

# 具有类万有引力的有界置信观点动力学分析与应用

刘青松<sup>1</sup> 习晓苗<sup>1</sup> 柴利<sup>1</sup>

**摘要** 在社会网络中, Hegselmann-Krause 模型描述了置信阈值内不同邻居对个体的观点影响权重都相同且邻居对个体的吸引力与它们的观点差值成正比, 这是不切实际的. 为了克服经典 Hegselmann-Krause 模型的不足, 提出具有类万有引力的有界置信观点动力学模型, 描述个体观点的更新依赖于观点之间的差值和邻居的权威性, 且不同邻居对个体的观点影响权重不同. 根据置信矩阵的性质证明观点的收敛性, 并分析具有衰减置信阈值的观点动力学行为, 给出观点收敛速率的显式解. 最后, 利用提出的观点动力学模型, 研究社会心理学中的“权威效应”和“非零和效应”. 仿真结果表明, 邻居的权威性有利于观点达成一致.

**关键词** 观点动力学, 类万有引力, 有界置信, 社会网络, 收敛性

**引用格式** 刘青松, 习晓苗, 柴利. 具有类万有引力的有界置信观点动力学分析与应用. 自动化学报, 2023, 49(9): 1967–1975

**DOI** 10.16383/j.aas.c211134

## Analysis and Application of Bounded Confidence Opinion Dynamics With Universal Gravitation-like

LIU Qing-Song<sup>1</sup> XI Xiao-Miao<sup>1</sup> CHAI Li<sup>1</sup>

**Abstract** In the social networks, the Hegselmann-Krause model describes that the different neighbors within the confidence threshold have the same influence weight on the individual's opinion, and the attractiveness of neighbors to the individual is proportional to the opinion distance, which is unrealistic. In order to overcome the shortcoming of the classical Hegselmann-Krause model, we propose a bounded confidence opinion dynamics model with universal gravitation-like in this paper, which captures the update of the individual opinion depending on both the opinion distance and the authority of neighbors, and it is shown that different neighbors have different influence weights on individual opinions. The convergence of opinions is proved in terms of the property of confidence matrix, and moreover, the dynamic behavior of the opinion with decaying confidence threshold is analyzed and the explicit solution of the opinion convergence rate is given. Finally, by employing our proposed opinion dynamics model, we study the authority effect and the non-zero-sum effect in social psychology. Simulation analyses reveal that the authority of the neighbor is beneficial to opinion achieving consensus.

**Key words** Opinion dynamics, universal gravitation-like, bounded confidence, social networks, convergence

**Citation** Liu Qing-Song, Xi Xiao-Miao, Chai Li. Analysis and application of bounded confidence opinion dynamics with universal gravitation-like. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(9): 1967–1975

在过去的几十年中, 随着多智能体系统的兴起<sup>[1-3]</sup>, 社会网络引起了学者们的广泛关注, 涌现了许多研究成果<sup>[4]</sup>. 例如, Ghaderi 等<sup>[5]</sup> 研究了具有固执个体的社会网络观点的收敛性, 给出了观点收敛时间的上界和下界. Xia 等<sup>[6]</sup> 分析了具有偏见同化的非线

性观点动力学模型的稳定性. Liu 等<sup>[7]</sup> 提出一种观点扩散模型, 描述了双层连通网络的观点扩散过程, 探讨了在所有持有相同观点的耦合主体下, 两种观点在三种类型的两层互连网络中的传播. 针对强连通的社会网络, Ye 等<sup>[8]</sup> 研究了表达观点和私人观点之间的差异, 且给出了网络上保证意见指数快速收敛到极限的一般条件. 针对拟强连通社会网络, 刘青松等<sup>[9]</sup> 研究了多维观点动力学行为, 给出了表达和私人观点收敛的充分条件. Hou 等<sup>[10]</sup> 分析了具有有界置信的表达观点和私人观点动力学行为, 给出了最终聚类数主要由封闭个体率决定的结论.

近年来, 学者们针对多自主体系统进行研究<sup>[11-14]</sup>, 提出了一些经典观点动力学模型, 促进了社会网络中观点动力学的深入研究. 20 世纪 50 年代, 社会心

收稿日期 2021-11-30 录用日期 2022-04-28

Manuscript received November 30, 2021; accepted April 28, 2022

国家自然科学基金 (61903282, 62173259), 中国博士后科学基金 (2020T130488) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61903282, 62173259) and China Postdoctoral Science Foundation (2020T130488)

本文责任编辑 莫红

Recommended by Associate Editor MO Hong

1. 武汉科技大学信息科学与工程学院 武汉 430081

1. School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081

理学家 French<sup>[15]</sup> 提出基于个体的观点形成模型. 1974 年, DeGroot<sup>[16]</sup> 提出基于个体加权平均的观点动力学模型, 即后来的 DeGroot 模型. 通过针对每个个体引入偏差, 将 DeGroot 模型推广到非线性观点动力学模型<sup>[6]</sup>. 另一方面, 通过引入个体对自身初始观点的固执, 文献 [17] 提出 Friedkin-Johnsen 模型. 之后, Parsegov 等<sup>[18]</sup> 将 Friedkin-Johnsen 模型推广到了多维观点动力学模型. Tian 等<sup>[19]</sup> 研究了问题序列上的 Friedkin-Johnsen 观点动力学模型, 给出了问题序列上观点达到一致的充要条件. 在考虑每次观点更新过程中, 随机选取一对个体进行观点交流, Deffuant 等<sup>[20]</sup> 提出 Deffuant-Weisbuch 模型. 随后, 通过两种不同的方法推广了 Deffuant-Weisbuch 模型<sup>[21]</sup>, 验证了观点几乎必然达成一致. 最近, Dong 等<sup>[22]</sup> 研究了基于领导概念的观点动态共识构建过程, Mei 等<sup>[23]</sup> 提出基于评价网络的学习过程模型.

上述观点动力学模型是线性模型, 经典的 Hegselmann-Krause 模型<sup>[24]</sup> 是非线性模型, 描述了每个个体只与其置信阈值内的邻居进行观点交互. 与 Deffuant-Weisbuch 模型<sup>[20]</sup> 相比, Hegselmann-Krause 模型每次进行观点交流的个体的数量更多, 因而交流效率更高, 观点能够更快地收敛或者达成一致. 在实际应用方面, Hegselmann-Krause 观点动力学模型可应用于机器人平面、空间交会问题<sup>[25]</sup> 和社会心理学中“权威效应”<sup>[26]</sup> 等方面的研究. 故研究 Hegselmann-Krause 或有界置信观点动力学模型, 具有重要应用价值和意义.

近年来, 国内外学者针对有界置信模型进行了较为深入的研究<sup>[27]</sup>, 例如 Canuto 等<sup>[28]</sup> 通过欧拉方法, 研究了基于有界置信模型的动态系统的一致性问题. 通过考虑噪声环境, Su 等<sup>[29]</sup> 提出了具有噪声的有界置信模型, 展示了随机噪声如何显著地影响同步的观点, 给出了观点达成拟一致的充分条件. 基于改进的有界置信模型, 针对初始观点分布, Yang 等<sup>[30]</sup> 给出了观点收敛到一个聚类的充分条件. 通过正规化交流权重的凸性和 Gronwall-Halanay 型不等式, Haskovec<sup>[31]</sup> 研究了具有时滞的有界置信模型的渐近一致性问题. 基于离散异构的有界置信模型, Vasca 等<sup>[32]</sup> 提出了一种基于非影响相似度区间的个体置信阈值自适应策略, 分析了有限时间的观点动力学行为.

鉴于上述对有界置信观点动力学模型国内外研究现状的分析, 目前主要存在以下三个问题: 1) 在改进的观点动力学模型中, 邻居对个体的影响力与其

观点差异值成正比, 与实际情景存在一定的差距<sup>[28]</sup>; 2) 现有文献主要是采用仿真方法研究改进的有界置信模型, 缺乏较为完整的理论研究框架<sup>[27]</sup>; 3) 现有的有界置信模型研究中, 较少研究观点动力学模型的应用<sup>[32]</sup>, 例如考虑建立的观点动力学模型在社会心理学中的应用. 此外, 根据社会心理学中的认知理论可知<sup>[33]</sup>, 由于不同个体社会背景和认知能力不一样, 不同邻居对个体产生的影响就会不一样<sup>[33]</sup>; 个体与邻居的观点差异值越大, 邻居对其影响应该越小<sup>[34]</sup>.

为了克服上述问题, 本文提出具有类万有引力的有界置信模型, 并分析了观点的演化问题. 本文的主要贡献如下:

1) 提出了新的具有类万有引力的有界置信观点动力学模型. 解决了 Canuto 等<sup>[28]</sup> 模型中个体的影响力与其观点差异值成正比这一不符合实际情景的社会现象, 并考虑了个体的权威性;

2) 在理论上给出了观点收敛的充分条件且分析了基于衰减置信阈值的观点动力学模型, 完善了 Chen 等<sup>[27]</sup> 的理论研究内容;

3) 应用本文提出的具有类万有引力的有界置信观点动力学模型, 研究了社会心理学中的“权威效应”和“非零和效应”<sup>[35]</sup>, 填补了 Vasca 等<sup>[32]</sup> 缺乏的应用研究;

4) 得到了邻居的权威性和正态分布的初始观点都有利于观点达成一致, 这一重要结论.

## 1 问题描述

首先, 回顾经典的有界置信观点动力学模型<sup>[24]</sup>:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{j \in N_i} \frac{(x_j(k) - x_i(k))}{|N_i|} \quad (1)$$

式中,  $i \in V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_i(k)$  表示个体  $i$  的观点值.  $N_i = N(i, x(k)) = \{j \in V | |x_j(k) - x_i(k)| \leq \varepsilon\}$  表示个体  $i$  所有邻居的集合,  $|N_i|$  表示个体  $i$  的邻居数目, 其中  $\varepsilon$  为置信度阈值.

通过模型 (1) 可知, 个体  $i$  的邻居对其影响权重全部相同即其权重都为  $1/|N_i|$ . 事实上, 不同个体具有不同的认知水平和不一样的教育背景, 个体受影响程度或被其他个体影响的程度是不同的. 另一方面, 个体  $i$  的观点值更新依赖于  $|x_j(k) - x_i(k)|$ , 即邻居  $j$  对个体  $i$  的吸引力与观点差异值  $|x_j(k) - x_i(k)|$  成正比. 实际上, 个体与邻居的观点差异值越大, 其对个体的影响越小. 为此, 本文提出一个具有类万有引力的有界置信观点动力学模型:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{j \in N_i} w_{ij}(k)(x_j(k) - x_i(k)) \tag{2}$$

式中, 社会影响权重  $w_{ij}(k)$  为:

$$w_{ij}(k) = \begin{cases} \frac{\tanh\left(\frac{|N_j|}{1\,000(x_j(k) - x_i(k))^2}\right)}{|N_i|}, & j \in N_i \\ 0, & j \notin N_i \end{cases} \tag{3}$$

由于社会影响权重  $w_{ij}(k)$  中:

$$d_{ij}(k) = \tanh\left(\frac{|N_j|}{1\,000(x_j(k) - x_i(k))^2}\right) \tag{4}$$

是受万有引力表达式的启发<sup>[27]</sup>, 故称观点动力学模型 (2) 为具有类万有引力的有界置信观点动力学模型.

众所周知, 万有引力的大小与物体的质量以及两个物体之间的距离有关. 物体的质量越大, 它们之间的万有引力就越大; 物体之间的距离越远, 它们之间的万有引力越小. 根据社会心理学中的认知理论可知<sup>[33]</sup>, 个体权威性或者社会话语权越大, 其影响力 (权重) 越大; 个体与邻居的观点差异值越大, 邻居对其影响应该越小<sup>[34]</sup>. 根据上述关系, 将万有引力与影响力对应, 物体的质量与个体权威性对应, 物体之间的距离与观点差异值对应. 另一方面, 类似于经典的 Hegselmann-Krause 模型, 保证权重在  $[0, 1]$  之间, 故引入  $\tanh(\cdot)$  函数给予保证. 综上所述, 便可得到权重式 (4). 此外, 在本文的第 4 节中, 应用所提出的观点动力学模型研究社会心理学中的“权威效应”和“非零和效应”. 从应用结果可进一步地说明权重式 (4) 的合理性.

事实上,  $d_{ij}$  描述了个体  $j$  与个体  $i$  观点值越接近, 彼此间的影响也就越大. 此外,  $|N_j|$  描述了个体  $i$  的邻居  $j$  的权威性或者社会话语权<sup>[27]</sup>. 从而本文提出的模型也很好地描述了, 在一个社会中, 拥有大量人脉资源的人享有更多的话语权, 对他人的社会影响也就更大. 注意到, 如果  $d_{ij} = 1$ , 则具有类万有引力的有界置信观点动力学模型 (2) 退化经典 Hegselmann-Krause 模型 (1). 事实上,  $d_{ij}(k)$  是一个关于个体  $j$  邻居的个数  $N(j, x(k))$  和个体  $i$  与个体  $j$  观点值之差  $x_j(k) - x_i(k)$  的函数. 易知个体  $j$  的邻居数越多, 与个体  $i$  的观点值相差越小, 则其对个体  $i$  的差异影响权重越大, 其函数关系见图 1.

根据本文提出的具有类万有引力的有界置信观点动力学模型 (2) 可知, 个体  $j$  对个体  $i$  的影响由  $w_{ij}(k)(x_j(k) - x_i(k))$  所决定, 其函数关系见图 2.

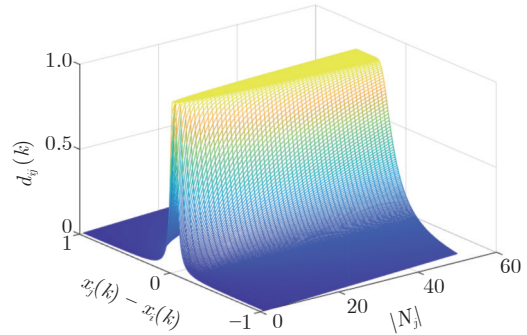


图 1  $d_{ij}(k)$  关于  $|N_j|$  和  $x_j(k) - x_i(k)$  的函数图  
Fig.1 The trajectories of  $d_{ij}(k)$  with respect to  $|N_j|$  and  $x_j(k) - x_i(k)$

由图 2 可知, 当  $x_j(k) - x_i(k)$  一定时, 个体  $j$  的邻居数  $N(j, x(k))$  越多, 其对个体  $i$  的影响越大. 当个体  $j$  的邻居数  $N(j, x(k))$  一定时, 个体  $j$  与个体  $i$  的观点值之差  $x_j(k) - x_i(k)$  越大, 个体  $i$  的观点值受到个体  $j$  的影响先增大后减小. 因此, 要想某个个体能对指定个体施加更大的影响, 需要折中进行考虑.

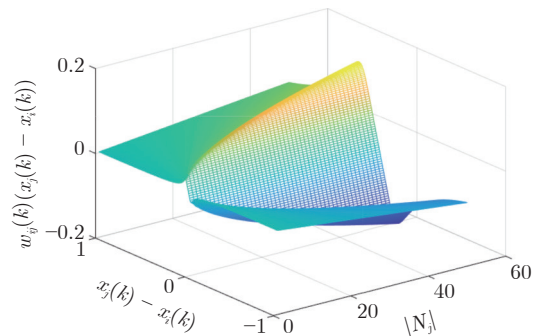


图 2 个体  $j$  对个体  $i$  观点的影响  
Fig.2 The influence of individual  $j$  on the opinion of individual  $i$

本文主要研究具有类万有引力的有界置信模型 (2) 的观点演化问题, 给出了观点收敛的充分条件, 并将所提出的观点动力学模型应用到社会心理学中的“权威效应”和“非零和效应”.

## 2 收敛性分析

本节将分析具有类万有引力的有界置信观点动力学模型 (2) 的收敛性.

**定义 1.** 在观点动力学模型 (2) 中, 对任意个体  $i \in V$  的初始观点值  $x_i(0)$ , 如果存在  $x_i^* \in \mathbf{R}$ , 使得:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = x_i^*$$

则称模型 (2) 收敛. 特别地, 如果存在定常数  $\alpha \in \mathbf{R}$ , 使得:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = \alpha$$

则称观点达成一致。

**定理 1.** 对于任意观点初值  $x_i(0) \in [0, 1], i \in V$ , 观点动力学模型 (2) 收敛。

**证明.** 模型 (2) 可重写为:

$$x_i(k+1) = \sum_{j \in N_i} w_{ij}(k) x_j(k) + \left(1 - \sum_{j \in N_i} w_{ij}(k)\right) x_i(k) \quad (5)$$

模型 (5) 可进一步写为:

$$x(k+1) = \mathbf{A}(k, x(k)) x(k) \quad (6)$$

式中, 置信矩阵  $\mathbf{A}(k, x(k))$  的元素  $a_{ij}(k)$  为:

$$a_{ij}(k) = \begin{cases} w_{ij}(k), & i \neq j \\ 1 - \sum_{j \in N_i \setminus \{i\}} w_{ij}(k), & i = j \end{cases} \quad (7)$$

易知社会影响矩阵  $\mathbf{A}(k, x(k))$  是行随机矩阵。注意到, 对任意的  $\theta \geq 0$ , 易得  $0 \leq \tanh(\theta) \leq 1$ 。则由式 (3) 可知,  $\sum_{j \in N_i \setminus \{i\}} w_{ij}(k) \in (0, 1)$ 。故:

$$1 - \sum_{j \in N_i \setminus \{i\}} w_{ij}(k) > 0$$

即  $\mathbf{A}(k, x(k))$  的对角线元素大于 0。

另一方面, 当个体  $j$  与个体  $i$  的观点值之差大于置信阈值时即  $j \notin N_i$ , 则  $w_{ij}(k) = 0$ 。类似地,  $i \notin N_j$ , 则  $w_{ji}(k) = 0$ 。因此,  $a_{ij}(k) = 0$  当且仅当  $a_{ji}(k) = 0$ ,  $\forall i, j \in V$ 。此外, 易知  $\mathbf{A}(k, x(k))$  中一直存在正元素, 即存在  $\delta > 0$ , 使得  $\mathbf{A}(k, x(k))$  的最小正元素大于  $\delta$ 。

综上所述, 矩阵  $\mathbf{A}(k, x(k))$  满足文献 [36] 给出模型收敛的充分条件, 从而模型 (6) 收敛。故观点动力学模型 (2) 收敛。□

根据定理 1, 可得下列推论。

**推论 1.** 对于任意观点初值  $x_i(0) \in [0, 1], i \in V$ , 如果观点动力学模型 (6) 在经过  $k_\tau$  次演化后观点达成一致, 则置信矩阵  $\mathbf{A}(k, x(k)) = (1/n)\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T, k \geq k_\tau$ , 其中  $\mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T$ 。

**证明.** 如果观点经过  $k_\tau$  次演化后达成一致, 即  $|x_i(k) - x_j(k)| \rightarrow 0, \forall i, j \in V, k \geq k_\tau$  且  $N_i = N_j = n$ , 则:

$$\tanh\left(\frac{|N_j|}{1000(x_j(k) - x_i(k))^2}\right) = 1, k \geq k_\tau$$

由式 (3) 可得:

$$w_{ij}(k) = \frac{\tanh\left(\frac{|N_j|}{1000(x_j(k) - x_i(k))^2}\right)}{|N_i|} = \frac{1}{n}, k \geq k_\tau$$

进一步地, 根据式 (7) 可知,  $a_{ij} = 1/n, k \geq k_\tau$ 。□  
为了得到进一步的结果, 令:

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(k)$$

**推论 2.** 考虑观点动力学模型 (2), 对于任意观点初值  $x_i(0) \in [0, 1], i \in V$ 。如果置信阈值  $\varepsilon = 1$  且:

$$w_{ij}(k) = \frac{\tanh\left(\frac{|N_j|}{1000(x_j(k) - x_i(k))^2}\right)}{|N_i|} = \frac{1}{n}, k \geq k_\tau \quad (8)$$

则

$$\bar{x}(k) = \bar{x}(0), k \geq 0$$

**证明.** 由于置信阈值  $\varepsilon = 1$ , 则所有个体均可交流, 即  $|N_i| = n$ 。由观点动力学模型 (2) 可知:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(k+1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(k) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j \in N_i} w_{ij}(k) (x_j(k) - x_i(k)) \right) \quad (9)$$

注意到, 邻居  $j$  对个体  $i$  的影响为  $w_{ij}(k)(x_j(k) - x_i(k))$ , 类似地, 邻居  $i$  对个体  $j$  的影响为  $w_{ji}(k)(x_i(k) - x_j(k))$ , 然而,  $w_{ij}(k) = w_{ji}(k)$ 。易得:

$$w_{ij}(k)(x_j(k) - x_i(k)) + w_{ji}(k)(x_i(k) - x_j(k)) = 0$$

则式 (9) 可退化为:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(k+1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(k)$$

即

$$\bar{x}(k+1) = \bar{x}(k), k \geq 0$$

故  $\bar{x}(k) = \bar{x}(0)$ 。□

第 2 节主要考虑的是置信阈值不变的情况。事实上, 观点动力学模型可看作一个谈判的过程模型。一方面, 个体期望它的邻居在每一轮谈判中显著地向它的观点靠拢, 以便继续谈判, 衰减置信阈值可描述这一情景<sup>[37]</sup>; 另一方面, 具有衰减置信阈值的观点动力学模型可应用于研究图中的社区检测<sup>[37]</sup>和社会心理学中的“非零和效应”。故第 3 节将分析基于衰减置信阈值的观点动力学模型。此外, 本文将利用建立的具有衰减置信阈值的 Hegselmann-Krause 观点动力学模型研究社会心理学中的“非零

和效应”(见第 4.2 节).

### 3 衰减的置信阈值

为了描述个体在谈判的过程中, 个体期望它的邻居在每一轮谈判中显著地向它的观点靠拢, 以便继续谈判. 本节考虑下列具有衰减置信阈值的观点动力学模型:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{j \in N_i^p} w_{ij}^\rho(k) (x_j(k) - x_i(k)) \quad (10)$$

式中:

$$w_{ij}^\rho(k) = \begin{cases} \frac{\tanh\left(\frac{|N_j^\rho|}{1000(x_j(k) - x_i(k))^2}\right)}{|N_i^\rho|}, & j \in N_i^\rho \\ 0, & j \notin N_i^\rho \end{cases} \quad (11)$$

和

$$N_i^\rho = \{j \in V \mid |x_j(k) - x_i(k)| \leq R\rho^k\} \quad (12)$$

式中,  $R > 0$  和  $0 < \rho \leq 1$ .

**定理 2.** 考虑观点动力学模型 (10), 对于任意观点初值  $x_i(0) \in [0, 1]$ ,  $i \in V$ , 观点  $x_i(k)$ ,  $i \in V$  是收敛的. 进一步地, 令  $x_i^*$  表示个体  $i$  的最终观点值, 对于所有的  $k \in V$ , 则:

$$|x_i(k) - x_i^*| \leq \frac{R}{1-\rho} \rho^k \quad (13)$$

**证明.** 根据式 (10), 有:

$$|x_i(k+1) - x_i(k)| = \left| \sum_{j \in N_i^\rho} w_{ij}(k) (x_j(k) - x_i(k)) \right| \leq \sum_{j \in N_i^\rho} w_{ij}(k) |x_j(k) - x_i(k)|$$

由式 (12), 可得:

$$|x_i(k+1) - x_i(k)| \leq \sum_{j \in N_i^\rho} w_{ij}(k) R\rho^k$$

注意到,  $w_{ij}(k) \in (0, 1/|N_i^\rho|]$ , 则  $\sum_{j \in N_i^\rho} w_{ij}(k) \leq 1$ , 故:

$$|x_i(k+1) - x_i(k)| \leq R\rho^k \quad (14)$$

令  $\forall k, \tau = 0, 1, \dots$ , 则由式 (14) 可知:

$$|x_i(k+\tau) - x_i(k)| \leq \sum_{l=0}^{\tau-1} |x_i(k+l+1) - x_i(k+l)| \leq \sum_{l=0}^{\tau-1} R\rho^{k+l}$$

因此:

$$|x_i(k+\tau) - x_i(k)| \leq \frac{R}{1-\rho} \rho^k (1 - \rho^\tau) \leq \frac{R}{1-\rho} \rho^k \quad (15)$$

式中,  $\rho \in (0, 1)$ . 易知序列  $x_i(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  是一个 Cauchy 序列, 故其收敛. 通过令式 (15) 中的  $\tau \rightarrow \infty$ , 则可得式 (13).  $\square$

类似于观点动力学模型 (2), 如果置信度阈值  $\varepsilon = 1$  且式 (11) 退化为式 (8). 则观点动力学模型 (10) 具有和推论 2 一样的结论.

## 4 观点动力学模型的应用

### 4.1 权威效应

本节将利用本文提出的具有类万有引力的有界置信观点动力学模型 (2), 研究普遍存在的社会心理学现象: 权威效应. 所谓权威效应是指一个人要是地位高、有威信、受人敬重, 那他所说的话及所做的事就容易引起别人重视, 并让他们相信其正确性. 权威效应的普遍存在, 一方面是由于人们总认为权威人物往往是正确的楷模, 服从他们会使自己具备安全感, 增加不会出错的保险系数; 另一方面, 由于人们总认为权威人物的要求往往和社会规范相一致, 按照权威人物的要求去做, 会得到各方面的赞许和奖励. 在现实生活中, 有很多利用权威效应的例子, 比如做广告时请权威人物赞誉某种产品, 在辩论说理时引用权威人物的话作为论据等. 在人际交往中, 利用权威效应, 能够引导或改变对方的观点和行为.

考虑由 10 个个体组成的社会网络, 设初始观点值为:

$$x(0) = [0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.5, 0.5, 0.6, 0.7]^T$$

置信阈值  $\varepsilon = 0.2$ . 根据初始观点值和置信阈值可得初始时刻个体之间的网络结构, 如图 3 所示 (图中自环未画出). 易知个体 4 具有 8 个邻居即  $|N_4| = 8$ , 具有最大的权威性或者话语权.

当观点动力学模型 (2) 中  $w_{ij}$  为式 (8) 时, 即不考虑邻居的权威性, 其观点演化曲线如图 4(a) 所示, 其中形成两簇的最终观点值分别为 0.51 和 0.21. 当观点动力学模型 (2) 中  $w_{ij}$  为式 (3) 时, 即考虑邻居的权威性, 其观点演化曲线如图 4(b) 所示, 其中形成两簇的最终观点值分别为 0.46 和 0.24. 出现这一现象是由于受到了权威者个体 4 的影响 (图 4 中虚线为个体 4 的观点曲线), 两簇观点都向个体 4 的观点值靠近.

为了说明初始条件的客观性, 可随机选取一个

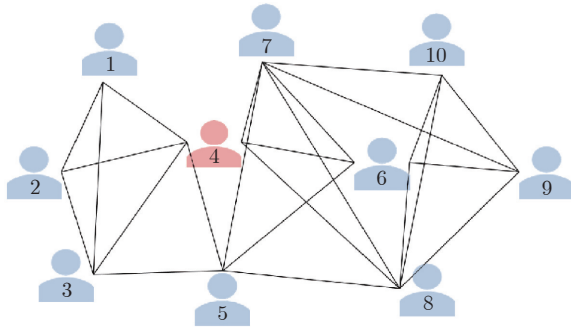


图 3 网络拓扑结构 (个体 4 为权威个体)  
 Fig.3 Network structure (individual 4 is the authoritative individual)

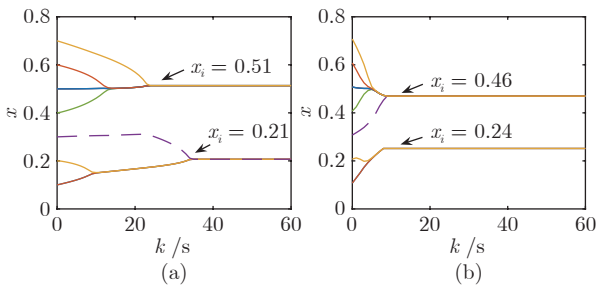


图 4 权威效应 (个体 4 为权威个体)  
 Fig.4 Authority effect (individual 4 is the authoritative individual)

个体为权威个体, 不失一般性地, 选取个体 5 为权威个体, 个体初始观点值可设为  $x(0) = [0.25, 0.25, 0.32, 0.45, 0.5, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.8]^T$ , 其网络拓扑图如图 5 所示. 易知, 个体 5 具有 7 个邻居即  $|N_5| = 7$ . 类似地, 其观点演化曲线如图 6 所示, 可以看出, 由于受到权威个体 5 的影响 (图 6 中虚线为个体 5 的观点曲线), 两簇观点都向个体 5 的观点值靠近.

4.2 非零和效应

本节将利用本文建立的具有衰减置信阈值的观点动力学模型 (10), 研究社会心理学中“非零和效应”. “非零和效应”是一种合作下的博弈, 博弈中做一定的让步, 双方的收益或损失的总和不是零, 观点达成一致, 谈判便可成功<sup>[35]</sup>. 另一方面, 衰减置信阈值可描述个体期望它的邻居在每一轮谈判中显著地向它的观点靠拢, 以便继续谈判.

为了利用本文提出的模型 (10) 研究社会心理学中“非零和效应”, 令  $R = 0.8$ ,  $\rho = 0.7$ , 当个体观点初值  $x_i(0) \in [0, 1]$ ,  $i \in V$  均匀分布时, 观点动力学模型 (10) 的仿真结果如图 7(a) 所示, 观点达到了一致, 说明谈判取得成功, 实现了“非零和效应”. 当个体观点初值  $x(0) \in [0, 1]^n$  正态分布时, 其结果

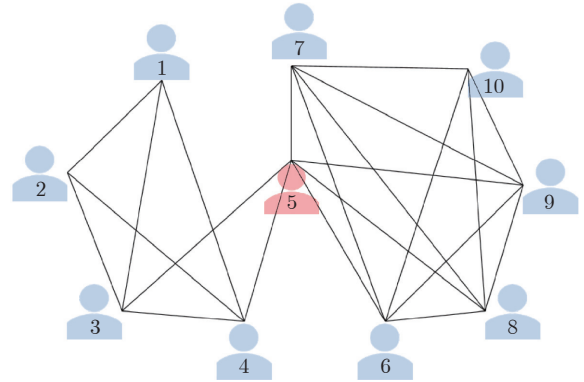


图 5 网络拓扑结构 (个体 5 为权威个体)  
 Fig.5 Network structure (individual 5 is the authoritative individual)

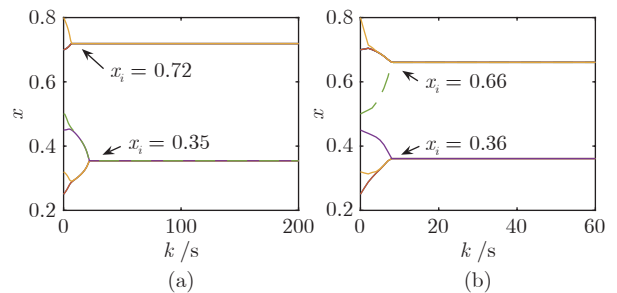


图 6 权威效应 (个体 5 为权威个体)  
 Fig.6 Authority effect (individual 5 is the authoritative individual)

如图 7(b) 所示, 观点达到一致性的速度比个体观点初值均匀分布情况快, 说明谈判过程中, 当持中立观点的人较多时, 谈判取得成功的时间更少.

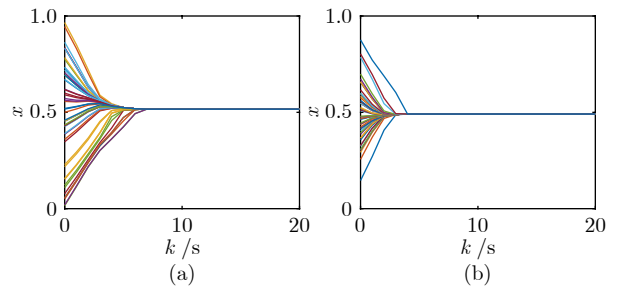


图 7 非零和效应  
 Fig.7 Sum non-zero effect

5 仿真分析

5.1 基于固定置信阈值的模型仿真分析

本节将通过仿真分析本文所得到的理论结果. 设群体总个体数  $n = 50$ , 置信度阈值  $\varepsilon = 0.3$ , 观点初值  $x_i(0) \in [0, 1]$ ,  $i \in V$  均匀分布. 将改进的 Heg-

selmann-Krause 观点动力学模型<sup>[32]</sup>与本文提出的观点动力学模型 (2) 进行对比, 其观点演化曲线分别如图 8(a) 和图 8(b) 所示, 可以看出, 在改进的 Hegselmann-Krause 模型<sup>[32]</sup>中, 观点形成拟一致. 有趣的是在具有类万有引力的有界置信模型 (2) 中, 观点则出现两极分化. 这是因为在文献 [32] 改进的 Hegselmann-Krause 模型中, 观点相似的个体不再进行交互, 而本文提出的具有类万有引力的有界置信模型 (2) 中, 考虑了影响权重的互异性.

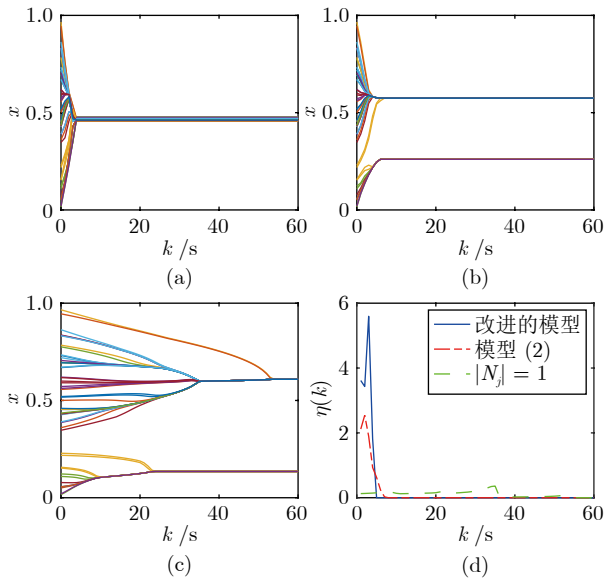


图 8 初值为均匀分布时的观点演化

Fig.8 Opinion evolution when the initial value is uniformly distributed

当在具有类万有引力的有界置信模型 (2) 中不考虑个体权威性时即  $|N_j| = 1$ , 其观点演化曲线如图 8(c) 所示, 观点仍然达到两极分化, 但其观点形成两极分化的速度比图 8(b) 的慢, 说明权威个体有利观点的演化速度.

为了描述观点演化过程中所有观点的相对变化, 定义变量:

$$\eta(k) = \sum_{i=1}^n |x_i(k) - x_i(k-1)|$$

其曲线如图 8(d) 所示. 可以看出, 在文献 [32] 改进的 Hegselmann-Krause 模型中, 观点相对变化较大, 而在具有类万有引力的有界置信模型 (2) 中, 观点相对变化较小; 另一方面, 在不考虑权威个体的模型 (2) 中, 观点相对变化最小, 但观点收敛速度最慢. 特别地, 如果  $\eta(k) = 0$ , 则群体观点收敛.

在现实生活中, 针对一些 (如不感兴趣的) 话题, 大多数人的观点比较趋于中立, 而只有少部分

人的观点比较极端. 为此, 设个体观点初值  $x_i(0) \in [0, 1], i \in V$  为正态分布. 将改进的 Hegselmann-Krause 模型与本文建立的有界置信模型 (2) 进行比较, 其观点曲线如图 9(a) 和图 9(b) 所示. 可以看出, 基于有界置信模型 (2) 的观点达到一致, 而基于改进的 Hegselmann-Krause 模型的观点不收敛, 这是因为改进的 Hegselmann-Krause 模型中, 观点相似的个体不再进行交互.

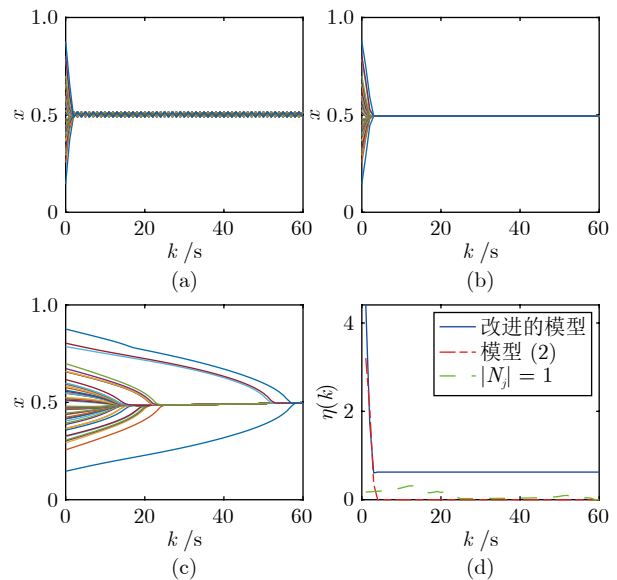


图 9 初值为正态分布时的观点演化

Fig.9 Opinion evolution when the initial value is normally distributed

当具有类万有引力的有界置信模型 (2) 不考虑个体权威性时即  $|N_j| = 1$ , 其观点曲线如图 9(c) 所示, 可以看出, 基于观点动力学模型 (2) 的观点达到一致速度较慢. 根据  $\eta(k)$  的定义和图 9(d) 可知, 基于改进的 Hegselmann-Krause 模型的观点相对变化最大.

### 5.2 基于衰减置信阈值的模型仿真分析

本节将对具有衰减置信阈值的观点动力学模型 (10) 进行仿真分析. 设  $R = 0.3, \rho = 0.7$  和  $n = 50$ , 当观点初值  $x_i(0) \in [0, 1], i \in V$  均匀分布时, 观点动力学模型 (10) 形成了 3 个均匀的观点簇, 仿真结果如图 10(a) 所示. 当观点初值  $x(0) \in [0, 1]^n$  正态分布时, 其结果如图 10(b) 所示, 形成了 4 个观点簇. 总之, 基于衰减置信阈值的模型 (10) 的观点都是收敛的.

设  $N_c$  表示群体最终观点簇数,  $N_m$  表示群体最大观点簇中的个体数量. 在个体数  $n$  和观点初值  $x(0)$  以及阈值参数  $R$  都固定的情况下, 随着  $\rho$  的增

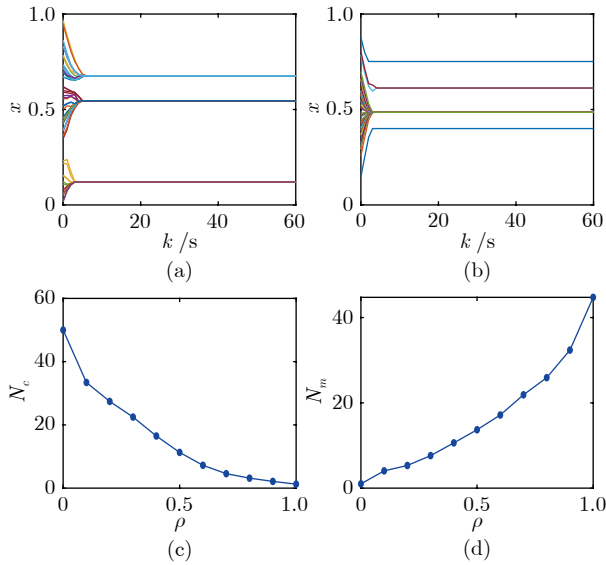


图 10 模型 (10) 观点演化

Fig. 10 Opinion evolution of model (10)

大, 群体最终观点簇数量  $N_c$  减少, 如图 10(c) 所示. 由图 10(d) 可知, 群体最大观点簇中个体数量  $N_m$  随着  $\rho$  的增大而增大. 特别地, 当  $N_c = 1$  时, 则群体观点达到一致性.

## 6 结束语

本文提出具有类万有引力的有界置信观点动力学模型, 描述了不同邻居对个体的观点影响权重不一样, 且个体观点的更新与观点之间的差值和邻居的权威性有关. 根据置信矩阵的性质证明了观点的收敛性, 在不考虑邻居权威性的条件下, 给出了最终观点平均值的显式表达式. 在衰减置信阈值的条件下, 得到了观点收敛速率的显式解. 利用本文提出的观点动力学模型, 研究了社会心理学中的“权威效应”和“非零和效应”. 仿真分析表明, 邻居的权威性和正态分布的初始观点都有利于观点达成一致.

## References

- Zhou B, Lin Z. Consensus of high-order multi-agent systems with large input and communication delays. *Automatica*, 2014, **50**: 452–464
- Chen Shi-Ming, Shao Sai, Jiang Gen-Lan. Distributed event-triggered fixed-time scaled consensus control for second-order multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(1): 261–270  
(陈世明, 邵赛, 姜根兰. 基于事件触发二阶多智能体系统的固定时间比例一致性. 自动化学报, 2022, **48**(1): 261–270)
- Zhou B. Consensus of delayed multi-agent systems by reduced-order observer-based truncated predictor feedback protocols. *IET Control Theory & Applications*, 2014, **8**(16): 1741–1751
- Wang Long, Tian Ye, Du Jin-Ming. Opinion dynamics in social networks. *Scientia Sinica: Informationis*, 2018, **48**(1): 3–23  
(王龙, 田野, 杜金铭. 社会网络上的观点动力学. 中国科学: 信息科学, 2018, **48**(1): 3–23)
- Ghaderi J, Srikant R. Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: Equilibrium and convergence rate. *Automatica*, 2014, **50**(12): 3209–3215
- Xia W, Ye M, Liu J, Cao M, Sun X M. Analysis of a nonlinear opinion dynamics model with biased assimilation. *Automatica*, 2020, **120**: Article No. 109113
- Liu C, Wu X, Niu R, Aziz-Alaoui M A, Lü J. Opinion diffusion in two-layer interconnected networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2021, **68**(9): 3772–3783
- Ye M, Qin Y, Govaert A, Anderson B D, Cao M. An influence network model to study discrepancies in expressed and private opinions. *Automatica*, 2019, **107**: 371–381
- Liu Qing-Song, Li Ming-Peng, Chai Li. Analysis and application of multidimensional opinion dynamics on social networks with oblivious individuals. *Acta Automatica Sinica*, DOI: 10.16383/j.aas.c210091  
(刘青松, 李明鹏, 柴利. 具有遗忘群体的社会网络多维观点动力学分析与应用. 自动化学报, DOI: 10.16383/j.aas.c210091)
- Hou J, Li W, Jiang M. Opinion dynamics in modified expressed and private model with bounded confidence. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2021, **574**: Article No. 125968
- Zheng Wei, Zhang Zhi-Ming, Liu He-Xin, Zhang Ming-Quan, Sun Fu-Chun. Dynamic feedback mean square consensus control based on linear transformation for leader-follower multi-agent systems. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(10): 2474–2485  
(郑维, 张志明, 刘和鑫, 张明泉, 孙富春. 基于线性变换的领导-跟随多智能体系统动态反馈均方一致性控制. 自动化学报, 2022, **48**(10): 2474–2485)
- Yi J W, Chai L, Zhang J. Average consensus by graph filtering: New approach, explicit convergence rate, and optimal design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, **65**(1): 191–206
- Liu Q, Zhou B. Consensus of discrete-time multi-agent systems with state, input, and communication delays. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, **50**(11): 4425–4437
- Liu Q. Pseudo-predictor feedback control for multi-agent systems with both state and input delays. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2021, **8**(11): 1827–1836
- French Jr J R. A formal theory of social power. *Psychological Review*, 1956, **63**(3): 181–194
- DeGroot M H. Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical Association*, 1974, **69**(345): 118–121
- Friedkin N, Johnsen E. Social influence networks and opinion change. *Advances Group Processes*, 1999, **16**: 1–29
- Parsegov S E, Proskurnikov A V, Tempo R, Friedkin N E. Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(5): 2270–2285
- Tian Y, Wang L. Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: An issue-based perspective. *Automatica*, 2018, **96**: 213–223
- Deffuant G, Neau D, Amblard F, Weisbuch G. Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems*, 2000, **3**: 87–98
- Zhang J, Hong Y. Opinion evolution analysis for short-range and long-range Deffuant-Weisbuch models. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2013, **392**(21): 5289–5297

- 22 Dong Y, Ding Z, Martínez L, Herrera F. Managing consensus based on leadership in opinion dynamics. *Information Sciences*, 2017, **397**: 187–205
- 23 Mei W, Friedkin N E, Lewis K, Bullo F. Dynamic models of appraisal networks explaining collective learning. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, **63**(9): 2898–2912
- 24 Hegselmann R, Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 2002, **5**(3): 1–33
- 25 Bullo F, Cortes J, Martinez S. *Distributed Control of Robotic Networks*. Princeton: Princeton University Press, 2009.
- 26 Cody W F. Authoritative effect of FDA regulations. *The Business Lawyer*, 1969, **24**: 479–491
- 27 Chen Z, Lan H. Dynamics of public opinion: Diverse media and audiences' choices. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 2021, **24**(2): 1–21
- 28 Canuto C, Fagnani F, Tilli P. An Eulerian approach to the analysis of Krause's consensus models. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2012, **50**(1): 243–265
- 29 Su W, Chen G, Hong Y. Noise leads to quasi-consensus of Hegselmann-Krause opinion dynamics. *Automatica*, 2017, **85**: 448–454
- 30 Yang Y, Dimarogonas D V, Hu X. Opinion consensus of modified Hegselmann-Krause models. *Automatica*, 2014, **50**(2): 622–627
- 31 Haskovec J. A simple proof of asymptotic consensus in the Hegselmann-Krause and Cucker-Smale models with normalization and delay. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2021, **20**(1): 130–148
- 32 Vasca F, Bernardo C, Iervolino R. Practical consensus in bounded confidence opinion dynamics. *Automatica*, 2021, **129**: Article No. 109683
- 33 Gerrig R J. *Psychology and Life* (20th Edition). New York: Pearson, 2013.
- 34 Mei W, Bullo F, Chen G, Hendrickx J, Dörfler F. Rethinking the micro-foundation of opinion dynamics: Rich consequences of the weighted-median mechanism [Online], available: <https://arxiv.org/abs/1909.06474>, January 26, 2022
- 35 Swingle P G, Santi A. Communication in non-zero-sum games. *Journal of Personality and Social Psychology*, 1972, **23**(1): 54–63
- 36 Lorenz J. A stabilization theorem for dynamics of continuous opinions. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2005, **355**(1): 217–223
- 37 Morarescu I C, Girard A. Opinion dynamics with decaying confidence: Application to community detection in graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(8): 1862–1873



**刘青松** 武汉科技大学信息科学与工程学院副教授。2019 年获得哈尔滨工业大学博士学位。主要研究方向为社会网络, 观点动力学分析, 时滞系统和多智能体系统。

E-mail: qingsongliu@wust.edu.cn

**(LIU Qing-Song** Associate professor at the School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology. He received his Ph.D. degree from Harbin Institute of Technology in 2019. His research interest covers social networks, opinion dynamics analysis, time-delay systems, and multi-agent systems.)



**习晓苗** 武汉科技大学信息科学与工程学院硕士研究生。2020 年获得湖南科技大学学士学位。主要研究方向为社会网络, 观点动力学分析。

E-mail: xixiaomiaoy@163.com

**(XI Xiao-Miao** Master student at the School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology. She received her bachelor degree from Hunan University of Science and Technology in 2020. Her research interest covers social networks and opinion dynamics analysis.)



**柴利** 武汉科技大学信息科学与工程学院教授。2002 年获得香港科技大学博士学位。主要研究方向为分布式优化, 滤波器组框架, 图信号处理和网络化控制系统。本文通信作者。

E-mail: chaili@wust.edu.cn

**(CHAI Li** Professor at the School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology. He received his Ph.D. degree from Hong Kong University of Science and Technology in 2002. His research interest covers distributed optimization, filter bank frames, graph signal processing, and networked control systems. Corresponding author of this paper.)