

基于分数布朗运动过程模型的混合随机退化设备剩余寿命预测

高旭东¹ 胡昌华¹ 张建勋¹ 杜党波¹ 喻勇²

摘要 在实际工程中,设备往往是由多个不同类型元件或部件构成的集合体,其总体性能退化程度是由内部多种随机退化过程综合影响下的结果.不同于现有文献主要采用无记忆效应的单一线性或非线性形式随机过程模型来描述设备的真实退化,首先建立一种基于分数布朗运动(Fractional Brownian motion, FBM)的混合随机退化模型,用以刻画退化过程中的记忆效应与长期依赖性;进一步,在退化模型里同时引入双随机效应,用以描述不同设备之间的退化差异性,并基于弱收敛性理论推导出首达时间(First hitting time, FHT)意义下剩余寿命(Remaining useful life, RUL)概率密度函数(Probability density function, PDF)的近似解析表达形式;然后,给出一种共性参数离线估计和随机参数实时更新的策略,进而实现了剩余寿命的实时预测;最后,通过数值仿真例子和陀螺仪的实际退化数据,验证了该方法的有效性和具有潜在的工程应用价值.

关键词 分数布朗运动,记忆效应,剩余寿命,共性参数,随机参数,陀螺仪

引用格式 高旭东,胡昌华,张建勋,杜党波,喻勇.基于分数布朗运动过程模型的混合随机退化设备剩余寿命预测.自动化学报,2023,49(9):1989-2002

DOI 10.16383/j.aas.c200683

Remaining Useful Life Prediction for Mixed Stochastic Deteriorating Equipment Based on Fractional Brownian Motion Process

GAO Xu-Dong¹ HU Chang-Hua¹ ZHANG Jian-Xun¹ DU Dang-Bo¹ YU Yong²

Abstract As a result of the interactive influence of a variety of internal random degradation processes, the overall performance of industrial equipment composed of multiple types of components usually deteriorates with its usage. Unlike most of the existing methods which describe the actual degradation of equipment via a single linear or non-linear stochastic process model without memory effect, a new mixed stochastic degradation model based on Fractional Brownian motion (FBM) is proposed in this paper. Firstly, FBM is adopted to reflect the memory effect and long-term dependence of the degradation process. Then, double random effects are integrated into the degradation model to depict the variability between different units. Under the concept of the first hitting time (FHT), an approximate analytical expression of the probability density function (PDF) of the remaining useful life (RUL) is derived based on the weak convergence theory. Besides, a strategy of offline estimation of universal parameters and online update of random parameters is given to further realize real-time RUL prediction. Finally, numerical simulation examples and a case study of the degradation data of the gyroscope are provided to verify the effectiveness and potential engineering application value of the proposed method.

Key words Fractional Brownian motion (FBM), memory effect, remaining useful life (RUL), common parameters, random parameters, gyroscope

Citation Gao Xu-Dong, Hu Chang-Hua, Zhang Jian-Xun, Du Dang-Bo, Yu Yong. Remaining useful life prediction for mixed stochastic deteriorating equipment based on fractional Brownian motion process. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(9): 1989-2002

随着科学技术的不断进步与发展,在实际工程

中,设备内部结构的复杂性、运行载荷和外部环境的多变性也随之不断增加,导致设备的退化过程通常具有随机性、阶段性、多样性、相关性和混合性等特征^[1-2],这给设备的健康管理带来了一定的难度和挑战.为了避免由于退化失效而造成人员与财产损失,有必要研究该类设备的退化建模与剩余寿命(Remaining useful life, RUL)预测问题,进而保障其安全、可靠运行.但是,如何准确预测此类随机退化设备的剩余寿命仍是目前研究的难点与热点问题.在实际工程中,常常会遇到混合退化过程的设

收稿日期 2020-08-24 录用日期 2020-11-04
Manuscript received August 24, 2020; accepted November 4, 2020

国家自然科学基金(62103433, 62073336, 62227814, 62233017, 62203462)资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62103433, 62073336, 62227814, 62233017, 62203462)

本文责任编辑 董峰

Recommended by Associate Editor DONG Feng

1. 火箭军工程大学导弹工程学院 西安 710025 2. 西北核技术研究院 西安 710000

1. College of Missile Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025 2. Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710000

备^[1-2], 但现有文献处理方法是设备的退化过程简化成单一的线性或非线性 Wiener 过程^[3-9], 可以比较容易得到设备 RUL 的解析解. 例如对于具有线性扩散项的维纳退化过程, Si 等^[3] 研究了三层不确定因素影响下线性随机退化系统的 RUL 预测方法; Huang 等^[4] 在文献 [3] 基础上, 提出一种带自适应漂移系数的隐线性 Wiener 模型, 用以描述设备的退化轨迹, 引入自适应漂移参数及测量噪声, 同时考虑设备历史数据及测量噪声问题, 进一步提高了设备 RUL 的预测精度; 王玺等^[5] 基于线性 Wiener 过程, 针对新研发光电产品提出一种剩余寿命自适应预测方法, 克服了现有 RUL 预测方法中, 当前时刻估计的随机参数与上一时刻随机参数的后验估计完全相等的潜在假设, 进而提高了 RUL 的预测准确性.

对于具有非线性扩散项的 Wiener 退化过程, Si 等^[6] 使用时空变换方法, 获得了 RUL 的近似解析解. 司小胜等^[7] 考虑了退化过程中的测量不确定性, 然后根据维纳过程的统计性质, 建立一个状态空间模型预测 RUL, 但是 RUL 的分布中未考虑测量不确定性. 郑建飞等^[8] 在文献 [7] 基础上, 还考虑了个体差异的不确定性, 并在 RUL 分布的推导中考虑了测量不确定性和个体差异性, 进一步提高了 RUL 的预测精度. Cai 等^[9] 考虑了退化量与监测量之间的非线性关系, 推导得到了其 RUL 的概率密度函数 (Probability density function, PDF), 且通过激光器数据验证了该方法能够明显提高预测精度并降低预测结果的不确定性.

但是, 这些退化过程都有两个潜在的假设: 1) 假设设备的退化过程是一种单一的线性或非线性退化形式, 忽略了各种退化形式在整个退化过程所占的比重是不同的, 影响效果是有差别的; 2) 假设设备的退化过程是一种无记忆效应马尔科夫过程, 忽略了监测数据之间可能存在的长期依赖性和相关性对 RUL 的预测具有一定的影响. 例如在发动机引擎性能退化数据^[10]、高炉的性能退化数据^[11-12]、锂电池的性能退化数据^[13] 等数据中发现了记忆效应, 即未来退化状态受到当前状态与历史状态的共同影响. 文献 [14] 在分数布朗运动 (Fractional Brownian motion, FBM) 的框架下, 建立了设备的退化模型, 使用复杂弱收敛定理将 FBM 近似为标准布朗运动 (Brownian motion, BM), 然后推导了 RUL 的 PDF. 文献 [15] 建立了考虑退化状态之间存在相关性的新型退化模型, 并将其应用于高炉与发动机性能退化数据中, 通过求取 RUL 数值 PDF 的方式验证了此方法的有效性和优越性. 文献 [16] 在文献 [15] 基础上, 使用更为简单的弱收敛理论推导了 RUL

的近似 PDF, 避免大量的数值积分, 同时考虑随机效应的影响, 并通过锂电池性能退化数据进行验证, 验证结果表明, 该方法能够有效提高 RUL 的预测精度. 但是, 现有基于 FBM 过程模型的设备 RUL 预测方法最大的不足是均未实时更新模型中的相关参数, 仅利用同批设备的历史退化数据对模型中的未知参数进行估计. 此外, 文献 [15] 从结构组成和退化机理两个方面分析了惯性导航陀螺仪的随机退化过程具有混合性特征. 相比于传统单一退化形式的 Wiener 过程对设备的随机退化过程建模, 通过建立混合随机退化模型, 能够进一步提高 RUL 预测精度. 文献 [15] 详细论述和证明了考虑退化过程的混合性, 能够提高设备 RUL 的预测精度.

鉴于此, 本文将重点研究在记忆效应影响下同时包含线性退化过程和非线性退化过程的混合随机退化设备建模与 RUL 预测问题. 主要关注以下 3 个问题: 1) 如何建立存在记忆效应的混合退化过程模型; 2) 如何在首达时间 (First hitting time, FHT) 条件下, 推导设备 RUL 的解析表达形式; 3) 如何根据监测数据实时更新退化模型参数, 并实现 RUL 分布的自适应更新. 针对以上 3 个问题, 本文首先建立了一种基于分数布朗运动的混合退化模型, 考虑了记忆效应对未来退化过程的影响; 进一步, 在弱收敛性理论和 FHT 的概念下, 推导了混合退化设备 RUL 的近似解析表达式; 然后, 利用共性参数离线估计和随机参数自适应更新的策略, 实现 RUL 的自适应预测; 最后, 将本文方法应用于数值仿真例子和陀螺仪的监测数据上进行验证.

1 基于 FBM 的混合随机退化模型

首先, 令 $X(t)$ 表示混合退化设备在 t 时刻的退化量. 基于上文的具体分析, 受记忆效应影响的混合退化设备模型由以下 3 部分组成^[15]: 1) 线性退化元件引起的线性退化过程; 2) 非线性退化元件引起的非线性退化过程; 3) 含有记忆效应的随机波动. 因此, 在文献 [11] 基础上, 在 t 时刻, 基于 FBM 混合退化模型可以表示为:

$$X(t) = \lambda t + \alpha \int_0^t \eta(\gamma; \beta) d\gamma + \sigma B_H(t) \quad (1)$$

式中, $X(0)$ 表示混合退化设备的初始退化状态, 为了不失一般性, 假设 $X(0) = 0$ (在实际中, 若 $X(0) \neq 0$, 可以通过平移手段将其转化为零^[16-17]). λt 代表混合退化设备的线性趋势, $\int_0^t \eta(\gamma; \beta) d\gamma$ 代表非线性退化趋势; 令 λ 和 α 为随机变量, 用于描述由结构差异、外部环境等差异引起的同批设备中不同个体差异性. β 和 σ 是共性参数, 用于反映同批设备的

共同特性^[18-19]. 为了刻画线性退化部分与非线性退化部分之间的相关性, 本文假设 λ 和 α 服从二维正态分布. 另外, $B_H(t)$ 为分数布朗运动, 描述了退化过程中带有记忆效应的随机波动性.

定义 1^[13, 20]. 赫斯特指数 H 的取值区间满足 $0 < H < 1$. 赫斯特指数为 H 的分数布朗运动, $B_H(t)$ 是一个定义在概率空间 (Ω, F, P) 上, 且协方差函数为:

$$\text{cov}(B_H(t)B_H(s)) = \frac{\sigma_B^2}{2} \left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H} \right) \quad (2)$$

的中心化高斯过程^[21]:

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t K_H(t-s) dB(s) \quad (3)$$

式中, $K_H(t-s)$ 定义为:

$$K_H(t-s) = \begin{cases} (t-s)^{H-\frac{1}{2}}, & 0 \leq s \leq t \\ (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}, & s < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数, 具体形式为:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (5)$$

由式 (3) 可以看出, FBM 是 BM 增量的非线性移动平均值^[20], 这进一步引入了记忆效应, 其中:

$$\sigma_B^2 = \Gamma(1-2H) \frac{\cos \pi H}{\pi H} \quad (6)$$

为了简化 σ_B 的计算, 假设式 (1) 中的 $B_H(t)$ 为标准 FBM^[13]. 标准 FBM 满足^[21]:

- 1) $B_H(0) = 0$ 且 $E(B_H(0)) = 0$;
- 2) $\forall t \geq 0, E(B_H(t)^2) = t^{2H}$;
- 3) 分数布朗运动具有自相似性和平稳增量;
- 4) 分数布朗运动的样本轨道是连续但几乎不可微的;
- 5) 当 $1/2 < H < 1$ 时, $B_H(t)$ 具有长期依赖性、相关性, 即若令 $r(n) = \text{cov}(B_H(1), B_H(n+1) - B_H(n))$ 则有 $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$.

因此对于任意的 $\lambda \in \mathbf{R}, \alpha \in \mathbf{R}, \sigma \in \mathbf{R}$ 当且仅当 $1/2 < H < 1$ 时, $X(t)$ 的增量具有长期相关性.

注 1. FBM 是一种具有长期依赖性、自相关性的连续非马尔科夫过程^[20], 其增量是固定且相关的, 并且引入了长程相关的结构^[22-23]. 赫斯特指数 H 可以测量整个退化轨迹之间的长期依赖性. 根据 H 的不同, FBM 可以分为三种类型, 当 $0 < H < 0.5$ 时, 退化轨迹是遵循均值回归的规则; 当 $H = 0.5$ 时, 退化轨迹是无记忆效应的随机游过程; 当 $0.5 < H <$

1 时, 未来的退化轨迹会沿当前的退化趋势发展.

注 2. 令 $\{S_t, t \in \mathbf{R}\}$ 是一个有平稳增量的随机过程且 $\{r(n), n \in \mathbf{N}^*\}$ 是由 $\forall n \in \mathbf{N}^*, r(n) = E(S_{n+1}S_n)$ 定义的序列, 当且仅当 $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} r(n) = \infty$ 时, 就可称 $\{S_t, t \in \mathbf{R}\}$ 具有长期相关性^[24].

2 基于混合随机退化模型的 RUL 预测

基于 FHT 的定义^[25], 当失效阈值为 ω 时, 目标设备在任意时间 t_k 的剩余寿命 L_k 定义如下:

$$L_k = \inf \{l_k : X(t_k + l_k) \geq \omega | X(t_k)\} \quad (7)$$

基于式 (1)、式 (7) 和弱收敛理论^[26] 推导得到目标设备 RUL 的近似 PDF, 如定理 1 所述. 定理 1 考虑了关于 FBM 的更简单的弱收敛方案, 提出了基于 FBM 过程的混合退化模型的 RUL 分布.

定理 1. 对于混合退化模型 (1), 若第 m 个混合退化设备在 $t_{m,k}$ 时刻的退化状态为 $x_m(t_k)$, 且随机参数 λ 和 α 的联合分布满足 $\pi_0(\lambda, \alpha) \sim N(\mu_\lambda, \mu_\alpha, \sigma_\lambda^2, \sigma_\alpha^2, \rho)$, 在 FHT 的概念和弱收敛定理下, 其在 $t_{m,k}$ 时刻估计的剩余寿命 $l_{m,k}$ 的近似 PDF 如下:

$$f_{m,k}(l_{m,k}) = \frac{g_{m,k}(l_{m,k})}{\int_0^{\infty} g_{m,k}(l_{m,k}) dl_{m,k}} \quad (8)$$

式中,

$$g_{m,k} = \frac{\omega_{m,k} \vartheta_{m,k} - \nu_{m,k} \xi_{m,k} \bar{h}}{\tilde{h} \sqrt{2\pi \vartheta_{m,k}^3}} \frac{\bar{h}}{\Delta l} \times \exp \left\{ - \frac{\left[\omega_{m,k} - \mu_\lambda l_{m,k} - \mu_\alpha \int_{t_k}^{t_k+l_{m,k}} \eta(\gamma; \beta) d\gamma \right]^2}{2\vartheta_{m,k}} \right\} \quad (9)$$

$$\vartheta_{m,k} = l_{m,k}^2 \sigma_\lambda^2 + \left(\int_{t_k}^{t_k+l_{m,k}} \eta(\gamma; \beta) d\gamma \right)^2 + \rho_0 \sigma_\lambda \sigma_\alpha l_{m,k} \int_{t_k}^{t_k+l_{m,k}} \eta(\gamma; \beta) d\gamma + \sigma^2 \bar{h} \quad (10)$$

$$\nu_{m,k} = l_{m,k} - \frac{\Delta l \tilde{h}}{\bar{h}} + \int_{t_k}^{t_k+l_{m,k}} \eta(\gamma; \beta) d\gamma \times \frac{\eta(t_k + l_{m,k}; \beta) \Delta l \tilde{h}}{\bar{h}} \quad (11)$$

$$\xi_{m,k} = \left[l_{m,k} \sigma_\lambda^2 + \int_{t_k}^{t_k+l_{m,k}} \eta(\gamma; \beta) d\gamma \sigma_\alpha^2 \right] \omega_{m,k} + (\mu_\lambda + \mu_\alpha) \sigma^2 \bar{h} \quad (12)$$

式中, $\omega_{m,k} = \omega_m - x_m(t_k)$, $\tilde{h} = h(t_k + l_k) - h(t_k)$, $\bar{h} = h(t_k + l_k + \Delta l) - h(t_k + l_k)$.

定理 1 的证明见附录 A.

$$\frac{\partial}{\partial \mu_{\lambda 0}} L\left(\Theta|\tilde{X}_{1:M}\right) = -\frac{1}{2}\left\{\sum_{m=1}^M\left(-T_{m,A}\right)^T \Sigma_m^{-1}\left(X_m - \mu_{\lambda 0} T_{m,A} + \mu_{\alpha 0} T_{m,B}\right) + \sum_{m=1}^M\left(X_m - \mu_{\lambda 0} T_{m,A} - \mu_{\alpha 0} T_{m,B}\right)^T \Sigma_m^{-1}\left(-T_{m,A}\right)\right\} \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_{\alpha 0}} L\left(\Theta|\tilde{X}_{1:M}\right) = -\frac{1}{2}\left\{\sum_{m=1}^M\left(-T_{m,B}\right)^T \Sigma_m^{-1}\left(X_m - \mu_{\lambda 0} T_{m,A} + \mu_{\alpha 0} T_{m,B}\right) + \sum_{m=1}^M\left(X_m - \mu_{\lambda 0} T_{m,A} - \mu_{\alpha 0} T_{m,B}\right)^T \Sigma_m^{-1}\left(-T_{m,B}\right)\right\} \quad (21)$$

令式 (20)、式 (21) 分别为零, 可得:

$$\mu_{\lambda 0} = \frac{s_2 s_4 - s_1 s_5}{s_4^2 - s_3 s_5} \quad (22)$$

$$\mu_{\alpha 0} = \frac{s_1 s_4 - s_2 s_3}{s_4^2 - s_3 s_5} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{m=1}^M\left(T_{m,A}^T \Sigma_m^{-1} X_m\right) \\ s_2 &= \sum_{m=1}^M\left(T_{m,B}^T \Sigma_m^{-1} X_m\right) \\ s_3 &= \sum_{m=1}^M\left(T_{m,A}^T \Sigma_m^{-1} T_{m,A}\right) \\ s_4 &= \sum_{m=1}^M\left(T_{m,A}^T \Sigma_m^{-1} T_{m,B}\right) \\ s_5 &= \sum_{m=1}^M\left(T_{m,B}^T \Sigma_m^{-1} T_{m,B}\right) \end{aligned}$$

将式 (22)、式 (23) 代入式 (19), 可得:

$$\begin{aligned} L\left(\Theta|\tilde{X}_{1:M}, \mu_{\lambda 0}, \mu_{\alpha 0}\right) &= \\ & -\frac{1}{2} \ln (2 \pi) \sum_{m=1}^M N_m - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \ln \left|\Sigma_m^{-1}\right| - \\ & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M\left(X_m - \hat{\mu}_{\lambda 0} T_{m,A} - \hat{\mu}_{\alpha 0} T_{m,B}\right)^T \times \\ & \Sigma_m^{-1}\left(X_m - \hat{\mu}_{\lambda 0} T_{m,A} - \hat{\mu}_{\alpha 0} T_{m,B}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

可以看出, 似然函数 (24) 具有高维的特征, 直接把式 (24) 极大似然化很难得到其余参数的极大估计值. 本文首先利用 Matlab 中的 fminsearch 函数, 求取极大似然估计值 (该函数基于 Nelder-Mead 单纯形法对最小化执行同步多维搜索), 进而得到参数 $\sigma_{\lambda 0}^2$ 、 $\sigma_{\alpha 0}^2$ 、 ρ_0 、 β 、 σ^2 和 H 的估计值; 然后, 将其代入式 (22)、式 (23), 得到相应 $\mu_{\lambda 0}$ 、 $\mu_{\alpha 0}$ 的极大似然估计值; 最后, 采用贝叶斯推理方法, 利用设备的实时退化监测数据对随机参数进行实时更新.

3.2 随机参数的实时更新

第 3.1 节通过参数离线估计的方法得到了随机参数 λ 和 α 的联合先验分布, 下面对随机参数进行实时更新. 假设第 m 个设备在前 t_k 时刻一共获得 k 个退化监测数据 X_k^* , 记作:

$$X_k^* = \left[X_k^*(t_1), X_k^*(t_2), \dots, X_k^*(t_k)\right]^T \quad (25)$$

式中, $t_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 表示对应的退化监测时刻.

基于贝叶斯推理理论, 利用获得的退化数据 X_k^* 更新 λ 和 α 的联合后验分布, 即:

$$p\left(\lambda, \alpha|X_k^*\right) \propto p\left(X_k^*|\lambda, \alpha\right) \pi_0\left(\lambda, \alpha\right) \quad (26)$$

式中, $\pi_0(\lambda, \alpha)$ 是 λ 和 α 的联合先验分布, X_k^* 服从多元正态分布即 $X_k^* \sim N\left(\mu_k, \Sigma_k^{-1}\right)$, μ_k 和 Σ_k^{-1} 的具体形式参考式 (14)、式 (15). 因此, 在已知 λ 和 α 情况下, 退化监测数据 X_k^* 的联合分布为:

$$\begin{aligned} p\left(X_k^*|\lambda, \alpha\right) &= \frac{1}{\left(2 \pi\right)^{\frac{k}{2}}\left|\Sigma_k^{-1}\right|^{\frac{1}{2}}} \times \\ & \exp \left\{-\frac{1}{2}\left(X_k^* - \mu_k\right)^T \Sigma_k^{-1}\left(X_k^* - \mu_k\right)\right\} \end{aligned} \quad (27)$$

将估计得到的联合分布 $\pi_0(\lambda, \alpha)$ 、式 (27) 代入式 (26), 对 λ 和 α 的联合后验分布进行更新, 具体更新结果如下:

$$\begin{aligned} p\left(\lambda, \alpha|X_k^*\right) &\propto \\ & \exp \left\{-\frac{1}{2}\left(X_k^* - \mu_k\right)^T \Sigma_k^{-1}\left(X_k^* - \mu_k\right)\right\} \times \\ & \exp \left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho_0^2\right)}\left[\left(\frac{\lambda-\mu_{\lambda 0}}{\sigma_{\lambda 0}}\right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2 \rho_0\left(\lambda-\mu_{\lambda 0}\right)\left(\alpha-\mu_{\alpha 0}\right)}{\sigma_{\lambda 0} \sigma_{\alpha 0}} + \left(\frac{\alpha-\mu_{\alpha 0}}{\sigma_{\alpha 0}}\right)^2\right]\right\} \propto \end{aligned}$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2}[\lambda^2 (T_A^T \Sigma_k^{-1} T_A + A) + \alpha^2 (T_B^T \Sigma_k^{-1} T_B + B) + \lambda (-X_k^{*T} \Sigma_k^{-1} T_A - T_A^T \Sigma_k^{-1} X_k^* + 2C) + \alpha (-X_k^{*T} \Sigma_k^{-1} T_B - T_B^T \Sigma_k^{-1} X_k^* + 2D) + \lambda \alpha (T_A^T \Sigma_k^{-1} T_B + T_B^T \Sigma_k^{-1} T_A - 2E)] + Z \right\} \quad (28)$$

其中

$$A = \frac{1}{(1 - \rho_0^2) \sigma_{\lambda 0}^2}, \quad B = \frac{1}{(1 - \rho_0^2) \sigma_{\alpha 0}^2}$$

$$C = \frac{\rho_0 \mu_{\alpha 0} \sigma_{\lambda 0} - \mu_{\lambda 0} \sigma_{\alpha 0}}{(1 - \rho_0^2) \sigma_{\lambda 0}^2 \sigma_{\alpha 0}}, \quad D = \frac{\rho_0 \mu_{\lambda 0} \sigma_{\alpha 0} - \mu_{\alpha 0} \sigma_{\lambda 0}}{(1 - \rho_0^2) \sigma_{\alpha 0}^2 \sigma_{\lambda 0}}$$

$$E = \frac{\rho_0}{(1 - \rho_0^2) \sigma_{\lambda 0} \sigma_{\alpha 0}}$$

$$T_A = [t_1, t_2, \dots, t_k]^T$$

$$T_B = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k]^T$$

Z 为与 λ 和 α 无关的常数项. 式 (28) 中, $X_k^{*T} \times \Sigma_k^{-1} T_A$ 和 $T_A^T \Sigma_k^{-1} X_k^*$, $X_k^{*T} \Sigma_k^{-1} T_B$ 和 $T_B^T \times \Sigma_k^{-1} X_k^*$, $T_A^T \Sigma_k^{-1} T_B$ 和 $T_B^T \Sigma_k^{-1} T_A$ 都是常数值, 并且互为转置矩阵, 由矩阵的性质可以得到 $X_k^{*T} \Sigma_k^{-1} T_A = T_A^T \times \Sigma_k^{-1} X_k^*$, $X_k^{*T} \Sigma_k^{-1} T_B = T_B^T \Sigma_k^{-1} \times X_k^*$, $T_A^T \Sigma_k^{-1} T_B = T_B^T \Sigma_k^{-1} T_A$.

因此, 式 (28) 可以进一步简化为:

$$p(\lambda, \alpha | X_k^*) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2}[\lambda^2 (T_A^T \Sigma_k^{-1} T_A + A) + \alpha^2 (T_B^T \Sigma_k^{-1} T_B + B) + 2\lambda (-T_A^T \Sigma_k^{-1} X_k^* + C) + 2\alpha (-T_B^T \Sigma_k^{-1} X_k^* + D) + 2\lambda \alpha (T_A^T \Sigma_k^{-1} T_B - E)] + Z_1 \right\} \quad (29)$$

式中, Z_1 是与 λ 和 α 无关的常数项. 本文假设 λ 和 α 的联合先验分布是服从二元正态分布的, 根据正态分布的特性, λ 和 α 的联合后验分布也是服从二元正态分布的, 满足 $\{\lambda, \alpha | X_k^*\} \sim N(\mu_{\lambda k}, \mu_{\alpha k}, \sigma_{\lambda k}^2, \sigma_{\alpha k}^2, \rho_k)$, 因此 $p(\lambda, \alpha | X_k^*)$ 的具体形式为:

$$p(\lambda, \alpha | X_k^*) = \frac{1}{2\pi \sigma_{\lambda k} \sigma_{\alpha k} \sqrt{1 - \rho_k^2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho_k^2)} \left[\left(\frac{\lambda - \mu_{\lambda k}}{\sigma_{\lambda k}} \right)^2 - \frac{2\rho_k (\lambda - \mu_{\lambda k})(\alpha - \mu_{\alpha k})}{\sigma_{\lambda k} \sigma_{\alpha k}} + \left(\frac{\alpha - \mu_{\alpha k}}{\sigma_{\alpha k}} \right)^2 \right] \right\} \quad (30)$$

基于式 (29)、式 (30), λ 和 α 在 t_k 时刻联合后验分布中的相关参数可以由下式得到:

$$\mu_{\lambda k} = (F + A)^{-1} (C - I) \quad (31)$$

$$\mu_{\alpha k} = (G + B)^{-1} (D - J) \quad (32)$$

$$\sigma_{\lambda k}^2 = \frac{G + B}{(F + A)(G + B) - (H - E)} \quad (33)$$

$$\sigma_{\mu k}^2 = \frac{F + A}{(F + A)(G + B) - (H - E)} \quad (34)$$

$$\rho_k = \frac{H - E}{\sqrt{F + A} \sqrt{G + B}} \quad (35)$$

式中, $F = T_A^T \Sigma_k^{-1} T_A$, $G = T_B^T \Sigma_k^{-1} T_B$, $H = T_A^T \times \Sigma_k^{-1} T_B$, $I = -T_A^T \Sigma_k^{-1} X_k^*$, $J = -T_B^T \Sigma_k^{-1} X_k^*$.

当在 t_k 时刻获取到最新的观测数据 $X_k^*(t_k)$ 后, 可以基于式 (31) ~ (35), 对 λ 和 α 的超参数进行实时更新.

将第 3.1 节参数的离线估计与第 3.2 节参数的实时更新归结为算法 1. 至此, 完成了模型里面随机参数的实时更新. 下面将本文方法应用到数值仿真和陀螺仪实际退化监测数据中.

算法 1. 参数的离线估计与实时更新算法

1) 参数离线估计阶段

输入. $\tilde{X}_{1:M}$, $1 \leq m \leq M$, $t_{m,n}$, $1 \leq n \leq N_m$.

输出. t_k 时刻 $\mu_{\lambda k}$ 、 $\mu_{\alpha k}$ 、 $\sigma_{\lambda k}^2$ 、 $\sigma_{\mu k}^2$ 、 ρ_k 的实时更新值.

a) 初始化模型参数 Θ ;

b) 最大化式 (24), 得到参数 $\sigma_{\lambda 0}^2$ 、 $\sigma_{\alpha 0}^2$ 、 ρ_0 、 β 、 σ^2 、 H 的极大似然估计值;

c) 将 b) 中得到的参数极大似然估计值代入式 (22)、式 (23), 得到 $\mu_{\lambda 0}$ 和 $\mu_{\alpha 0}$ 的估计值;

d) 输出模型参数 Θ 的估计值.

2) 随机参数的实时更新

输入. $X_k^* = [X_k^*(t_1), X_k^*(t_2), \dots, X_k^*(t_k)]^T$, t_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 和参数离线估计阶段获得的离线估计值 Θ .

a) 在任一时刻 t_k , 计算出 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I 、 J ;

b) 将 a) 得到的 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I 、 J 值代入式 (31) ~ (35), 可以得到 $\mu_{\lambda k}$ 、 $\mu_{\alpha k}$ 、 $\sigma_{\lambda k}^2$ 、 $\sigma_{\mu k}^2$ 、 ρ_k 在 t_k 时刻的更新值.

4 数值仿真与实例验证

本节将本文所提方法应用到数值例子与实际例子中, 验证其是否有效. 采用线性退化模型、非线性退化模型和本文提出的模型来拟合退化数据, 并且比较在三种模型下设备 RUL 的预测结果. 三种模型为: 1) 本文设计的模型; 2) 模型 1. 基于带线性漂移的 Wiener 过程模型^[5]; 3) 模型 2. 基于带非线性漂移的 Wiener 过程模型^[8, 27]; 4) 模型 3. 基于带非线性漂移的 FBM 过程模型 (单一退化形式)^[13-14] (未考虑随机系数的实时更新).

4.1 数值仿真

1) 仿真数据

首先, 根据混合随机退化模型 $X(t) = \lambda t + \alpha \int_0^t \eta(\gamma; \beta) d\gamma + \sigma B_H(t)$ 产生所需的退化数据, 其中假设 $\eta(\gamma; \beta) = \beta \gamma^{\beta-1}$. 由于使用幂函数来刻画设备非线性退化部分被广泛应用于退化建模领域, 则该模型可简化为 $X(t) = \lambda t + \alpha t^\beta + \sigma B_H(t)$. 根据模型假设 $(\lambda, \alpha) \sim N(\mu_\lambda, \mu_\alpha, \sigma_\lambda^2, \sigma_\alpha^2, \rho)$, 设置仿真参数: $\mu_\lambda = 1, \mu_\alpha = 0.265, \sigma_\lambda^2 = 4.5 \times 10^{-4}, \sigma_\alpha^2 = 3.35 \times 10^{-4}, \rho = -0.468, \sigma = 0.05, \beta = 0.2, H = 0.87$. 同时, 设置仿真步长 $\tau = 0.1$. 使用小波合成的方法^[23] 得到标准分数布朗运动 $B_H(t)$. 最后, 利用 Matlab 生成 30 组退化数据作为同批次设备的历史退化数据. 仿真历史退化数据如图 1 所示.

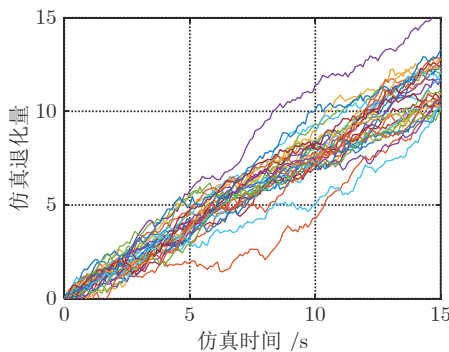


图 1 30 组仿真历史退化数据

Fig.1 30 sets of simulated history degradation data

图 1 是 30 组仿真退化轨迹, 仿真监测时间为 0 ~ 15 s, 采样间隔为 0.1 s, 每条轨迹共 150 个采样点. 图 2 为其中任意一条退化轨迹. 作为带预测设备的实时监测数据, 为了简单化, 将该轨迹的最后一个监测数据 $X(15) = 13.1$ 作为失效阈值, 即 $\omega = 13.1$. 则该设备的剩余寿命可近似为 14.8 s.

下面利用图 2 的仿真退化数据对本文所提模型

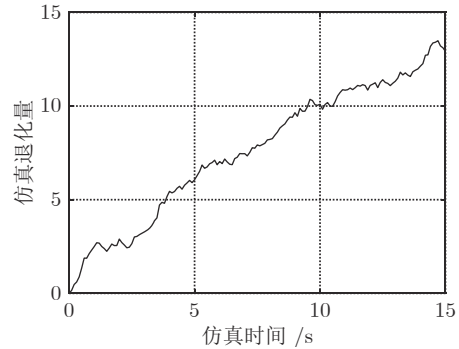


图 2 待预测设备实时监测退化数据

Fig.2 Real-time monitoring degradation data of the equipment for prediction

和 RUL 预测的有效性进行验证.

2) 结果对比

为了比较的公平性, 模型 2、模型 3 中的非线性部分也采用幂函数的形式. 首先, 基于历史退化数据, 采用极大似然估计算法得到共性参数与随机参数的先验估计值. 为了对比度量四种模型之间的拟合的精准度与估计的准确度, 使用赤池信息准则 (Akashi information criterion, AIC)^[28]、贝叶斯信息准则 (Bayesian information criterion, BIC)^[29] 测量预测模型的拟合程度. AIC、BIC 的值越小, 则拟合程度越高; 反之, 则拟合越差. AIC 的具体公式为:

$$AIC = 2p - 2 \ln L(\Theta) \tag{36}$$

式中, $L(\Theta)$ 表示似然函数值, p 是未知参数的总个数.

BIC 引入了改进惩罚项, 惩罚项大于 AIC 的, 可以有效避免大样本的过拟合问题, 其具体表达式为:

$$BIC = p \ln(n) - 2 \ln L(\Theta) \tag{37}$$

式中, $L(\Theta)$ 表示似然函数值, p 是未知参数的总个数, n 为样本数据量.

表 1 为四种模型参数 (本文方法、模型 1、模型 2、模型 3) 的先验估计值.

由表 1 可知, 本文方法的 AIC 与 BIC 值最小, 并且其中的 3 个方差参数总体也比较小, 这说明本文模型参数估计的准确性更高. 主要原因是本文所提模型既考虑退化过程的混合性, 还考虑了退化状态之间可能存在的相关性.

得到参数的离线估计值后, 基于待预测设备的实时监测退化数据, 采用贝叶斯更新的方法实现 λ 和 α 的实时更新, 进而实现 RUL 的实时预测. 图 3 是本文模型中 λ 和 α 的实时更新过程.

由图 3 可以看出: 1) 随着仿真退化数据的不断

表 1 四种模型参数的先验估计值
Table 1 The parameters' prior estimates of the four models

参数	本文方法	模型 1	模型 2	模型 3
μ_λ	1.0754	2.0251	—	—
μ_α	0.2547	—	3.1547	3.3643
σ_λ^2	4.56×10^{-4}	0.1618	—	—
σ_α^2	3.47×10^{-4}	—	0.0176	0.0103
ρ	-0.4793	—	—	—
σ^2	0.5336^2	0.5136^2	0.5836^2	0.5411^2
β	0.1547	—	0.6035	0.6101
H	0.8472	—	—	0.8130
$\ln L(\Theta)$	57.462	46.328	48.633	51.278
AIC	-98.924	-86.656	-89.266	-92.556
BIC	-87.724	-82.456	-83.666	-85.556

获取, 随机参数不断实时更新; 2) ρ 的实时更新值为负, 表明 λ 和 α 是负相关, 进一步表明混合随机退化设备的线性退化部分与非线性退化部分是相互抑制的.

下面对比在四种方法下得到的 RUL 实时预测结果. 预测时间点共取 10 个, 从第 5 个时间点 (第 50 个采样点) 到第 14 个时间点 (第 140 个采样点), 间隔为 10 个采样点, 具体 RUL 对比见图 4. 同时选取第 5、8、11、13 个时间点的 RUL 预测结果, 通过二维平面图形式做进一步对比, 对比图如图 5 所示.

在图 4 和图 5 中, 蓝色曲线为本文方法 RUL 的 PDF, 红色曲线为模型 1 得到的 PDF, 黑色曲线为模型 2 得到的 PDF, 绿色曲线为模型 3 得到的 PDF. 可以看出: 1) 四种模型随着获取的退化数据增多, RUL 预测的精度越来越高; 2) 本文方法得到的 RUL 的 PDF 能够更好地覆盖真实的 RUL, 其预测均值更接近真实的 RUL, 较模型 1、模型 2、模型 3 得到的 PDF 精度更高; 3) 本文方法预测得到的 RUL 的 PDF 更为尖锐和紧凑, 这说明本文方法预测的不确定性比其他三种方法预测的不确定性更小. 由图 4、图 5 可以直观地看出, 本文方法优于其他三种方法.

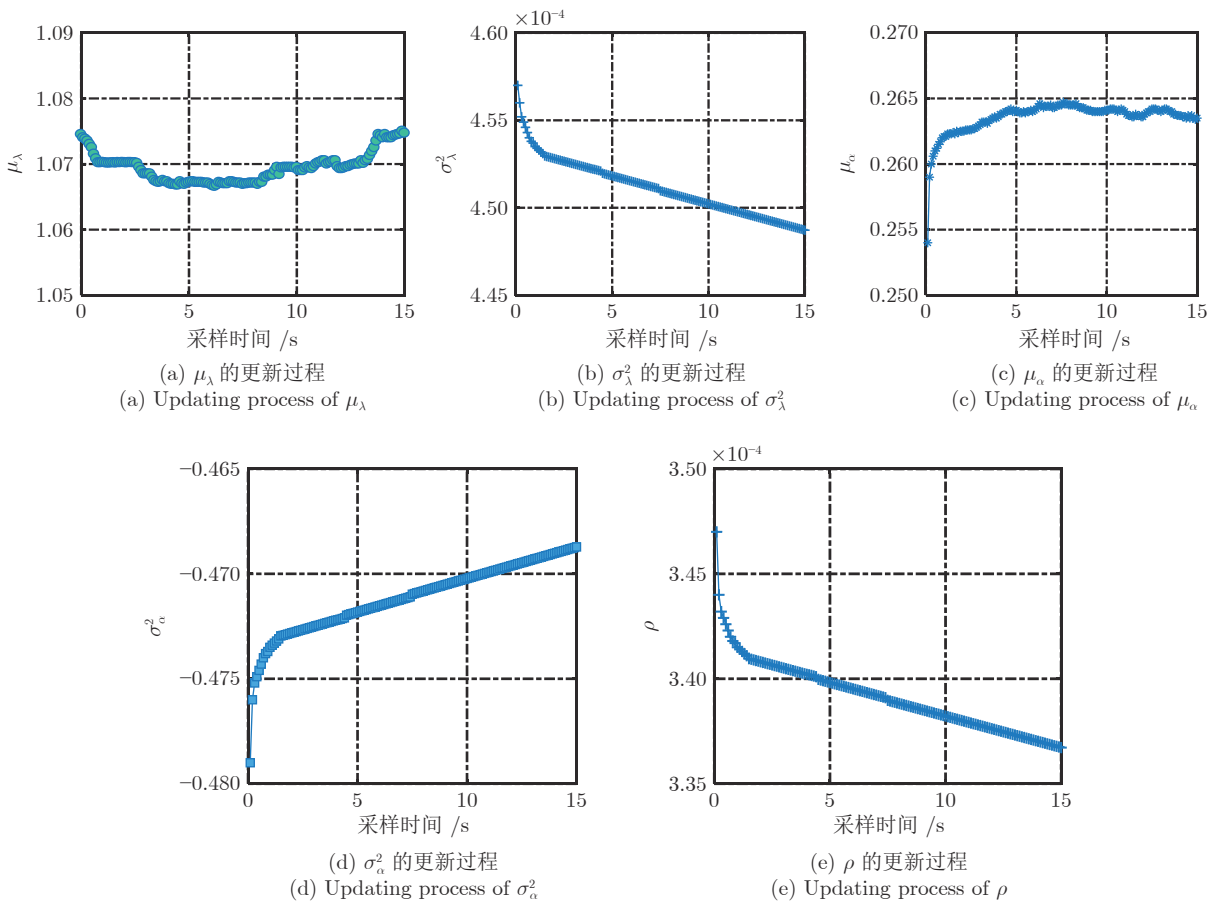


图 3 随机参数的实时更新过程
Fig.3 Real-time updating process of random parameters

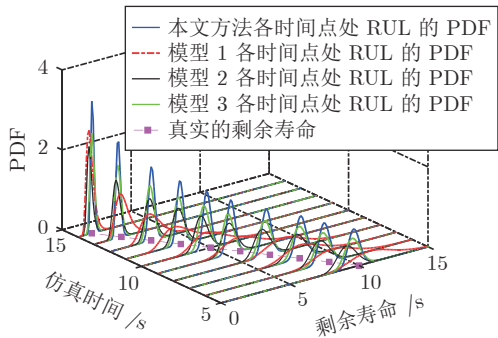


图 4 4 种方法在各个时间点处 RUL 预测的对比

Fig.4 Comparison of RUL prediction by four methods at each time

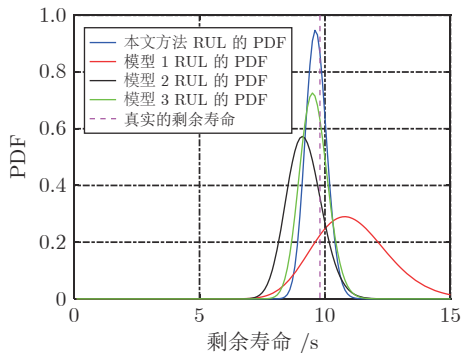
下面从定量的角度分析四种方法的优劣. 使用均方误差 (Mean squared error, MSE) 指标来评价四种方法预测 RUL 的精度, 其既可以表征 RUL 预测结果的准确性, 还可以表征 RUL 预测的不确定性, 是常用的误差评定指标, 可以较好地对比不同预测方法的优劣. 待测设备在 t_k 的 RUL 的 MSE 可以表示为:

$$MSE_k = \int_0^\infty (l_k - \tilde{l}_k)^2 f_k(l_k) dl_k \quad (38)$$

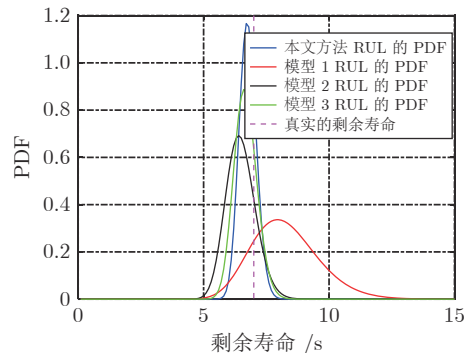
所有预测时间点处的均方误差之和为总体均方误差 (Total mean squared error, TMSE). 很明显, TMSE 值越小, 则该方法的 RUL 预测精度就越高. 通过计算得到四种方法在第 10 个时间点处的 TMSE 分别为 1.0051×10^2 、 5.1308×10^3 、 1.1007×10^3 、 1.5041×10^2 . 通过对比可知, 本文方法的 RUL 预测精度高于传统模型 1、模型 2、模型 3 的 RUL 预测精度; 相比于模型 1 和模型 2, 精度约提高了一个数量级. 定量分析结果与图 4、图 5 直观得到的结论是一致的.

4.2 实例验证

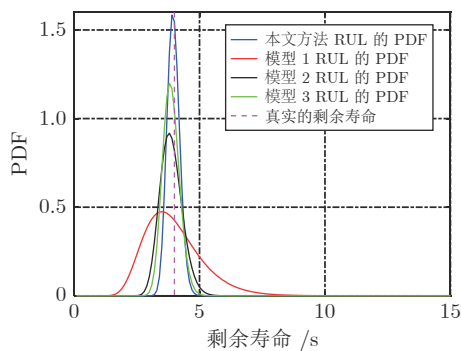
陀螺仪是惯性导航系统、导弹制导与控制系统的核心设备, 决定着导弹导航与命中的精度. 但是, 随着陀螺仪工作年限的增加, 在外部复杂环境与内部随机应力的影响下, 陀螺仪的性能可能会随之发生退化, 主要表现在其漂移系数的不断增大, 如果漂移系数值增大到一定程度, 陀螺仪就无法正常工



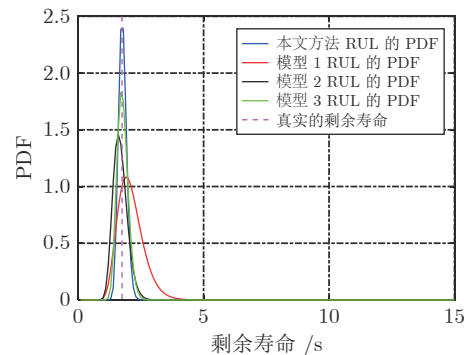
(a) 四种方法在第 5 个时间点 RUL 预测结果的对比
(a) Comparison of RUL prediction by four methods at 5th time



(b) 四种方法在第 8 个时间点 RUL 预测结果的对比
(b) Comparison of RUL prediction by four methods at 8th time



(c) 四种方法在第 11 个时间点 RUL 预测结果的对比
(c) Comparison of RUL prediction by four methods at 11th time



(d) 四种方法在第 13 个时间点 RUL 预测结果的对比
(d) Comparison of RUL prediction by four methods at 13th time

图 5 四种方法在第 5、8、11、13 个时间点 RUL 预测结果的对比

Fig.5 Comparison of RUL prediction by four methods at 5, 8, 11, 13th time

作, 即陀螺仪发生失效.

本文获取的 5 组某型号陀螺仪的退化监测数据^[9], 每组 73 个数据, 采样间隔为 2.5 h, 陀螺仪失效阈值设定为 0.37 (°/h), 陀螺仪寿命约为 180.5 h. 首先, 基于极大似然估计算法, 利用其中 4 组退化数据^[30] 对模型参数进行离线估计, 得到其先验估计值; 其次, 利用剩下一组数据为待预测的陀螺仪的实时监测数据, 采用贝叶斯更新的方法, 对模型随机参数进行实时更新; 最后, 进行设备 RUL 的实时预测, 并且将模型 1、模型 2、模型 3 得到的 RUL 进行比较. 图 6 为待预测陀螺仪的实时监测数据.

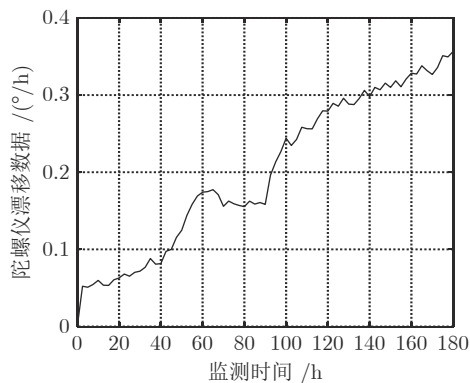


图 6 待预测陀螺仪漂移数据

Fig.6 Drift data of the gyroscope for prediction

为了比较公平, 模型 2、模型 3 中的非线性形式和本文模型的非线性部分都采用幂函数形式. 调用算法 1 中的离线估计阶段得到模型参数的先验估计值, 如表 2 所示.

表 2 陀螺仪退化模型参数的先验估计值

Table 2 A parameters' prior estimate of the gyroscope degradation model

参数	本文方法	模型 1	模型 2	模型 3
μ_λ	0.0151	0.1348	—	—
μ_α	0.0373	—	0.1503	0.1671
σ_λ^2	2.34×10^{-6}	0.0028	—	—
σ_α^2	7.82×10^{-6}	—	5.76×10^{-4}	4.76×10^{-4}
ρ	-0.4503	—	—	—
σ^2	0.0019 ²	0.0058 ²	0.0042 ²	0.0027 ²
β	0.2114	—	0.1342	0.1742
H	0.8011	—	—	0.7903
$\ln L(\Theta)$	41.871	31.013	34.337	38.699
AIC	-67.742	-56.026	-60.674	-67.398
BIC	-70.942	-57.226	-62.274	-69.398

下面基于陀螺仪模型参数的先验估计值, 调用算法 1 中的参数实时更新阶段, 在每一个时间点对模型随机参数进行实时更新, 模型随机参数的实时

更新过程如图 7 所示. 由图 7 可知, 随着陀螺仪监测数据获取的增加, 模型中随机参数不断实时更新, 并趋于稳定状态, 这表明随机参数的估计值越来越接近真实的模型参数值.

下面选择第 152.5 h ~ 175 h 之间的 10 个时间点为例, 比较分析所使用四种方法对该型号陀螺仪 RUL 预测的精准程度. 在所选的 10 个时间点, 四种方法预测该型号陀螺仪 RUL 的 PDF 如图 8 所示. 由图 8 可知: 1) 四种方法预测得到 RUL 的 PDF 在 10 个时间点都能够比较好地覆盖真实的 RUL, 说明了四种方法能够有效地预测该型号陀螺仪的 RUL. 2) 随着监测数据的增加, 参数不断实时更新, 四种方法预测 RUL 的 PDF 随着时间变得越来越尖、越来越窄, 说明四种方法对 RUL 预测的不确定度随着监测数据的累积而不断减小. 3) 本文方法得到 RUL 的 PDF 与其他三种方法相比较, 其 RUL 的 PDF 明显更高、更紧致, 说明本文方法预测得到的 RUL 更准确, 并且预测的不确定度更小. 其原因是, 相比于模型 1 和模型 2 单一的马尔科夫建模方式, 本文方法不仅考虑了陀螺仪内部不同类型的随机退化过程, 还考虑了退化监测数据之间的长期相关性、记忆性, 克服了模型 1 和模型 2 中的强马尔科夫限制. 相比于模型 3, 本文方法考虑了设备的退化混合性, 更符合设备真实的退化过程.

进一步通过计算, 得到四种方法在 10 个时间点的 TMSE 分别为 1.8154×10^2 、 2.6321×10^2 、 3.6543×10^2 、 2.1031×10^2 . 可知, 本文方法的 RUL 预测精度高于其他三种方法.

5 结束语

本文针对随机退化设备, 提出一种考虑随机退化过程中退化状态之间可能存在长期相关性、记忆性特点的混合随机退化模型, 克服了目前研究中潜在的假设: 1) 假设设备的随机退化过程为单一的线性或非线形式, 忽略了设备内部的多种类型退化过程分别对 RUL 预测的影响; 2) 将设备的随机退化过程简化成无记忆效应的马尔科夫过程, 受到强马尔科夫性的限制. 最后, 通过本文方法实现了随机退化设备的 RUL 寿命自适应预测, 且预测精度高于同等条件下传统模型的预测精度. 主要结论有以下 3 点:

1) 基于 FBM 的混合随机退化模型, 能够更为准确、合理地描述设备随机退化过程中可能含有的记忆效应. 通过实例验证和与传统的建模方法比较, 其 RUL 预测结果更加精确、不确定性更小;

2) 本文采用的参数估计方法有效地利用了设备的历史退化信息和实时监测信息, 从而更加准确地实现了设备 RUL 的实时预测.

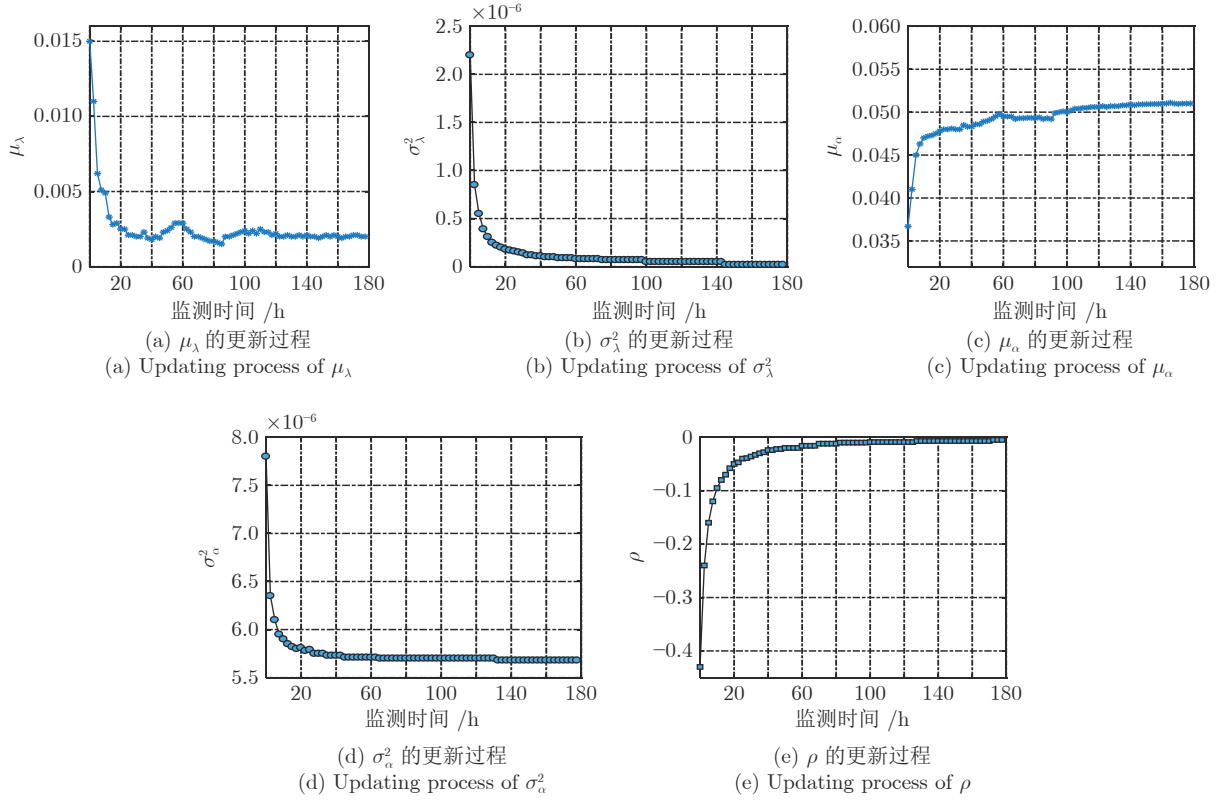


图 7 陀螺仪退化模型随机参数的实时更新过程

Fig.7 Real-time updating process of random parameters of gyroscope degradation model

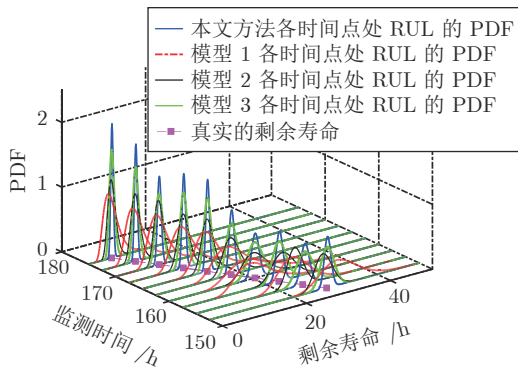


图 8 在不同时间点处四种方法预测 RUL 的 PDF 对比
Fig.8 Comparison of RUL's PDFs by four prediction methods at each time

综上所述, 本文提出的基于 FBM 的混合随机退化模型对随机退化设备建模更为合理与准确, 并且 RUL 预测结果优于传统方法, 具有一定的工程实用价值. 下一步的研究方向为如何对预测模型中共性参数进行自适应更新.

附录 A 定理 1 的证明

证明. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 缩放过程 $\{z_{n, H_p}(t), t \geq 0\}$ 弱收敛于 $\sqrt{L_p} B_{H_p}(t)$ [26], 其中:

$$H_p = p + \frac{1}{2}, \quad 0 < p < \frac{1}{2}$$

$$L_p = \frac{1}{1 + 2p} + \int_0^\infty [(x + 1)^p - x^p]^2 dx$$

$z_{n, H_p}(t)$ 的具体形式为:

$$z_{n, H_p}(t) = \frac{1}{n^{H_p}} \sum_{k \in Z} (a_{-k+1} + a_{-k+2} + \dots + a_{-k+[nt]}) \xi_k$$

式中, $[nt]$ 表示不超过的最大整数, 即 $[nt]$ 为向下取整符号. $\{\xi_i, i \in Z\}$ 是独立同分布的随机序列, 满足 $E(\xi_0) = 0$ 和 $E(\xi_0^2) = 1$. 当 $k > 0$ 时, $a_k = pk^{p-1}$; 否则, $a_k = 0$.

因此, 只需要解决以下形式的退化过程的 RUL 分布:

$$X(t) = \lambda t + \alpha \int_0^t \eta(\gamma; \beta) d\gamma + \sigma B(h(t_k)) \quad (A1)$$

其中

$$h(t_k) = \frac{1}{n^{2H_p} L_p} \sum_{k \in Z} (a_{-k+1} + a_{-k+2} + \dots + a_{-k+[nt_k]})^2$$

基于弱收敛理论, 可以将模型 (1) 转换成式 (37). 文献 [27] 指出, 时间重新缩放的 FBM 保持零均值高斯过程, 然后在适当的假设下给出了相应 RUL 分布的近似表达式^[13]. 具体来说, 考虑以下退化模型:

$$X(t) = \lambda\Lambda(t; \theta) + \alpha\Psi(t; \vartheta) + \sigma B(\tau(t; \varepsilon))$$

假设失效阈值为 ω , 则第 m 个设备在 t_k 时刻 RUL 的 PDF 如下:

$$f_{m,k}(l_{m,k}) = \frac{g_{m,k}(l_{m,k})}{\int_0^\infty g_{m,k}(l_{m,k}) dl_{m,k}}$$

$$\vartheta_k = \Delta\Lambda^2(t_k + l_k; \theta)\sigma_\lambda^2 + \Delta\Psi^2(t_k + l_k; \vartheta)\sigma_\alpha^2 + \rho_0\sigma_\lambda\sigma_\alpha\Delta\Lambda(t_k + l_k; \theta)\Delta\Psi(t_k + l_k; \vartheta) + \sigma^2\Delta\tau(t_k + l_k; \varepsilon)$$

$$\nu_k = \Delta\Lambda(t_k + l_k; \theta) - \frac{d\Delta\Lambda(t_k + l_k; \theta)}{d\Delta\tau(t_k + l_k; \varepsilon)} \times \Delta\tau(t_k + l_k; \varepsilon) + \Delta\Psi(t_k + l_k; \vartheta) - \frac{d\Delta\Psi(t_k + l_k; \vartheta)}{d\Delta\tau(t_k + l_k; \varepsilon)}\Delta\tau(t_k + l_k; \varepsilon)$$

$$g_k(l_k) = \frac{1}{\Delta\tau(t_k + l_k; \varepsilon)\sqrt{2\pi\vartheta_k}} \frac{d\Delta\tau(t_k + l_k; \varepsilon)}{dl_k} \times \left[\omega_k - \nu_k \frac{1}{u_k} \times (\Delta\Lambda(t_k + l_k; \theta)\sigma_\lambda^2 + \Delta\Psi(t_k + l_k; \vartheta)\sigma_\alpha^2)\omega_k + (\mu_\lambda + \mu_\alpha)\sigma^2\Delta\tau(t_k + l_k; \varepsilon) \right] \times \exp\left\{ -\frac{1}{2\vartheta_k} \times [\omega_k - \mu_\lambda\Delta\Lambda(t_k + l_k; \theta) - \mu_\alpha\Delta\Psi(t_k + l_k; \vartheta)]^2 \right\}$$

式中, $\Delta\Lambda(t_k + l_k; \theta) = \Lambda(t_k + l_k; \theta) - \Lambda(t_k; \theta)$, $\Delta\Psi(t_k + l_k; \vartheta) = \Psi(t_k + l_k; \vartheta) - \Psi(t_k; \vartheta)$, $\Delta\tau(t_k + l_k; \varepsilon) = \tau(t_k + l_k; \varepsilon) - \tau(t_k; \varepsilon)$, $\omega_k = \omega - x(t_k)$.

令 $\Lambda(t_k; \theta) = t_k$, $\Psi(t_k; \vartheta) = \int_0^{t_k} \eta(\gamma; \beta)d\gamma$, $\Delta\Lambda \times (t_k + l_{m,k}; \theta) = l_{m,k}$, $\omega_{m,k} = \omega_m - x_m(t_k)$, $\Delta\Psi \times (t_k + l_{m,k}; \vartheta) = \int_{t_k}^{t_k+l_{m,k}} \eta(\gamma; \beta)d\gamma$, $\Delta\tau(t_k + l_{m,k}; \varepsilon) = h(t_k + l_{m,k}) - h(t_k) = \Delta h(t_k + l_{m,k})$, 则:

$$\vartheta_{m,k} = l_{m,k}^2\sigma_\lambda^2 + \Delta\Psi(t_k + l_{m,k}; \vartheta)^2\sigma_\alpha^2 - \rho_0\sigma_\lambda\sigma_\alpha l_{m,k}\Delta\Psi(t_k + l_{m,k}; \vartheta) + \sigma^2\Delta h(t_k + l_{m,k})$$

$$\nu_{m,k} = l_{m,k} - \frac{\Delta l \Delta h(t_k + l_{m,k})}{h} (t_k + l_{m,k} + \Delta l) - \Delta h(t_k + l_{m,k}) + \Delta\Psi(t_k + l_{m,k}; \vartheta) - \frac{d\Delta\Psi(t_k + l_{m,k}; \vartheta)}{dl_{m,k}} \times \frac{\Delta l \Delta h(t_k + l_{m,k})}{h(t_k + l_{m,k} + \Delta l) - \Delta h(t_k + l_{m,k})}$$

$$g_{m,k} = \frac{1}{\Delta h(t_k + l_{m,k})\sqrt{2\pi\vartheta_{m,k}}} \times \frac{h(t_k + l_{m,k} + \Delta l) - \Delta h(t_k + l_{m,k})}{\Delta l} \times \left[\omega_k - \nu_k \frac{1}{u_{m,k}} (l_{m,k}\sigma_\lambda^2 + \Delta\Psi(t_k + l_{m,k}; \vartheta)\sigma_\alpha^2)\omega_k + (\mu_\lambda + \mu_\alpha)\sigma^2\Delta h(t_k + l_{m,k}) \right] \times \exp\left\{ -\frac{[\omega_k - \mu_\lambda l_{m,k} - \mu_\alpha\Delta\Psi(t_k + l_{m,k}; \vartheta)]^2}{2\vartheta_{m,k}} \right\}$$

令 $\xi_{m,k} = (l_{m,k}\sigma_\lambda^2 + \Delta\Psi(t_k + l_{m,k}; \vartheta)\sigma_\alpha^2)\omega_k + (\mu_\lambda + \mu_\alpha)\sigma^2\Delta h(t_k + l_{m,k})$, 则 $g_{m,k}$ 可以简化为:

$$g_{m,k} = \frac{\omega_k\vartheta_{m,k} - \nu_{m,k}\xi_{m,k}}{\Delta h(t_k + l_{m,k})\sqrt{2\pi\vartheta_{m,k}}} \times \frac{h(t_k + l_{m,k} + \Delta l) - \Delta h(t_k + l_{m,k})}{\Delta l} \times \exp\left\{ -\frac{[\omega_k - \mu_\lambda l_{m,k} - \mu_\alpha\Delta\Psi(t_k + l_{m,k}; \vartheta)]^2}{2\vartheta_{m,k}} \right\}$$

定理 1 的具体使用方法见文献 [13]. □

附录 B 定理 2 的证明

证明. 基于式 (14) 和 FBM 的特性, 可以比较容易得到 $\mu_m = \mu_{\lambda 0}T_{m,A} + \mu_{\alpha 0}T_{m,B}$. 下面对 Σ_m^{-1} 进行推导.

对于监测数据 $X_m = [X_{m,1}, X_{m,2}, \dots, X_{m,N_m}]^T$, 其协方差阵可以记为如下:

$$\Sigma_m^{-1} = \begin{bmatrix} \text{var}(X_{m,1}) & \text{cov}(X_{m,1}, X_{m,2}) & & & \\ & \text{var}(X_{m,2}) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \dots & \text{cov}(X_{m,1}, X_{m,N_m}) & & & \\ \dots & \text{cov}(X_{m,2}, X_{m,N_m}) & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \dots & & & \text{var}(X_{m,N_m}) & \end{bmatrix} \quad (\text{B1})$$

根据式 (14), 可得:

$$\begin{aligned} \text{var}(X_{m,n}) = & \text{var}\left(\lambda_0 t_{m,n} + \alpha_0 \int_0^{t_{m,n}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma + \right. \\ & \left. \sigma_0 B_H(t_{m,n})\right) = \\ & \text{var}\left(\lambda_0 t_{m,n} + \alpha_0 \int_0^{t_{m,n}} \eta(\gamma; \beta) d\gamma\right) + \\ & \text{var}(\sigma_0 B_H(t_{m,n})) = \\ & t_{m,n}^2 \sigma_{\lambda_0}^2 + \left(\int_0^{t_{m,n}} \eta(\gamma; \beta) d\gamma\right)^2 \sigma_{\alpha_0}^2 + \\ & 2t_{m,n} \int_0^{t_{m,n}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma \rho_0 \sigma_{\lambda_0} \sigma_{\alpha_0} + \sigma_0^2 t_{m,n}^{2H} \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

令 $t_{m,1} \leq t_{m,n_i} \leq t_{m,n_j} \leq t_{m,n}$. 根据协方差定义, 可得:

$$\text{cov}(X_{m,n_i}, X_{m,n_j}) = E(X_{m,n_i}, X_{m,n_j}) - E(X_{m,n_i}) E(X_{m,n_j}) \quad (\text{B3})$$

首先, 推导 $E(X_{m,n_i}, X_{m,n_j})$:

$$\begin{aligned} E(X_{m,n_i}, X_{m,n_j}) = & E\left\{\left[\lambda_0 t_{m,n_i} + \alpha_0 \int_0^{t_{m,n_i}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma + \sigma B_H(t_{m,n_i})\right] \times \right. \\ & \left. \left[\lambda_0 t_{m,n_j} + \alpha_0 \int_0^{t_{m,n_j}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma + \sigma B_H(t_{m,n_j})\right]\right\} = \\ & t_{m,n_i} t_{m,n_j} (\mu_{\lambda_0}^2 + \sigma_{\lambda_0}^2) + \left(\int_0^{t_{m,n_i}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma\right) \times \\ & \left(\int_0^{t_{m,n_j}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma\right) (\mu_{\alpha_0}^2 + \sigma_{\alpha_0}^2) + \\ & \left(t_{m,n_i} \int_0^{t_{m,n_j}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma + t_{m,n_j} \int_0^{t_{m,n_i}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma\right) \times \\ & (\mu_{\lambda_0} \mu_{\alpha_0} + \rho_0 \sigma_{\lambda_0} \sigma_{\alpha_0}) + \\ & \frac{\sigma^2}{2} (t_{m,n_j}^{2H} + t_{m,n_i}^{2H} + |t_{m,n_j} - t_{m,n_i}|^2) \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

其次, 推导 $E(X_{m,n_i}) E(X_{m,n_j})$:

$$\begin{aligned} E(X_{m,n_i}) E(X_{m,n_j}) = & \left[\mu_{\lambda_0} t_{m,n_i} + \right. \\ & \left. \mu_{\alpha_0} \int_0^{t_{m,n_i}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma\right] \times \\ & \left[\mu_{\alpha_0} t_{m,n_j} + \mu_{\alpha_0} \int_0^{t_{m,n_j}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma\right] \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

将式 (B4)、式 (B5) 代入式 (B3), 可得:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_{m,n_i}, X_{m,n_j}) = & t_{m,n_i} t_{m,n_j} \sigma_{\lambda_0}^2 + \left(\int_0^{t_{m,n_i}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma\right) \times \\ & \left(\int_0^{t_{m,n_j}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma\right) \sigma_{\alpha_0}^2 + \\ & \left(t_{m,n_i} \int_0^{t_{m,n_j}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma + \right. \\ & \left. t_{m,n_j} \int_0^{t_{m,n_i}} \eta(\gamma; \beta_0) d\gamma\right) \times \\ & \rho_0 \sigma_{\lambda_0} \sigma_{\alpha_0} + \\ & \frac{\sigma^2}{2} (t_{m,n_j}^{2H} + t_{m,n_i}^{2H} + |t_{m,n_j} - t_{m,n_i}|^{2H}) \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

最后, 将式 (B6)、式 (B2) 代入式 (30), 可得 $\sum_{m=1}^M$. \square

References

- Zhou Dong-Hua, Wei Mu-Heng, Si Xiao-Sheng. A survey on anomaly detection, life prediction and maintenance decision for industrial processes. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(6): 711-722 (周东华, 魏慕恒, 司小胜. 工业过程异常检测、寿命预测与维修决策的研究进展. *自动化学报*, 2013, **39**(6): 711-722)
- Wang W. A two-stage prognosis model in condition based maintenance. *European Journal of Operational Research*, 2007, **182**(3): 1177-1187
- Si X S, Wang W, Hu C H. Remaining useful life estimation with three-level variability in degradation modeling. *IEEE Transactions on Reliability*, 2014, **63**(1): 167-190
- Huang Z Y, Xu Z G. Remaining useful life prediction for hidden wiener process with an adaptive drift. *IEEE International Conference*, 2013, **15**(2): 1396-1400
- Wang Xi, Hu Chang-Hua, Pei Hong. Adaptive remaining useful life prediction method for newly developed photoelectric products. *Acta Optica Sinica*, 2019, **39**(12): Article No. 1223003 (王玺, 胡昌华, 裴洪. 新研发光电产品的剩余寿命自适应预测方法. *光学学报*, 2019, **39**(12): Article No. 1223003)
- Si X S, Wang W, Hu C H, Zhou D H, Pecht M. Remaining useful life estimation based on a nonlinear diffusion degradation process. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, **61**(1): 50-67
- Si Xiao-Sheng, Hu Chang-Hua, Zhou Dong-Hua. Nonlinear degradation process modeling and remaining useful life estimation subject to measurement error. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 530-541 (司小胜, 胡昌华, 周东华. 带测量误差的非线性退化过程建模与剩余寿命估计. *自动化学报*, 2013, **39**(5): 530-541)
- Zheng Jian-fei, Hu Chang-Hua, Si Xiao-Sheng, Zhang Zheng-Xin, Zhang Xin. Remaining useful life estimation for nonlinear stochastic degrading systems with uncertain measurement and unit-to-unit variability. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(2): 259-270 (郑建飞, 胡昌华, 司小胜, 张正新, 张鑫. 考虑不确定测量和个体差异的非线性随机退化系统剩余寿命估计. *自动化学报*, 2017, **43**(2): 259-270)
- Cai Z Y, Guo J S, Chen Y X, Dong X, Xiang H. Remaining lifetime online prediction based on step-stress accelerated degradation modeling. *Systems Engineering and Electronics*, 2018, **40**(11): 218-223
- Zhang H W, Chen M Y, Xi X P, Zhou D H. Remaining useful life prediction for degradation processes with long-range depend-

- ence. *IEEE Transactions on Reliability*, 2017, **66**(4): 1368–1379
- 11 Xi X P, Chen M Y, Zhou D H. Remaining useful life prediction for degradation processes with memory effects. *IEEE Transactions on Reliability*, 2017, **66**(3): 751–760
 - 12 Zhang H W, Zhou D H, Chen M Y. FBM-based remaining useful life prediction for degradation processes with long-range dependence and multiple modes. *IEEE Transactions on Reliability*, 2019, **68**(3): 1021–1033
 - 13 Xi X P, Chen M Y, Zhang H W, Zhou D H. An improved non-Markovian degradation model with long-term dependency and item-to-item uncertainty. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, **105**(1): 467–480
 - 14 Zhang H W, Zhou D H. FBM-based remaining useful life prediction for degradation processes with long-range dependence and multiple modes. *IEEE Transactions on Reliability*, 2018, **67**(4): 1318–1335
 - 15 Wang Z Q, Hu C H, Wang W B, Si X S. An additive Wiener process-based prognostic model for hybrid deteriorating systems. *IEEE Transactions on Reliability*, 2014, **63**(1): 208–222
 - 16 Mathew S, Das D, Osterman M, Pecht M, Ferebee R, Clayton J. Virtual remaining life assessment of electronic hardware subjected to shock and random vibration life cycle loads. *Journal of the Institute of Environmental Sciences and Technology*, 2007, **50**(1): 86–97
 - 17 Chakraborty S, Gebrael N Z, Lawley M, Wan H. Residual-life estimation for components with non-symmetric priors. *IIE Transactions*, 2009, **41**(4): 372–387
 - 18 Ye Z S, Wang Y, Tsui K L, Pecht M. Degradation data analysis using Wiener processes with measurement errors. *IEEE Transactions on Reliability*, 2013, **62**(4): 772–780
 - 19 Park C, Padgett W J. Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma processes. *Lifetime Data Analysis*, 2005, **11**(4): 511–527
 - 20 Mandelbrot B B, John W V. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1968, **10**(4): 422–437
 - 21 Xu L P, Li Z, Luo J W. Global attracting set and exponential decay of second-order neutral stochastic functional differential equations driven by fBm. *Advances in Difference Equations*, 2017, **134**: 1–16
 - 22 Lau W C, Erramilli A, Wang J L, Willinger W. Self-similar traffic generation: The random midpoint displacement algorithm and its properties. *IEEE International Conference on Communications*, 1995, **32**(3): 66–472
 - 23 Abry P, Sellan F. The wavelet-based synthesis for fractional Brownian motion. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1996, **3**(4): 377–383
 - 24 Yu Zheng. The Property of Mixed Fractional Brownian Motion and the Application in Finance [Ph.D. dissertation], Donghua University, China, 2009
(余征. 混合分数布朗运动的性质及其在金融中的应用 [博士论文], 东华大学, 中国, 2009)
 - 25 Si X S, Wang W, Hu C H, Zhou D H. Remaining useful life estimation — A review on the statistical data driven approaches. *European Journal of Operational Research*, 2011, **213**(1): 1–14
 - 26 Konstantopoulos T, Sakhanenko A. Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2004, **1**(4): 47–63
 - 27 Wang X, Balakrishnan N, Guo B. Residual life estimation based on a generalized Wiener degradation process. *Reliability Engineering and System Safety*, 2014, **124**(3): 13–23
 - 28 Akaike H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions Automatical Control*, 1974, **19**(6): 716–723
 - 29 Schwarz G. Estimating the dimension of a model. *Annals of Applied Statistics*, 1978, **6**(2): 461–464
 - 30 Zhou Shao-Hua, Hu Chang-Hua, Si Xiao-Sheng. Life prediction

approach by integrating nonlinear accelerated degradation model and hazard rate model. *Acta Electronica Sinica*, 2017, **45**(5): 1084–1089
(周绍华, 胡昌华, 司小胜, 方世鹏, 裴洪. 融合非线性加速退化模型与失效率模型的产品寿命预测方法. 电子学报, 2017, **45**(5): 1084–1089)



高旭东 火箭军工程大学硕士研究生. 主要研究方向为故障诊断, 预测与健康健康管理.
E-mail: 18290342899@163.com
(**GAO Xu-Dong** Master student at Rocket Force University of Engineering. His research interest covers fault diagnosis, and prognostics & health management.)



胡昌华 火箭军工程大学教授. 主要研究方向为故障诊断, 可靠性工程和预测与健康健康管理. 本文通信作者.
E-mail: hch66603@163.com
(**HU Chang-Hua** Professor at Rocket Force University of Engineering. His research interest covers fault diagnosis, reliability engineering, and prognostics health management. Corresponding author of this paper.)



张建勋 火箭军工程大学讲师. 主要研究方向为预测与健康健康管理, 退化过程建模和剩余寿命估计.
E-mail: zhang200735@163.com
(**ZHANG Jian-Xun** Lecturer at Rocket Force University of Engineering. His research interest covers prognostics & health management, degradation process modeling, and remaining useful life estimation.)



杜党波 火箭军工程大学讲师. 主要研究方向为预测与健康健康管理, 剩余寿命估计. E-mail: ddb_effort@126.com
(**DU Dang-Bo** Lecturer at Rocket Force University of Engineering. His research interest covers prognostics & health management and remaining useful life estimation.)



喻 勇 西北核技术研究院助理研究员. 主要研究方向为系统控制, 系统剩余寿命估计.
E-mail: yuyongep@163.com
(**YU Yong** Lecturer at Northwest Institute of Nuclear Technology. His research interest covers system control and system residual life estimation.)