

基于 PI 结构的多智能体系统容错一致性控制

郜晨¹ 何潇² 周东华^{2,3}

摘要 针对无领航者多智能体系统 (Multi-agent systems, MASs) 以及领航-跟随多智能体系统执行器故障问题, 设计基于 PI 结构的容错控制律. 考虑到传统的比例型控制律无法消除加性干扰影响下的稳态误差, 引入积分环节, 在一致性控制律中融入状态的积分项, 用于改善多智能体系统一致性过程的稳态性能. 针对领航者输入不为零的情况, 设计非线性的一致性控制律, 并借助黎卡提方程以及 Lyapunov 函数, 进行多智能体系统在故障情况下的一致性分析和控制律设计. 最后, 通过一系列对比仿真, 说明了所设计控制律在改善系统稳态性能方面的优势.

关键词 多智能体系统, 容错一致性, PI 控制, 执行器故障

引用格式 郜晨, 何潇, 周东华. 基于 PI 结构的多智能体系统容错一致性控制. 自动化学报, 2025, 51(3): 570-576

DOI 10.16383/j.aas.c240474 **CSTR** 32138.14.j.aas.c240474

Fault-tolerant Consensus Control of Multi-agent Systems Based on PI Structure

GAO Chen¹ HE Xiao² ZHOU Dong-Hua^{2,3}

Abstract In this paper, a kind of fault-tolerant controller based on PI structure is designed to deal with the fault-tolerant control problem for leaderless multi-agent systems (MASs) and leader-follower MASs, which are subject to actuator faults. Considering that the traditional proportional-type controller cannot eliminate the steady-state error under the influence of additive disturbances, this paper incorporates the integral term of the state in the consensus controller to improve the steady-state performance of the consensus process in MASs. In addition, the consensus controller is designed to be nonlinear for the case where the input of the leader is not zero. Then, the consensus of the MAS is analyzed under actuator faults and the controller is designed with the help of Riccati equation and Lyapunov function. Finally, a series of comparative simulations are provided to illustrate the advantages of the designed controller in improving the steady-state performance.

Key words Multi-agent systems (MASs), fault-tolerant consensus, PI control, actuator fault

Citation Gao Chen, He Xiao, Zhou Dong-Hua. Fault-tolerant consensus control of multi-agent systems based on PI structure. *Acta Automatica Sinica*, 2025, 51(3): 570-576

多智能体系统 (Multi-agent systems, MASs) 是由多个具有感知、认知、控制与行为等能力的自主运动体构成的一个整体. 个体之间通过局部相互作用, 使整个系统在宏观上涌现出复杂、有效、强大的智能行为. MASs 的三个基本要素为智能体、交互方式和行为规则, 三者相互耦合. 其中, 智能体是组成 MASs 的基本单元, 可以是无人机、卫星等; 交

互方式用来描述智能体之间的相互作用关系, 如信息传输过程中的拓扑关系; 行为规则是指智能体接收信息之后的反应规则, 如控制律的生成规则. 根据行为规则的不同, MASs 的控制问题可以分为一致性控制^[1-3]、编队控制^[4-5]、蜂拥控制^[6-7]等. 其中, 一致性控制是指通过设计分布式控制律使得所有个体在某些变量上达成一致, 除了在 MASs 控制领域的应用外, 一致性控制在传感器网络和时钟同步等领域均有广泛的应用.

目前 MASs 一致性控制的研究成果多集中在比例 (Proportion, P) 型控制律的设计上, 对于多输入多输出 (Multi-input multi-output, MIMO) 系统而言, 我们将控制律的生成只与当前状态/输出值有关的控制律称之为 P 型控制律. 这种基于状态/输出的 P 型控制律结构可以解决 MASs 在初始偏差下基本的一致性控制问题, 但是, 在一些情况下, 这种 P 型结构不足以支撑最终的一致性. 例如, 当存在加性干扰或故障时, 在 P 型结构的控制律下只

收稿日期 2024-07-03 录用日期 2024-10-08

Manuscript received July 3, 2024; accepted October 8, 2024

国家自然科学基金 (62403245, 62473223, 62233012), 江苏省自然科学基金 (BK20241458, BK20232038), 北京市自然科学基金重点研究专项项目 (L241016) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62403245, 62473223, 62233012), Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20241458, BK20232038), and Beijing Natural Science Foundation (L241016)

本文责任编辑 易新雷

Recommended by Associate Editor YI Xin-Lei

1. 南京理工大学自动化学院 南京 210094 2. 清华大学自动化系 北京 100084 3. 东南大学自动化学院 南京 210096

1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094 2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084 3. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096

能得到有界一致性, 无法消除稳态误差. 针对类似的情况, 可以引入状态的积分项, 利用积分环节在一定程度上改善系统的稳态性能.

事实上, 比例积分微分 (Proportion-integration-differentiation, PID) 型控制律是目前应用最为广泛的控制结构, 其结构简洁、易于实现并且具有较强的鲁棒性^[8-9]. PID 控制律的设计难点在于 PID 参数的调节, 尤其是针对 MIMO 系统. 在时域中, 目前常用的方法是基于线性矩阵不等式 (Linear matrix inequalities, LMIs) 的方法, 首先将比例、积分 (或求和) 和微分 (或差分) 项进行增广, 然后针对增广后的系统进行控制律设计^[10-12]. 其中, 文献 [10] 和文献 [11] 针对一般线性离散的 MIMO 系统, 给出了基于 LMIs 的 PID 参数设计方法, 并将其推广到 H_2 以及 H_∞ 控制问题中. 文献 [12] 针对网络化系统, 给出了固定步长积分的 PID 型控制律设计方法. 相比于单个 MIMO 系统, MASs 可以看成是包含了拓扑结构信息的 MIMO 系统. 文献 [13] 针对一般线性离散 MASs, 借助 LMIs 给出了无领航者以及领航-跟随一致性控制问题中 PID 型控制律的设计方法.

上述成果均是基于理想执行器的假设, 当 PID 型控制结构遇到执行器故障时, 已有的设计方法将不再适用. 执行器由于其连续不断地做机械运动, 因此出现故障的可能性极大, 执行器故障会对系统产生巨大的影响: 乘性故障会影响系统的稳定性, 加性故障会影响系统的稳态误差. 尤其在 MASs 的背景下, 如果个体的故障没有得到及时处理, 会通过拓扑传递影响到其他个体的运动, 从而对整个 MAS 造成影响. 目前 MASs 的容错一致性控制方法包括主动容错方法和被动容错方法^[14-15], 主动容错控制需要设计适当的故障诊断单元, 预先完成对故障信号的检测、分离和辨识, 并利用获取的故障信息对控制器的参数或者结构进行实时调整^[16-18]; 被动容错控制不需要故障诊断单元, 在控制律设计时需要综合考虑系统正常运行和发生故障的情况, 在线运行时控制律结构不会发生改变^[19-21]. 主动容错控制具有较好的动态性能, 但是控制律的切换可能诱导出不稳定的现象, 特别是针对非线性系统. 此外, 主动容错控制的性能依赖于故障诊断单元的性能, 如故障检测的效率、漏报率和误警率、故障估计的准确度等, 而对于执行器的乘性故障, 尤其是快速时变故障, 几乎不可能得到精准的估计, 因此本文重点研究被动容错框架下的一致性控制问题.

考虑到实际环境中噪声/干扰的存在, 微分环节的引入会放大噪声/干扰的影响, 因此, 本文重点

考虑 PI 型的控制律. 与现有成果对比, 本文的主要贡献包括: 1) 不同于常见的一阶、二阶积分 MASs, 本文针对一般线性 MASs, 给出了 PI 型控制结构的容错一致性控制律设计方法; 2) 重点针对领航者输入不为零的情况, 设计 PI 型非线性容错控制律结构, 并借助黎卡提方程进行控制律参数的设计.

符号说明. $\mathbf{0}$ 表示元素全为 0 的列向量, $\mathbf{1}_N$ 表示元素全为 1 的 N 维列向量, $\mathbf{0}_{n \times m}$ 表示 $n \times m$ 维的零矩阵, I_n 表示 n 维的单位矩阵, sign 表示符号函数, 符号 \otimes 是 Kronecker 积.

1 问题描述

考虑由 N 个个体构成的 MAS, 个体之间的信息流可以用一个有向图 $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 进行描述, 其中 $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_N\}$ 表示节点集合, 每个节点代表一个个体; $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示边集合, $\mathcal{E}_{ij} = (\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) \in \mathcal{E}$ 表示节点 \mathcal{V}_i 的信息可以传递给节点 \mathcal{V}_j ; $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{N \times N}$ 记为图的邻接矩阵, 如果 $\mathcal{E}_{ji} \in \mathcal{E}$, 则 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$. 令 $L = [l_{ij}]_{N \times N}$ 表示图的拉普拉斯矩阵, 定义为: $l_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}$, $l_{ij} = -a_{ij}$ ($i \neq j$).

对于一个给定的有向图 \mathcal{G} , 如果图中存在一个节点, 该节点可以通向其他的所有节点, 则称图 \mathcal{G} 中包含一簇有向生成树, 无向图可以看成是一种特殊的有向图, 无向图的邻接矩阵 \mathcal{A} 是对称矩阵, 一个无向图中如果包含一簇有向生成树, 则称该无向图是“连通的”.

MAS 中个体 $i \in \mathfrak{N} := \{1, 2, \dots, N\}$, 表示为

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i^f(t) \quad (1)$$

式中, $x_i \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量, $u_i^f \in \mathbf{R}^m$ 是输入变量. 为了简化表达, 下面在关于时间变量的函数符号表达时省略了时间变量 t . $u_i^f := [u_{i1}^f, \dots, u_{im}^f]^T$, u_i^f 表示故障执行器, 具体形式如下:

$$u_{ih}^f = (1 - \varrho_{ih})u_{ih}$$

其中, $0 \leq \varrho_{ih} \leq \varrho_{\max} < 1$, $h = 1, 2, \dots, m$. u_{ih} 表示第 i 个个体的第 h 个执行器的输入量, ϱ_{ih} 表示第 i 个个体的第 h 个执行器的未知故障, ϱ_{\max} 是已知的故障上界.

定义 1. 对于任意的个体 $i, j \in \mathfrak{N}$, 如果满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_j(t) = \mathbf{0} \quad (2)$$

则称 MAS 达到了无领航者一致性.

定义 2. 对于任意的跟随者 $i \in \mathcal{N} := \{2, 3, \dots, N\}$, 如果满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_1(t) = \mathbf{0} \quad (3)$$

则称 MAS 达到了领航-跟随一致性.

假设 1. MAS 构成的拓扑图 \mathcal{G} 是无向连通的.

假设 2. MAS 构成的拓扑图 \mathcal{G} 中包含一簇以领航者为根节点的有向生成树, 所有跟随者构成无向图.

在假设 1 的前提下, 存在一个正交矩阵 $T = [T_0, T_1]$, 其中 $T_0 = \sqrt{1/N} \mathbf{1}_N$, 使 L 对角化为 $T^T L T = \text{diag}\{0, \Phi\}$, 并且 $\Phi = \text{diag}\{\lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ 是一个正定矩阵, $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{N-1} \leq \lambda_N$ 是 L 的所有特征根.

在假设 2 的前提下, 图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵 $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 可以划分为

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (N-1)} \\ L_2 & L_1 \end{bmatrix}$$

其中, $L_1 > 0$ [22], L_1 的最小、最大特征根分别为 λ_2 和 λ_N .

本文的研究目标是针对如 (1) 所示的 MAS, 设计容错一致性控制律, 实现: 1) 所有个体均可能发生执行器故障情况下的无领航者一致性; 2) 领航者 1 不发生故障, 所有跟随者均可能发生执行器故障情况下的领航-跟随一致性.

2 PI 型容错一致性控制律设计

2.1 无领航者 MAS

设计无领航者 MAS 的容错一致性控制律形式如下:

$$u_i = K_P e_i + K_I \int_0^t e_i dt, \quad i \in \mathfrak{N} \quad (4)$$

其中, $e_i := \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_i - x_j)$, K_P 和 K_I 分别是待设计的比例环节和积分环节的控制律增益.

通过定义如下增广向量

$$\xi_i := \begin{bmatrix} x_i \\ \int_0^t x_i dt \end{bmatrix}$$

可以得到,

$$\dot{\xi}_i = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{n \times n} \\ I_n & \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix} \xi_i + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0}_{n \times m} \end{bmatrix} u_i^f := \mathcal{A} \xi_i + \mathcal{B} u_i^f \quad (5)$$

定理 1. 在假设 1 的前提下, 如果存在矩阵 $P > 0$ 使得下面条件成立

$$AP + PA^T - 2\lambda_2(1 - \varrho_{\max})\mathcal{B}\mathcal{B}^T < 0 \quad (6)$$

则领航-跟随 MAS (1) 可以在控制律 (4) 的作用下实现无领航者一致性, 其中控制律增益选取为:

$$K = -\mathcal{B}^T P^{-1}$$

证明. 记 $\xi := [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_N^T]^T$, $u := [u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T]^T$, MAS 可以写成:

$$\dot{\xi} = (I_N \otimes \mathcal{A})\xi + (I_N \otimes \mathcal{B})\varrho(L \otimes K)\xi \quad (7)$$

式中, $K := [K_P, K_I]$, $\varrho := \text{diag}\{I_m - \varrho_1, \dots, I_m - \varrho_N\}$, $\varrho_i := \text{diag}\{\varrho_{i1}, \dots, \varrho_{in}\}$, $i \in \mathfrak{N}$.

记 $z := (T_1^T \otimes I_n)\xi$, 进一步可得

$$\dot{z} = (I_{N-1} \otimes \mathcal{A})z + (T_1^T \otimes \mathcal{B})\varrho(T_1 \Phi \otimes K)z \quad (8)$$

选取如下所示的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} z^T (\Phi \otimes P^{-1}) z \quad (9)$$

其导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z^T (\Phi \otimes P^{-1}) \dot{z} = \\ & \frac{1}{2} z^T (\Phi \otimes (P^{-1} \mathcal{A} + \mathcal{A}^T P^{-1})) z - \\ & z^T (\Phi T_1^T \otimes P^{-1} \mathcal{B}) \varrho(T_1 \Phi \otimes \mathcal{B}^T P^{-1}) z \leq \\ & \frac{1}{2} z^T (\Phi \otimes (P^{-1} \mathcal{A} + \mathcal{A}^T P^{-1})) z - \\ & \lambda_2(1 - \varrho_{\max}) z^T (\Phi \otimes P^{-1} \mathcal{B} \mathcal{B}^T P^{-1}) z = \\ & \frac{1}{2} z^T (\Phi \otimes (P^{-1} \mathcal{A} + \mathcal{A}^T P^{-1} - \\ & 2\lambda_2(1 - \varrho_{\max}) P^{-1} \mathcal{B} \mathcal{B}^T P^{-1})) z \leq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

可得, $\lim_{t \rightarrow \infty} z = \mathbf{0}$. 定义新变量

$$y := (T^T \otimes I_{2n}) \xi = \begin{bmatrix} (T_0^T \otimes I_{2n}) \xi \\ z \end{bmatrix}$$

令 $y_1 := (T_0^T \otimes I_{2n}) \xi$, 则

$$\xi = (T \otimes I_{2n}) y = [T_0 \otimes I_{2n}, T_1 \otimes I_{2n}] y =$$

$$(T_0 \otimes I_{2n}) y_1 = \sqrt{\frac{1}{N}} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1 \end{bmatrix}$$

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_i(t) - \xi_j(t) = \mathbf{0}$, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_j(t) = \mathbf{0}$. \square

定理 1 给出了无领航者情况下容错一致性控制律的一个充分条件, 由定理 1 以及 $K := [K_P, K_I]$ 可以得到控制律 (4) 中参数 K_P 和 K_I 的值.

2.2 领航-跟随 MAS

在一些情况下, 如避障, 运动体需要具备跟随指定轨迹的能力, 通过利用领航-跟随者 MASs 的结构, 设计领航者的输入量 u_1 可以保证 MASs 在

一些突发情况下的适应能力. 相比于 u_1 为零的情况, 非零的 u_1 对控制律的设计要求更高, 需要能够及时跟踪未知的外部输入.

假设 3. 领航者的输入量有界, 即 $\|u_1\| \leq \gamma_1$.

在 (4) 的基础上, 设计领航-跟随 MAS 的容错一致性控制律形式如下:

$$u_i = K_P e_i + K_I \int_0^t e_i dt + c\pi \left(K_P e_i + K_I \int_0^t e_i dt \right) \quad (11)$$

其中, $i \in \mathcal{N}$, $c > 0$. 给定一个向量 $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m]^T$, 非线性函数 $\pi(\omega)$ 定义为 $\pi(\omega) = [\pi(\omega_1), \pi(\omega_2), \dots, \pi(\omega_m)]^T$, 其中

$$\pi(\omega_t) = \begin{cases} \text{sign}(\omega_t), & \omega_t \neq 0 \\ 0, & \omega_t = 0 \end{cases}$$

定义跟随误差为 $\zeta_i := \xi_i - \xi_1$, 令 $\zeta := [\zeta_2^T, \dots, \zeta_N^T]^T$, $u := [u_2^T, \dots, u_N^T]^T$, 有

$$\dot{\zeta} = (I_{N-1} \otimes \mathcal{A})\zeta + (I_{N-1} \otimes \mathcal{B})(I_{m(N-1)} - \varrho)H(\zeta) - (I_{N-1} \otimes \mathcal{B})u_1 \quad (12)$$

式中, $\varrho := \text{diag}\{I - \varrho_2, \dots, I - \varrho_N\}$, $\varrho_i := \text{diag}\{\varrho_{i1}, \dots, \varrho_{iN}\}$, $i \in \mathcal{N}$, $H(\zeta) := (L_1 \otimes K)\zeta + c\pi((L_1 \otimes K)\zeta)$.

定理 2. 在假设 2 和假设 3 的前提下, 如果存在参数 $c > 0$ 、矩阵 $P > 0$ 使得下面条件成立

$$c(1 - \varrho_{\max}) \geq \gamma_1 \quad (13a)$$

$$AP + PA^T - 2\lambda_2(1 - \varrho_{\max})\mathcal{B}\mathcal{B}^T < 0 \quad (13b)$$

则领航-跟随 MAS (1) 可以在控制律 (11) 的作用下实现领航-跟随一致性, 其中控制律增益选取为:

$$K = -\mathcal{B}^T P^{-1}$$

证明. 选取如下所示的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}\zeta^T(L_1 \otimes P^{-1})\zeta \quad (14)$$

其导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \zeta^T(L_1 \otimes P^{-1})\dot{\zeta} = \\ &\frac{1}{2}\zeta^T(L_1 \otimes (P^{-1}\mathcal{A} + \mathcal{A}^T P^{-1}))\zeta - \\ &\zeta^T(L_1 \otimes P^{-1}\mathcal{B})\varrho(L_1 \otimes \mathcal{B}^T P^{-1})\zeta - \\ &c\zeta^T(L_1 \otimes P^{-1}\mathcal{B})\varrho\pi((L_1 \otimes \mathcal{B}^T P^{-1})\zeta) - \\ &\zeta^T(L_1 \mathbf{1}_{N-1} \otimes P^{-1}\mathcal{B})u_1 \leq \\ &\frac{1}{2}\zeta^T(L_1 \otimes (P^{-1}\mathcal{A} + \mathcal{A}^T P^{-1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2(1 - \varrho_{\max})\lambda_2 P^{-1}\mathcal{B}\mathcal{B}^T P^{-1}))\zeta - \\ &c(1 - \varrho_{\max})\zeta^T(L_1 \otimes P^{-1}\mathcal{B}) \times \\ &\text{sign}((L_1 \otimes \mathcal{B}^T P^{-1})\zeta) + \\ &\gamma_1 \|(\mathbf{1}_{N-1}^T L_1 \otimes \mathcal{B}^T P^{-1})\zeta\| \leq \\ &\frac{1}{2}\zeta^T(L_1 \otimes (P^{-1}\mathcal{A} + \mathcal{A}^T P^{-1} - \\ &2\lambda_2(1 - \varrho_{\max})P^{-1}\mathcal{B}\mathcal{B}^T P^{-1}))\zeta \leq 0 \quad (15) \end{aligned}$$

可得, $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta = \mathbf{0}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_1(t) = \mathbf{0}$. \square

3 仿真分析

考虑地面无人车构成的多智能体系统, 首先对每个无人车进行数学建模, 建立地面固定坐标系 $x_g o_g y_g$ 和车体坐标系 $x_c o_c y_c$. 其中 o_c 位于小车中心, y_c 轴指向小车车头方向, x_c 轴指向的是 y_c 轴顺时针旋转 90 度的方向. 如图 1 所示, 设 y_c 与 x_g 的夹角为 θ , 可得第 i 个无人车的运动学模型为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i^g \\ \dot{y}_i^g \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ -\cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^{x_c} \\ v_i^{y_c} \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中, $v_i^{x_c}$ 和 $v_i^{y_c}$ 分别表示无人车 i 沿着 x_c 轴和 y_c 轴方向的速度; ω_i 表示无人车 i 沿着 o_c 的旋转角速度, 逆时针方向为正.

根据运动学解算, 由 $v_i^{x_c}$, $v_i^{y_c}$ 和 ω_i 可以解算出每个轮子的旋转角速度:

$$\begin{cases} v_i^1 = v_i^{y_c} - v_i^{x_c} + \omega_i(a+b) \\ v_i^2 = v_i^{y_c} + v_i^{x_c} - \omega_i(a+b) \\ v_i^3 = v_i^{y_c} - v_i^{x_c} - \omega_i(a+b) \\ v_i^4 = v_i^{y_c} + v_i^{x_c} + \omega_i(a+b) \end{cases} \quad (17)$$

通过进行如下所示的变量转化:

$$\begin{bmatrix} v_i^{x_c} \\ v_i^{y_c} \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta_i & -\cos \theta_i & 0 \\ \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{x_c} \\ u_i^{y_c} \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

可以将 (16) 简化为一阶积分模型:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i^g \\ \dot{y}_i^g \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^{x_c} \\ u_i^{y_c} \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

通过令 θ_i 保持 90° 不变, (19) 可以进一步简化为两个一维的一阶积分模型, 即 x_g 方向和 y_g 方向的运动模型. 以一维的运动为例, 进行仿真. 考虑由 4 个无人车构成的领航-跟随 MAS, $A = 0$, $B =$

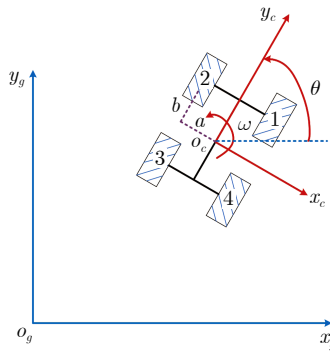


图 1 无人车车体坐标系

Fig.1 Body coordinate system of the unmanned vehicle

1, 拓扑结构如图 2 所示, 可得

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L 的最小、最大特征根分别为 $\lambda_2 = 0.2679$, $\lambda_N = 3.7321$. 设 $\gamma_1 \leq 10$, 最大故障 $\varrho_{\max} = 0.2$.

仿真 1. P 型容错一致性控制律

令 $A = A$, $B = B$, $K_I = 0$, 可以得到一组解 $c = 6.2510$, $K_P = -0.3402$. 为了缓解非连续控制律产生的振颤现象, 我们将 $\pi(\omega_t)$ 函数改写成如下所示的连续函数

$$\pi(\omega_t) = \begin{cases} \text{sign}(\omega_t), & |\omega_t| > \kappa \\ c\omega_t\kappa, & |\omega_t| \leq \kappa \end{cases}$$

取 $\kappa = 0.1$, 令 $\rho_2 = 0.2$, $\rho_3 = 0.1$, $\rho_4 = 0.04$. 以 x_g 方向为例, 假设所有个体初始状态均为 0, 在领航者输入 $u_1^{x_c} \equiv 5$ 的情况下, MAS 的仿真图如图 3 和图 4 所示. 系统会存在一个很小的一致性偏差, 这是由于连续化 $\pi(\omega_t)$ 函数导致的, 采用连续的 $\pi(\omega_t)$ 函数可以在一定程度上避免执行器的振颤, 但是却会引入额外的稳态误差, κ 取值越小, 稳态

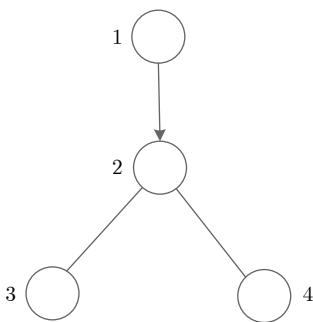


图 2 拓扑结构

Fig.2 Topological structure

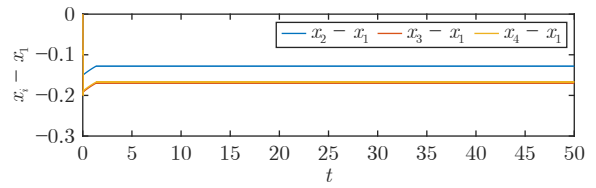


图 3 P 型控制律下的一致性误差曲线图

Fig.3 Trajectories of the consensus error with P-type controllers

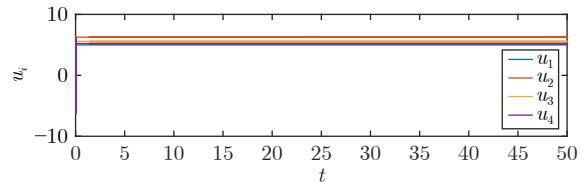


图 4 P 型控制律下的输入量曲线图

Fig.4 Trajectories of the input variable with P-type controllers

误差越小.

进一步, 考虑同时存在乘性故障和加性故障 ϑ_{ih} 的情况, 如下所示:

$$u_{ih}^f = (1 - \varrho_{ih})u_{ih} + \vartheta_{ih} \quad (20)$$

令 $\vartheta_2 = 0.5$, $\vartheta_3 = 1$, $\vartheta_4 = -1$, 在同样的控制律下, 仿真结果如图 5 和图 6 所示. 可以看出, P 型的控制律无法实现对加性故障的容错.

仿真 2. PI 型容错一致性控制律

根据定理 1, 得到控制律的一组参数设置为: $c = 6.2510$, $K_P = -0.2678$, $K_I = -0.0113$. 取 $\kappa = 1$, 令 $\rho_2 = 0.2$, $\rho_3 = 0.1$, $\rho_4 = 0.04$. 假设所有个体初始

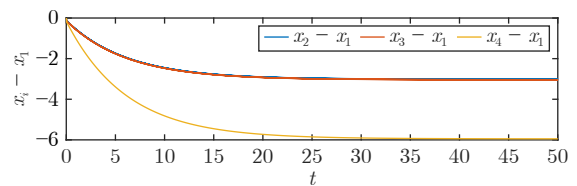


图 5 P 型控制律下注入加性故障的一致性误差曲线图

Fig.5 Trajectories of the consensus error with P-type controllers and additive faults

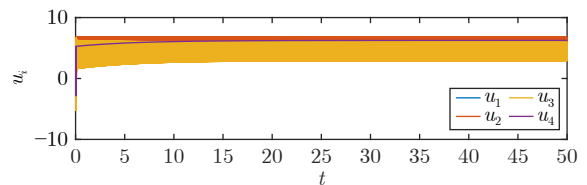


图 6 P 型控制律下注入加性故障的输入量曲线图

Fig.6 Trajectories of the input variable with P-type controllers and additive faults

状态均为 0, 在领航者输入 $u_1^c \equiv 5$ 的情况下, 仿真图如图 7 和图 8 所示, MAS 可以实现最终的一致性. 同样地, 增加 (20) 所示的加性故障, $\vartheta_2 = 0.5$, $\vartheta_3 = 1$, $\vartheta_4 = -1$, 在 PI 型控制律的作用下, MAS 的仿真图如图 9 和图 10 所示. 可以看出, MAS 依然可以保证最终的一致性. 对比 P 型和 PI 型控制律, PI 型控制律可以应对时不变的加性故障, 这是 P 型控制律所没有的优势.

4 结论

本文针对一般线性无领航者 MASs 以及领航-

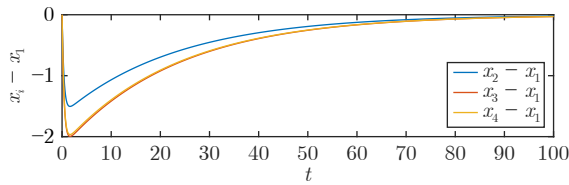


图 7 PI 型控制律下的一致性误差曲线图

Fig.7 Trajectories of the consensus error with PI-type controllers

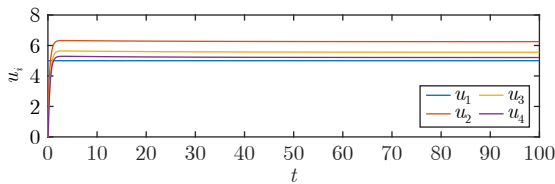


图 8 PI 型控制律下的输入量曲线图

Fig.8 Trajectories of the input variable with PI-type controllers

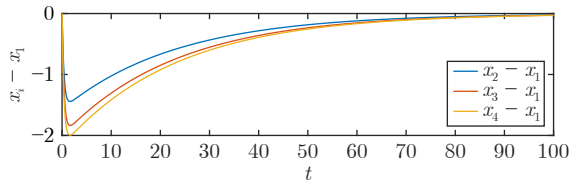


图 9 PI 型控制律下注入加性故障的一致性误差曲线图

Fig.9 Trajectories of the consensus error with PI-type controllers and additive faults

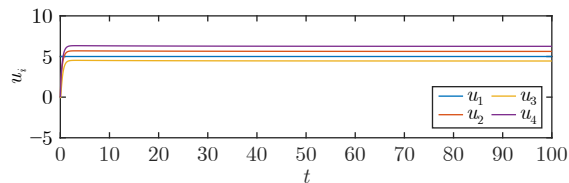


图 10 PI 型控制律下注入加性故障的输入量曲线图

Fig.10 Trajectories of the input variable with PI-type controllers and additive faults

跟随 MASs, 设计了一种 PI 型的容错一致性控制律. 首先通过构造一个带有积分项的增广状态向量, 将 PI 型的控制律设计问题转化为增广系统的容错控制律设计问题, 并借助黎卡提方程进行控制律的参数设计. 特别地, 针对领航者输入不为零的情况, 引入非线性项处理未知输入. 通过对比 P 型控制律和 PI 型控制律的仿真效果, 可以发现, PI 型控制律在应对时不变加性故障方面具有独特的优势, 说明 PI 型控制律在一些情况下具有更好的鲁棒性.

References

- 1 He X, Wang Z D, Gao C, Zhou D H. Consensus control for multi-agent systems under asymmetric actuator saturations with applications to mobile train lifting jack systems. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2023, **19**(10): 10224–10232
- 2 Zhang S H, Ma L F, Liu H J. Encryption-decryption-based event-triggered consensus control for nonlinear MASs under DoS attacks. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2024, **34**(1): 132–146
- 3 Gao C, Wang Z D, He X, Liu Y, Yue D. Differentially private consensus control for discrete-time multiagent systems: Encoding-decoding schemes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(8): 5554–5561
- 4 Shi T B, Zhu F L. Security time-varying formation control for multi-agent systems under denial-of-service attacks via unknown input observer. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2023, **10**(4): 2372–2385
- 5 Su H, Zhang B L, Zhou J, Xue J, Zheng Y S, Ma H. Collision-risk-based event-triggered optimal formation control for mobile multiagent systems under incomplete information conditions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, **53**(8): 4888–4898
- 6 Ma Z Z, Shi L, Chen K, Shao J L, Cheng Y H. Multi-agent bipartite flocking control over cooperation-competition networks with asynchronous communications. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing Over Networks*, 2024, **10**: 460–472
- 7 Chen J N, Yang Y H, Qin S T. A distributed optimization algorithm for fixed-time flocking of second-order multiagent systems. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2024, **11**(1): 152–162
- 8 Ying H. Theory and application of a novel fuzzy PID controller using a simplified Takagi-Sugeno rule scheme. *Information Sciences*, 2000, **123**(3–4): 281–293
- 9 Carvajal J, Chen G R, Ogmen H. Fuzzy PID controller: Design, performance evaluation, and stability analysis. *Information Sciences*, 2000, **123**(3–4): 249–270
- 10 Lim J S, Lee Y I. Design of discrete-time multivariable PID controllers via LMI approach. In: Proceedings of 2008 International Conference on Control, Automation and Systems. Seoul, Korea (South): IEEE, 2008. 1867–1871
- 11 Wu Z Z, Iqbal A, ben Amara F. LMI-based multivariable PID controller design and its application to the control of the surface shape of magnetic fluid deformable mirrors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, **19**(4): 717–729
- 12 Zhao D, Wang Z D, Ding D R, Wei G L. H_∞ PID control with fading measurements: The output-feedback case. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, **50**(6): 2170–2180
- 13 Gionfra N, Sandou G, Siguerdidjane H, Faille D, Loevenbruck P. A discrete-time PID-like consensus control: Application to the wind farm distributed control problem. In: Proceedings of the 14th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. Madrid, Spain: Springer, 2020. 106–134
- 14 Yang Hao, Jiang Bin, Zhou Dong-Hua. Review and perspectives

- on fault tolerant control for interconnected systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(1): 9–19
(杨浩, 姜斌, 周东华. 互联系统容错控制的研究回顾与展望. 自动化学报, 2017, **43**(1): 9–19)
- 15 Yang H, Han Q L, Ge X H, Ding L, Xu Y H, Jiang B, et al. Fault-tolerant cooperative control of multiagent systems: A survey of trends and methodologies. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2020, **16**(1): 4–17
 - 16 Liu Y S, Dong X W, Shi P F, Ren Z, Liu J W. Distributed fault-tolerant formation tracking control for multiagent systems with multiple leaders and constrained actuators. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, **53**(6): 3738–3747
 - 17 Liu Y Y, Wang Z S. Data-based output synchronization of discrete-time heterogeneous multiagent systems with sensor faults. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2024, **54**(1): 265–272
 - 18 Wu Y M, Wang Z S, Ding S B, Zhang H G. Leader-follower consensus of multi-agent systems in directed networks with actuator faults. *Neurocomputing*, 2018, **275**: 1177–1185
 - 19 Wang X, Yang G H. Fault-tolerant consensus tracking control for linear multiagent systems under switching directed network. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, **50**(5): 1921–1930
 - 20 Chen J J, Chen B S, Zeng Z G. Adaptive dynamic event-triggered fault-tolerant consensus for nonlinear multiagent systems with directed/undirected networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, **53**(6): 3901–3912
 - 21 Sun J Y, Tan Z L, Liu S, Zhang H G, Chuo W Y. Fully distributed event-driven coordination with actuator faults. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, **53**(10): 6456–6464
 - 22 Li Z K, Ren W, Liu X D, Xie L H. Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols. *Automatica*, 2013, **49**(7): 1986–1995



郜 晨 南京理工大学自动化学院教授。2021 年获得清华大学博士学位。主要研究方向为分布式系统的隐私保护与容错控制。
E-mail: chengao@njust.edu.cn
(**GAO Chen** Professor at the School of Automation, Nanjing Uni-

versity of Science and Technology. She received her Ph.D. degree from Tsinghua University in 2021. Her research interest covers privacy preservation and fault-tolerant control for distributed systems.)



何 潇 清华大学自动化系长聘教授。2010 年获得清华大学博士学位。主要研究方向为动态系统的故障诊断与容错控制。本文通信作者。

E-mail: hexiao@tsinghua.edu.cn

(**HE Xiao** Tenured professor in the Department of Automation, Tsinghua University. He received his Ph.D. degree from Tsinghua University in 2010. His research interest covers fault diagnosis and fault-tolerant control for dynamic systems. Corresponding author of this paper.)



周东华 东南大学和清华大学教授。1990 年获得上海交通大学博士学位。主要研究方向为动态系统的故障诊断与容错控制, 故障预测与最优维护技术。E-mail: zdh@tsinghua.edu.cn

(**ZHOU Dong-Hua** Professor at Southeast University and Tsinghua

University. He received his Ph.D. degree from Shanghai Jiao Tong University in 1990. His research interest covers fault diagnosis, fault-tolerant control, fault prediction, and optimal maintenance for dynamic systems.)