同理可得

$$\log \left( \exp \left( \xi^{l+\frac{1}{t}} \right) \exp \left( \xi^l \right) \right) = \xi^l + \xi^{l+\frac{1}{t}} \quad (\text{C9})$$

因此, 不同于式 (B6),  $\varphi^{-1} \left( \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^{l+1} \right)$  的等价形式为

$$\varphi^{-1} \left( \hat{\mathcal{X}}, \mathcal{X}^{l+1} \right) = \xi^l + \xi^{l+\frac{1}{t}} \quad (\text{C10})$$

□

## References

- Lin D Y, Wang S Y, Zhang Q Q, Chen X F, Tse C K. Adaptive quaternion state estimation for 3-D and 4-D signals with weighted maximum correntropy: A widely linear approach. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2025, **61**(1): 730–742
- Yang Xu-Sheng, Wu Jiang-Yu, Hu Fo, Zhang Wen-An. Multi-view human pose estimation based on progressive Gaussian filtering fusion. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(3): 607–616 (杨旭升, 吴江宇, 胡佛, 张文安. 基于渐进高斯滤波融合的多视角人体姿态估计. *自动化学报*, 2024, **50**(3): 607–616)
- Yang X S, Zhang W A, Yu L, Shi L. Performance evaluation of distributed linear regression Kalman filtering fusion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, **66**(6): 2889–2896
- van Goor P, Hamel T, Mahony R. Equivariant filter (EqF). *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(6): 3501–3512
- Jin Y Q, Zhang W A, Sun H, Yu L. Learning-aided inertial odometry with nonlinear state estimator on manifold. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2023, **24**(9): 9792–9803
- Luo Y R, Lu F, Guo C, Liu J N. Matrix Lie group-based extended Kalman filtering for inertial-integrated navigation in the navigation frame. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2024, **73**: Article No. 9503916
- Jin Y Q, Zhang W A, Lu X Y, Chen B, Yu L. Computationally efficient Lie algebraic particle filters for state estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, **70**(5): 3370–3377
- Ge Q B, Bai X F, Zeng P L. Gaussian-cauchy mixture kernel function based maximum correntropy criterion Kalman filter for linear non-Gaussian systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2025, **73**: 158–172
- Bijker J, Steyn W. Kalman filter configurations for a low-cost loosely integrated inertial navigation system on an airship. *Control Engineering Practice*, 2008, **16**(12): 1509–1518
- Martin P, Salaün E. Generalized multiplicative extended Kalman filter for aided attitude and heading reference system. In: Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Toronto, Canada: AIAA, 2010. Article No. 2010–8300
- Bonnabel S, Martin P, Salaün E. Invariant extended Kalman filter: Theory and application to a velocity-aided attitude estimation problem. In: Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) Held Jointly With 2009 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 1297–1304
- Barrau A, Bonnabel S. The invariant extended Kalman filter as a stable observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(4): 1797–1812
- Fu M L, Lu X Y, Jin Y Q, Zhang W A, Prakupovich R, Sychou U. Semantic map-based visual localization with consistency guarantee. *IEEE Sensors Journal*, 2024, **24**(1): 1065–1078
- Zheng Ting-Ting, Yang Xu-Sheng, Zhang Wen-An, Yu Li. A target tracking method in Gaussian progressive filtering framework. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(12): 2250–2258 (郑婷婷, 杨旭升, 张文安, 俞立. 一种高斯渐进滤波框架下的目标跟踪方法. *自动化学报*, 2018, **44**(12): 2250–2258)
- Liu W F, Pokharel P P, Principe J C. Correntropy: Properties and applications in non-Gaussian signal processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(11): 5286–5298
- Xu B, Wang X Y, Zhang J, Razzaqi A A. Maximum correntropy delay Kalman filter for SINS/USBL integrated navigation. *ISA Transactions*, 2021, **117**: 274–287
- Wang G, Zhao H Q. Robust adaptive least mean M-estimate algorithm for censored regression. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, **52**(8): 5165–5174
- Ge Quan-Bo, Wang He-Bin, Yang Qin-Min, Zhang Xing-Guo, Liu Hua-Ping. Estimation of robot motion state based on improved Gaussian mixture model. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(8): 1972–1983 (葛泉波, 王贺彬, 杨秦敏, 张兴国, 刘华平. 基于改进高斯混合模型的机器人运动状态估计. *自动化学报*, 2022, **48**(8): 1972–1983)
- Korkin R, Oseledets I, Katrutsa A. Multiparticle Kalman filter for object localization in symmetric environments. *Expert Systems With Applications*, 2024, **237**: Article No. 121408
- Zhang W A, Zhang J, Shi L, Yang X S. Gaussian particle filtering for nonlinear systems with heavy-tailed noises: A progressive transform-based approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2024, **54**(11): 6934–6942
- Cinar G T, Principe J C. Adaptive background estimation using an information theoretic cost for hidden state estimation. In: Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks. San Jose, USA: IEEE, 2011. 489–494
- Chen B D, Liu X, Zhao H Q, Principe J C. Maximum correntropy Kalman filter. *Automatica*, 2017, **76**: 70–77
- Guo H J, Liu H Y, Zhou Y, Hu X X. Robust state estimation via maximum correntropy EKF on matrix lie groups with application to low-cost INS/GPS-integrated navigation system. *IEEE Sensors Journal*, 2023, **23**(9): 9467–9479
- Wang G Q, Li N, Zhang Y G. Maximum correntropy unscented Kalman and information filters for non-Gaussian measurement noise. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, **354**(18): 8659–8677
- Chen B D, Xing L, Zhao H Q, Zheng N N, Principe J C. Generalized correntropy for robust adaptive filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, **64**(13): 3376–3387
- Mo Y, Wang Y N, Yang H, Chen B D, Li H, Jiang Z H. Generalized maximum correntropy Kalman filter for target tracking in TianGong-2 space laboratory. *Space: Science and Technology*, 2022, **2022**: Article No. 9796015
- Ge Q B, Hu X M, Li Y Y, He H L, Song Z H. A novel adaptive Kalman filter based on credibility measure. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2023, **10**(1): 103–120
- Li S L, Shi D W, Lou Y J, Zou W L, Shi L. Generalized multi-kernel maximum correntropy Kalman filter for disturbance estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(6): 3732–3747
- Kasai H, Jawanpuria P, Mishra B. Riemannian adaptive stochastic gradient algorithms on matrix manifolds. In: Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning. Long Beach, USA: PMLR, 2019. 3262–3271
- Fei Y H, Liu Y J, Jia C T, Li Z Y, Wei X, Chen M S. A survey of geometric optimization for deep learning: From Euclidean space to Riemannian manifold. *ACM Computing Surveys*, 2025, **57**(5): Article No. 123
- Lin K, Ge Q B, Li H, Chen S. Adaptive non-Gaussian cubature

filter based on GS-MCC with correlated multiplicative noises. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, **22**: 2318–2334

- 32 Bourmaud G, Mégret R, Giremus A, Berthoumieu Y. From intrinsic optimization to iterated extended Kalman filtering on Lie groups. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2016, **55**(3): 284–303
- 33 Huang Y L, Zhang Y G, Xu B, Wu Z M, Chambers J. A new outlier-robust student's  $t$  based Gaussian approximate filter for cooperative localization. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2017, **22**(5): 2380–2386
- 34 Chen B D, Xing L, Xu B, Zhao H Q, Zheng N N, Príncipe J C. Kernel risk-sensitive loss: Definition, properties and application to robust adaptive filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, **65**(11): 2888–2901
- 35 Guo Y, Ma B, Li Y S. A kernel-width adaption diffusion maximum correntropy algorithm. *IEEE Access*, 2020, **8**: 33574–33587
- 36 Brossard M, Barrau A, Bonnabel S. A code for unscented Kalman filtering on manifolds (UKF-M). In: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Paris, France: IEEE, 2020. 5701–5708
- 37 Forbes J R, Zlotnik D E. Sigma point Kalman filtering on matrix Lie groups applied to the SLAM problem. In: Proceedings of the 3rd International Conference on Geometric Science of Information. Paris, France: Springer, 2017. 318–328
- 38 Cantelobre T, Chahbazian C, Croux A, Bonnabel S. A real-time unscented Kalman filter on manifolds for challenging AUV navigation. In: Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Las Vegas, USA: IEEE, 2020. 2309–2316
- 39 Liu X, Chen B D, Xu B, Wu Z Z, Honeine P. Maximum correntropy unscented filter. *International Journal of Systems Science*, 2017, **48**(8): 1607–1615
- 40 Brossard M, Barrau A, Bonnabel S. RINS-W: Robust inertial navigation system on wheels. In: Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Macao, China: IEEE, 2019. 2068–2075



**杨旭升** 浙江工业大学信息工程学院副教授. 主要研究方向为多源信息融合估计和目标定位.

E-mail: [xsyang@zjut.edu.cn](mailto:xsyang@zjut.edu.cn)

(**YANG Xu-Sheng** Associate professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of

Technology. His research interest covers multi-source information fusion estimation and target positioning.)



**夏晓翠** 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为几何滤波和多源信息融合估计.

E-mail: [211122030039@zjut.edu.cn](mailto:211122030039@zjut.edu.cn)

(**XIA Xiao-Cui** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. Her research interest covers geometric filter and multi-source information fusion estimation.)



**金宇强** 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为多源信息融合估计和几何滤波.

E-mail: [yqjin@zjut.edu.cn](mailto:yqjin@zjut.edu.cn)

(**JIN Yu-Qiang** Ph.D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interest covers multi-source information fusion estimation and geometric filter.)



**顾欣星** 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为信息融合估计和目标定位.

E-mail: [122224030044@zjut.edu.cn](mailto:122224030044@zjut.edu.cn)

(**GU Xin-Xing** Ph.D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interest covers information fusion estimation and target positioning.)



**张文安** 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为多源信息融合估计和网络化系统. 本文通信作者.

E-mail: [wazhang@zjut.edu.cn](mailto:wazhang@zjut.edu.cn)

(**ZHANG Wen-An** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interest covers multi-source information fusion estimation and networked systems. Corresponding author of this paper.)