

基于嵌套-伪预估器反馈的时滞控制系统输入时滞补偿

刘青松¹

摘要 本文研究同时具有输入和状态时滞的控制系统的输入时滞补偿问题. 通过建立嵌套-伪预估器反馈方法预测系统未来的状态, 使得任意大但有界的输入时滞得到完全补偿. 不同于传统的预估器反馈利用开环系统预测系统未来的状态, 嵌套-伪预估器反馈则是利用闭环系统嵌套地预测系统未来的状态. 依据积分时滞系统的稳定性, 给出了保证闭环系统渐近稳定的充要条件. 最后, 采用数值仿真验证所提出方法的有效性.

关键词 输入时滞补偿, 嵌套-伪预估器反馈, 中立型时滞系统, 滞后型时滞系统, 镇定

引用格式 刘青松. 基于嵌套-伪预估器反馈的时滞控制系统输入时滞补偿. 自动化学报, 2021, 47(10): 2464-2471

DOI 10.16383/j.aas.c190830

Nested-Pseudo Predictor Feedback Based Input Delay Compensation for Time-Delay Control Systems

LIU Qing-Song¹

Abstract This paper studies the input delay compensation of control systems with both state and input delays. A nested-pseudo predictor feedback is established to predict the future states such that the input delay that can be arbitrarily large yet bounded are compensated completely. Differently from the traditional predictor feedback which uses the open-loop system dynamics to predict the future state, nested-pseudo predictor feedback uses the closed-loop system dynamics to predict nestedly the future state. Necessary and sufficient conditions guaranteeing the stability of the closed-loop system are obtained in terms of the stability of integral delay systems. Finally, a numerical example is worked out to show the effectiveness of the proposed approach.

Key words Input delay compensation, nested-pseudo predictor feedback, neutral type time-delay systems, retarded type time-delay systems, stabilization

Citation Liu Qing-Song. Nested-pseudo predictor feedback based input delay compensation for time-delay control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2021, 47(10): 2464-2471

近几十年以来, 时滞控制系统的分析与设计一直是一个比较活跃的研究课题, 涌现了大量的研究成果^[1-6]. 镇定和稳定性是时滞控制系统的基本设计问题, 得到了深入的研究^[7-9]. 镇定问题近年来得到了众多学者的重视. 例如, 文献 [10] 利用序贯预估器方法研究具有时变时滞的控制系统的镇定问题. 针对具有输入时滞的关联系统, 文献 [11] 利用基于分布式预估器的控制器解决了其镇定问题. 文献 [12] 和文献 [13] 分别利用时滞相关脉冲控制方法和连续预估器方法研究 (具有状态、输入和输出时滞) 的控制系统的镇定问题. 近年以来, 针对时滞系统的

稳定性涌现大量的成果. 例如, 文献 [14-18] 研究了时滞脉冲系统的 (指数) 稳定性. 基于预估器反馈的方法, 文献 [19-20] 研究了线性时滞控制系统的 (鲁棒) 稳定性. 通过加权不等式的方法, 文献 [21] 研究了具有时变时滞离散系统的有限稳定性. 文献 [22] 给出了线性中立型时滞系统指数稳定性的必要条件.

预估器反馈方法已经广泛应用于时滞控制系统的分析与设计中, 学者们对其进行了深入研究. 例如, 文献 [23] 首次提出 Smith 预估器方法对输入时滞进行补偿, 使得闭环系统变成无时滞系统. 文献 [24] 采用预估器反馈方法考虑了具有多输入时滞的非线性系统的镇定问题. 针对具有随机网络时滞的网络化控制系统, 文献 [25] 利用网络预测控制方法分析其随机稳定性问题. 从频域的角度, 文献 [26] 研究了时滞控制系统的设计问题, 提出了有限谱配置方法. 最近, 文献 [27] 提出一种称为伪预估器反馈的新方法, 研究仅含输入时滞的线性系统镇定问题. 不同于传统的预估器反馈利用开环系统预测系统未

收稿日期 2019-12-06 录用日期 2020-04-06

Manuscript received December 6, 2019; accepted April 6, 2020

国家自然科学基金 (61903282, 61625305), 中国博士后科学基金 (2020T130488) 资助

National Natural Science Foundation of China (61903282, 61625305) and China Postdoctoral Science Foundation (2020T130488)

本文责任编辑 苏宏业

Recommended by Associate Editor SU Hong-Ye

1. 武汉科技大学信息科学与工程学院 武汉 430081

1. School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081

来的状态, 伪预估器反馈则是利用闭环系统预测系统未来的状态, 从而所得到的控制器是无记忆的或者是有限维的. 后来, 伪预估器反馈方法^[27]推广到了含有多个点时滞与分布输入时滞的线性系统^[28]和输入时滞与状态时滞相同的线性系统^[29]. 此外, 文献 [30] 还提出了另一种称为截断预估器反馈方法.

最近, 针对同时具有输入和状态时滞的控制系统, 文献 [31] 提出一种称为嵌套预估器反馈的新方法, 研究大输入时滞补偿问题. 这种方法随后推广到了同时具有输入和状态时滞的中立型时滞系统^[32]. 几乎在同一时间, 文献 [33] 采用基于开环系统基础解矩阵这一完全不同的方法, 独立地研究了此问题. 文献 [33] 中的方法也推广到了中立型时滞系统^[34].

受文献 [27] 针对仅含输入时滞的滞后型线性系统所提出的伪预估器反馈方法和嵌套预估器反馈方法^[31]的启发. 本文针对同时具有输入和状态时滞的线性系统, 通过建立嵌套-伪预估器反馈这一新方法, 研究仅对其输入时滞进行补偿的控制系统设计问题. 与传统的模型化简理论或有限谱配置理论不同, 本文不是对输入和状态时滞都进行补偿 (即保证闭环系统具有有限个特征值), 而是仅对其输入时滞进行补偿, 使得补偿后的系统仅含有状态时滞, 而且状态时滞的大小不会增大. 本文主要贡献如下: 1) 提出了嵌套-伪预估器反馈这一新方法. 2) 针对同时具有输入和状态时滞的线性系统, 基于嵌套预估器反馈的控制器在实现时, 需要增加输入滤波器才能镇定原时滞系统^[31-32]. 本文提出的基于嵌套-伪预估器反馈的控制器无需增加滤波器便可镇定原系统. 3) 文献 [27] 研究仅含输入时滞的线性系统的输入时滞补偿问题, 本文研究同时具有输入和状态时滞的线性系统的输入时滞补偿问题. 此外, 伪预估器反馈方法不能直接应用于同时具有输入和状态时滞的线性系统中, 因为基于伪预估器的控制器含有未来的状态而不可实现 (输入时滞大于状态时滞).

1 问题描述

考虑同时具有输入和状态时滞的中立型控制系统

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t-r) = Ax(t-r) + Bu(t-h) \quad (1)$$

其中, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 都是定常矩阵, 假设矩阵 $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是舒尔稳定的, $r > 0$ 和 $h > 0$ 分别表示状态时滞和输入时滞. 不失一般性地假设

$$h > r > 0$$

而当 $0 < h \leq r$ 时, 系统的输入时滞补偿结果可由文献 [27] 易得. 本文的目标是设计同时具有输入和状

态时滞的控制系统 (1) 的镇定控制器, 问题描述如下.

问题 1. 针对时滞控制系统 (1), 设计一个线性控制器

$$u(t) = F(x_t)$$

使得闭环系统是渐近稳定的, 其中, F 是线性泛函, $x_t(t) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-r, 0]$. 类似文献 [31], 给出下列假设.

假设 1. 存在反馈增益矩阵 $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 使得下列时滞系统是渐近稳定的

$$\dot{\chi}(t) - D\dot{\chi}(t-r) = (A+BK)\chi(t-r) \quad (2)$$

根据假设 1 可知, 中立型时滞系统 $\dot{x}(t) - D\dot{x}(t-r) = Ax(t-r) + Bu(t)$, 可由下列线性反馈所镇定

$$u(t) = Kx(t-r) \quad (3)$$

因此, 问题 1 等价于寻找一个适当的方法补偿输入时滞. 针对同时具有输入和状态时滞的线性系统, 模型化简方法可以处理这样的镇定问题, 然而, 此方法需解一个由系数矩阵组成的非线性矩阵方程^[35]. 最近, 文献 [33] 采用基于开环系统的基础解矩阵方法研究了问题 1, 同时文献 [32] 也研究了问题 1. 然而, 所设计的控制器都含有下列积分项^[32, 34]

$$\int_{-h}^0 e^{-As} Bu(t+s) ds \quad (4)$$

需通过数值积分进行实现. 而数值积分的缺点是无论数值积分多么精确, 闭环系统可能都不稳定^[36]. 文献 [32, 34] 通过增加输入滤波器解决了控制器的实现问题. 本文将给出一个完全不同的解决方案, 既解决了传统预估器反馈控制器的实现问题, 也克服了嵌套预估器在数值实现时闭环系统可能不稳定性 (需增加输入滤波器).

2 嵌套-伪预估器反馈

2.1 嵌套-伪预估器反馈的设计

注意到, 时滞系统 (1) 与控制器

$$u(t) = Kx(t+h-r) \quad (5)$$

组成的闭环系统

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t-r) = (A+BK)x(t-r) \quad (6)$$

与式 (2) 的形式一样, 则由假设 1 可知, 闭环系统是渐近稳定的. 但是, 由于控制器 (5) 含有未来的状态 $x(t+h-r)$, $h > r$, 需利用系统的模型对其进行预测. 当 $h > r$ 时, 由于基于传统预估器的控制器仍然含有未来的状态而不能实现, 且含有类似于式 (4) 的积分项, 故传统预估器反馈方法不再适用. 由文

献 [31] 和 [27] 可知, 嵌套预估器反馈^[31] 和伪预估器反馈^[27] 方法都可预测状态 $x(t+h-r)$ 的值. 基于嵌套预估器反馈的控制器的含有类似于式 (4) 的积分项而不易数值实现. 故利用伪预估器反馈^[27] 的思想, 结合闭环系统 (6), 可得

$$x(t+h-r) = Dx(t-2r+h) + x(t) - Dx(t-r) + \int_{-r}^{h-2r} A_c x(t+s) ds \quad (7)$$

其中, $A_c = A + BK$. 注意到, 如果 $h > 2r$, 预估器 (7) 仍然含有未来状态 $x(t+s)$, $s > 0$, 而不可实现. 结合文献 [31], 本文将建立嵌套-伪预估器反馈方法. 主要思想如下: 利用闭环系统 (6) 可先预测 $x(t+\theta_1)$, $\theta_1 \in [0, r]$, 即

$$\hat{x}(t+\theta_1) = Dx(t-r+\theta_1) + x(t) - Dx(t-r) + \int_{-r}^{\theta_1-r} A_c x(t+\theta_0) d\theta_0 \quad (8)$$

此预估器是可实现的, 其中, $\hat{x}(s)$ 表示 $x(s)$ 的预测值, 如果 $s \leq 0$, 则 $\hat{x}(s) = x(s)$. 采用类似的方法, 利用已预测到的 $\hat{x}(t+\theta_1)$, $\theta_1 \in [0, r]$, 预测 $\hat{x}(t+r+\theta_2)$, $\theta_2 \in [0, r]$, 即

$$\hat{x}(t+r+\theta_2) = D\hat{x}(t+\theta_2) + \hat{x}(t+r) - Dx(t) + \int_0^{\theta_2} A_c \hat{x}(t+\theta_1) d\theta_1$$

此预估器也是可实现的. 类似地, 利用前面所预测到的状态值 $\hat{x}(t+jr+\theta_{j+1})$, $j \leq k-1$, $\theta_{j+1} \in [0, r]$ 和过去的输入 $u(t+s)$, $s \in [-h, 0]$, 对任意的整数 $k \geq 1$, 状态 $\hat{x}(t+kr+\theta_{k+1})$, $\theta_{k+1} \in [0, r]$ 的预测值为

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+kr+\theta_{k+1}) &= D\hat{x}(t+(k-1)r+\theta_{k+1}) + \\ &\hat{x}(t+kr) - D\hat{x}(t+(k-1)r) + \\ &\int_0^{\theta_{k+1}} A_c \hat{x}(t+(k-1)r+\theta_k) d\theta_k \end{aligned} \quad (9)$$

上面预估器是可实现的. 显然地, 对任意的 $h-r > 0$, 存在唯一的非负整数 κ 使得 $h-r \in (kr, (k+1)r]$. 因此, 可得到状态 $x(t+s)$, $s \in (0, h-r]$ 的预测值. 则控制器 (5) 可重写为

$$u(t) = K\hat{x}(t+h-r) \quad (10)$$

此控制器是可实现的. 控制器 (10) 是由伪预估器 (9) 以状态时滞 r 为步长嵌套地得到的, 故控制器 (10) 称为嵌套-伪预估器反馈控制器.

注意到, 控制器 (10) 含有多重积分, 虽然不影响控制器实现, 但形式较为复杂. 为此, 下面给出仅含一重积分的显式嵌套-伪预估器反馈控制器. 根据文献 [32] 可得

$$\begin{aligned} \varphi(t+kr+\theta_{k+1}) &= f_k(\theta_{k+1})\varphi(t) + \\ &\int_0^r g_k(\theta_{k+1}-\theta_0)x(t-r+\theta_0) d\theta_0 + \\ &\int_0^{\theta_{k+1}} \varsigma_k(\theta_{k+1}-\theta_0)x(t-r+\theta_0) d\theta_0 \end{aligned}$$

其中, $\varphi(t) = x(t) - Dx(t-r)$, $f_k(\cdot)$, $g_k(\cdot)$ 和 $\varsigma_k(\cdot)$ 递归地定义为

$$\begin{aligned} f_{k+1}(\sigma) &= f_k(r) + \sum_{i=0}^k A_c D^i \int_0^\sigma f_{k-i}(s) ds \\ g_{k+1}(\sigma-\sigma_0) &= g_k(r-\sigma_0) + h_k(r-\sigma_0) + \\ &\sum_{i=0}^k A_c D^i \int_0^\sigma g_{k-i}(s-\sigma_0) ds \\ \varsigma_{k+1}(\sigma-\sigma_0) &= \sum_{i=0}^k A_c D^i \int_{\sigma_0}^\sigma h_{k-i}(s-\sigma_0) ds + \\ &A_c D^{k+1} \end{aligned} \quad (11)$$

初值为 $f_0(\cdot) = I_n$, $g_0(\cdot) = I_n$ 和 $\varsigma_0(\cdot) = A_c$. 则可得下面引理, 其证明与文献 [32] 中定理 2 证明类似.

引理 1. 设存在非负整数 κ 和 $\theta_h \in (0, r]$, 使得 $\kappa r + \theta_h = h$. 则控制器 (10) 可写为

$$\begin{aligned} u(t) &= K \sum_{i=0}^{\kappa-1} D^i \left(f_{\kappa-1-i}(\theta_h)(x(t) - Dx(t-r)) + \right. \\ &\int_0^r g_{\kappa-1-i}(\theta_h-\theta_0)x(t-r+\theta_0) d\theta_0 + \\ &\left. \int_0^{\theta_h} \varsigma_{\kappa-1-i}(\theta_h-\theta_0)x(t-r+\theta_0) d\theta_0 \right) + \\ &KD^\kappa x(t-r+\theta_h) \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $f_\kappa(\cdot)$, $g_\kappa(\cdot)$ 和 $\varsigma_\kappa(\cdot)$ 由式 (11) 所定义.

注意到, 引理 1 给出了仅含一重积分的显式嵌套-伪预估器反馈控制器.

2.2 闭环系统的稳定性分析

本节将给出系统 (1) 和 (12) 组成闭环系统的稳定性分析. 注意到, 闭环系统可写为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - D\dot{x}(t-r) &= Ax(t-r) + \\ &BK \sum_{i=0}^{\kappa-1} D^i \left(f_{\kappa-1-i}(\theta_h)x(t-h) - \right. \\ &f_{\kappa-1-i}(\theta_h)Dx(t-r-h) + \\ &\int_0^r g_{\kappa-1-i}(\theta_h-\theta_0)x(t-r-h+\theta_0) d\theta_0 + \\ &\left. \int_0^{\theta_h} \varsigma_{\kappa-1-i}(\theta_h-\theta_0)x(t-r-h+\theta_0) d\theta_0 \right) + \\ &BKD^\kappa x(t-r-h+\theta_h) \end{aligned} \quad (13)$$

根据文献 [32] 定义一组矩阵函数如下:

$$p_{k+1,j}(\delta) = \sum_{i=0}^{k-j} A_c D^i \int_{\sigma_0+h-jr}^{\sigma} p_{k-i,j}(s-\sigma_0) ds$$

$$q_{k+1,l}(\delta) = q_{k,l}(r-\sigma_0) + p_{k,l}(r-\sigma_0) + \sum_{i=0}^{k-1-l} A_c D^i \int_0^{\sigma} q_{k-i,l}(s-\sigma_0) ds \quad (14)$$

$p_{k+1,k+1}(\delta) = I_n, q_{k+1,k}(\delta) = I_n, \delta = \sigma - \sigma_0$, 其中, $j \in \mathbf{I}[0, k] := \{0, 1, \dots, k\}$ 和 $l \in \mathbf{I}[0, k-1]$, 初值为

$$p_{0,0}(\cdot) = I_n, q_{1,0}(\cdot) = I_n \quad (15)$$

下面定理将给出保证由式 (1) 和 (12) 组成闭环系统稳定的充要条件.

定理 1. 在假设 1 成立的条件下, 令存在非负整数 κ 和 $\theta_h \in [0, r]$, 使得 $\kappa r + \theta_h = h$. 则由式 (1) 和 (12) 组成闭环系统是渐近稳定的当且仅当下面积分时滞系统是渐近稳定的.

$$\dot{\varrho}(t) = -K \sum_{i=0}^{\kappa-1} D^i \left(\sum_{j=0}^{\kappa-1-i} \int_{jr-h}^{\theta_h+jr-h} \xi(\vartheta, \theta_0) d\theta_0 + \sum_{l=0}^{\kappa-2-i} \int_{lr-h}^{(l+1)r-h} \zeta(\vartheta, \theta_0) d\theta_0 \right) \quad (16)$$

其中, $\xi(\vartheta, \theta_0) = p_{\kappa-1-i,j}(\vartheta) B \varrho(t+\theta_0), \zeta(\vartheta, \theta_0) = q_{\kappa-1-i,l}(\vartheta) B \varrho(t+\theta_0), \vartheta = \theta_h - \theta_0, p_{\kappa,j}(\cdot), q_{\kappa,l}(\cdot)$ 由式 (14) 和 (15) 所定义.

证明. 注意到, 闭环系统 (13) 可重写为

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t-r) = A_c x(t-r) + B\varrho(t) \quad (17)$$

其中

$$\varrho(t) = K \sum_{i=0}^{\kappa-1} D^i \left(f_{\kappa-1-i}(\theta_h) x(t-h) - f_{\kappa-1-i}(\theta_h) D x(t-r-h) + \int_0^r g_{\kappa-1-i}(\theta_h - \theta_0) x(t-r-h+\theta_0) d\theta_0 + \int_0^{\theta_h} \varsigma_{\kappa-1-i}(\theta_h - \theta_0) x(t-r-h+\theta_0) d\theta_0 \right) + K D^{\kappa} x(t-r-h+\theta_h) - K x(t-r) \quad (18)$$

注意到系统 (17) 与文献 [32] 中的系统 (1) 具有类似的结构. 根据引理 1 和文献 [32] 中定理 2 的证明, 可得

$$x(t-r) = \sum_{i=0}^{\kappa-1} D^i \left(f_{\kappa-1-i}(\theta_h) x(t-h) - f_{\kappa-1-i}(\theta_h) D x(t-r-h) + \int_0^r g_{\kappa-1-i}(\theta_h - \theta_0) x(t-r-h+\theta_0) d\theta_0 + \int_0^{\theta_h} \varsigma_{\kappa-1-i}(\theta_h - \theta_0) x(t-r-h+\theta_0) d\theta_0 + \sum_{j=0}^{\kappa-1-i} \int_{jr-h}^{\theta_h+jr-h} \xi(\vartheta, \theta_0) d\theta_0 + \sum_{l=0}^{\kappa-2-i} \int_{lr-h}^{(l+1)r-h} \zeta(\vartheta, \theta_0) d\theta_0 \right) + D^{\kappa} x(t-r-h+\theta_h) \quad (19)$$

其中, $f_{\kappa}(\cdot), g_{\kappa}(\cdot), \varsigma_{\kappa}(\cdot), p_{\kappa,j}(\cdot)$ 和 $q_{\kappa,l}(\cdot)$ 由式 (11), (14) 和式 (15) 所定义. 则将式 (19) 代入式 (18) 可得积分时滞系统 (16). 因此, 如果积分时滞系统 (16) 是渐近稳定的, 则由式 (17) 可得, 式 (1) 和 (12) 组成的闭环系统是渐近稳定的. 必要性易得, 故省略.

通过把多重积分转化为累次积分, 易知积分时滞系统 (16) 与文献 [27] 中式 (17) 具有类似的形式. 故可利用文献 [27] 中保证积分时滞系统 (17) 稳定的充分条件分析积分时滞系统 (16) 的稳定性.

由定理 1 可知, 基于嵌套-伪预估器反馈方法事实上解决了同时具有输入和状态时滞的中立型时滞系统的镇定问题. 与传统预估器反馈和嵌套预估器反馈^[31-32]相比, 嵌套-伪预估器反馈不含有类似于式 (4) 的积分项. 故嵌套-伪预估器反馈控制器优点是, 在数值实现时, 无需输入滤波器便可镇定原时滞控制系统. 此外, 嵌套-伪预估器反馈方法还可以推广到更一般的中立型时滞控制系统.

$$\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{n_1} A_i x_i(t-r_i) + \sum_{j=1}^{n_2} B_j u_j(t-h_j)$$

其中, $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, i \in \mathbf{I}[0, n_1]$ 和 $B_j \in \mathbf{R}^{n \times m_j}, j \in \mathbf{I}[0, n_2]$ 为定常矩阵, $0 = r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_{n_1}$ 和 $0 = h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{n_2}$ 分别是状态时滞和输入时滞.

3 滞后型时滞控制系统

本节将嵌套-伪预估器反馈方法推广到滞后型时滞系统. 令 $D = 0$, 则系统 (1) 变为下面滞后型时滞控制系统.

$$\dot{x}(t) = A x(t-r) + B u(t-h) \quad (20)$$

则闭环系统 (6) 退化成

$$\dot{x}(t) = A_c x(t-r) \quad (21)$$

嵌套-预估器 (8) 和 (9) 分别退化成

$$\hat{x}(t + \theta_1) = x(t) + \int_{-r}^{\theta_1-r} A_c x(t + \theta_0) d\theta_0$$

和

$$\hat{x}(t + kr + \theta_{k+1}) = \hat{x}(t + kr) + \int_0^{\theta_{k+1}} A_c \hat{x}(t + (k-1)r + \theta_k) d\theta_k \quad (22)$$

由于嵌套-伪预估器 (22) 与文献 [37] 中式 (8) 具有类似的结构. 则可得未来状态值 $\hat{x}(t + kr + \theta_{k+1})$ 为

$$\begin{aligned} \hat{x}(t + kr + \theta_{k+1}) &= G_k(\theta_{k+1})x(t) + \int_{-r}^{\theta_{k+1}-r} \frac{(\theta_{k+1} - \theta_0 - r)^k}{k!} F_{k,k}(\theta_{k+1})x(t + \theta_0) d\theta_0 + \\ &\sum_{i=1}^{k-1} \int_{-r}^0 \frac{1}{i!} (-\theta_0)^i F_{k,i}(\theta_{k+1})x(t + \theta_0) d\theta_0 + \\ &\int_{-r}^0 F_{k,0}(\theta_{k+1})x(t + \theta_0) d\theta_0 \end{aligned} \quad (23)$$

其中, 对所有的 $i \in \mathbf{I}[0, k-1]$,

$$\begin{cases} F_{k+1,i}(\theta) = F_{k,i}(r) + \left(\int_0^\theta F_{k,i}(s) ds\right) A_c \\ G_{k+1}(\theta) = G_k(r) + \left(\int_0^\theta G_k(s) ds\right) A_c \end{cases} \quad (24)$$

和 $F_{k+1,k}(\theta) = F_{k,k}(\theta)$, $F_{k+1,k+1}(\theta) = A_c F_{k,k}(\theta)$. 式 (24) 的初值条件为 $F_{0,0} = A_c$ 和 $G_0 = I_n$.

设存在非负整数 κ 和 $\theta_h \in [0, r]$, 使得 $\kappa r + \theta_h = h$. 由式 (23) 可得显式的嵌套-伪预估器反馈控制器为

$$\begin{aligned} u(t) &= Kx(t-r+h) = \\ &K \left(G_{\kappa-1}(\theta_h)x(t) + \int_{-r}^0 F_{\kappa-1,0}(\theta_h)x(t+\theta_0) d\theta_0 + \sum_{i=1}^{\kappa-2} \int_{-r}^0 \frac{F_{\kappa-1,i}(\theta_h)}{i!} (-\theta_0)^i x(t+\theta_0) d\theta_0 + \int_{-r}^{\theta_{\kappa-r}} \frac{1}{(\kappa-1)!} (\kappa - \theta_0 - r)^{\kappa-1} \times \right. \\ &\left. F_{\kappa-1,\kappa-1}(\theta_h)x(t+\theta_0) d\theta_0 \right) \end{aligned} \quad (25)$$

下面推论将给出保证闭环系统渐近稳定的充分必要条件.

推论 1. 假设存在增益矩阵 K , 使得系统 (21) 是渐近稳定的. 设存在非负正整数 κ 和 $\theta_h \in [0, r]$ 使得 $\kappa r + \theta_h = h$. 则式 (20) 和 (25) 组成的闭环系统是渐近稳定的当且仅当下列积分时滞系统是渐近稳定的.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= -K \sum_{i=1}^{\kappa-1} \int_{-h}^{\theta_h+ir-h} \frac{1}{(k_h-1-i)!} \times \\ &\left((\theta_h + ir - h - \theta_i) A_c \right)^{\kappa-1-i} B\sigma(t+\theta_i) d\theta_i \end{aligned} \quad (26)$$

证明. 由式 (20) 和 (25) 组成的闭环系统可写为

$$\dot{x}(t) = A_c x(t-r) + B\sigma(t) \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= K \left(\int_{-r}^0 F_{\kappa-1,0}(\theta_h)x(t-h+\theta_0) d\theta_0 + \sum_{i=1}^{\kappa-2} \int_{-r}^0 \frac{(-\theta_0)^i}{i!} F_{\kappa-1,i}(\theta_h)x(t-h+\theta_0) d\theta_0 + \int_{-r}^{\theta_h-r} \frac{(\theta_h - \theta_0 - r)^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} \times \right. \\ &\left. F_{\kappa-1,\kappa-1}(\theta_h)x(t-h+\theta_0) d\theta_0 - x(t-r) + G_{\kappa-1}(\theta_h)x(t-h) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

注意到式 (27) 与文献 [37] 中的式 (1) 具有相似的形式. 因此, 通过引理 1^[37], 可得

$$\begin{aligned} x(t-r) &= G_{\kappa-1}(\theta_h)x(t-h) + \int_{-r}^0 F_{\kappa-1,0}(\theta_h)x(t-h+\theta_0) d\theta_0 + \sum_{i=1}^{\kappa-2} \int_{-r}^0 \frac{(-\theta_0)^i}{i!} F_{\kappa-1,i}(\theta_h)x(t-h+\theta_0) d\theta_0 + \int_{-r}^{\theta_h-r} \frac{(\theta_h - \theta_0 - r)^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} \times \\ &F_{\kappa-1,\kappa-1}(\theta_h)x(t-h+\theta_0) d\theta_0 + \sum_{i=1}^{\kappa-1} \int_{-h}^{\theta_h+ir-h} \frac{(\theta_h + ir - h - \theta_i)^{\kappa-1-i}}{(\kappa-1-i)!} \times \\ &A_c^{\kappa-1-i} B\sigma(t+\theta_i) d\theta_i \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $F_{\kappa+1,i}(\cdot)$ 和 $G_{\kappa+1}(\cdot)$ 由式 (24) 所定义. 则将式 (29) 代入式 (28) 可得系统 (26). 因此, 如果系统 (26) 是渐近稳定的, 由式 (27) 易知, 式 (20) 和 (25) 组成的闭环系统是渐近稳定的. 必要性易证, 故省略. \square

值得注意的是积分时滞系统 (26) 的稳定性分析可参考文献 [38]. 事实上, 本节利用嵌套-伪预估器反馈方法, 解决了同时具有输入和状态时滞的滞后型线性系统的镇定问题. 本文所提出的方法由第 2 节的中立型时滞系统推广到第 3 节的滞后型时滞系统是非平凡的, 例如定理 1 中的充要条件 (16) 不能直接退化到推论 1 的式 (26).

4 数值仿真

考虑同时具有输入和状态时滞的线性系统^[39]

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t-r) = Ax(t-r) + Bu(t-h) \quad (30)$$

其中, 系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -1.1 & -0.2 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$B = [0, 1]^T$, 状态时滞 $r = 0.6$. 为了更好地说明本文所提方法的有效性, 分别地取三个不同的输入时滞 $h = 0.9, h = 1.5$ 和 $h = 2$. 设计状态反馈增益矩阵 K 使得 $\lambda(A + BK) = \{-0.75, -0.8\}$, 从而得到

$$K = [0.5250 \quad -0.2500]$$

1) $h = 0.9$

根据等式 $\kappa r + \theta_h = h$, 可得 $\kappa = 1$ 和 $\theta_h = 0.3$.

下面将利用本文提出的嵌套-伪预估器反馈控制器补偿输入时滞. 由引理 1 可知, 嵌套-伪预估器反馈控制器设计为

$$u(t) = K \left(Dx(t-r-\theta_h) + \int_0^r x(t-s) ds + \int_{r-\theta_h}^r A_c x(t-s) ds + \varphi(t) \right) \quad (31)$$

2) $h = 1.5$

根据等式 $\kappa r + \theta_h = h$, 可得 $\kappa = 2$ 和 $\theta_h = 0.3$. 由引理 1 可知, 嵌套-伪预估器反馈控制器设计为

$$u(t) = K \sum_{i=0}^1 D^i \left(f_{1-i}(\theta_h) (x(t) - Dx(t-r)) + \int_0^r g_{1-i}(\theta_h - r + s) x(t-s) ds + \int_{r-\theta_h}^r \varsigma_{1-i}(\theta_h - r + s) x(t-s) ds \right) + KD^2 x(t-r+\theta_h) \quad (32)$$

3) $h = 2$

根据等式 $\kappa r + \theta_h = h$, 可得 $\kappa = 3$ 和 $\theta_h = 0.2$. 嵌套-伪预估器反馈控制器设计为

$$u(t) = K \sum_{i=0}^2 D^i \left(f_{2-i}(\theta_h) (x(t) - Dx(t-r)) + \int_0^r g_{2-i}(\theta_h - r + s) x(t-s) ds + \int_{r-\theta_h}^r \varsigma_{2-i}(\theta_h - r + s) x(t-s) ds \right) + KD^3 x(t-r+\theta_h) \quad (33)$$

令初值为 $x(0) = [1, -1]^T$. 则系统 (30) 分别与嵌套-伪预估器反馈控制器 (31), (32) 和 (33) 组成闭环系统的状态轨迹和控制信号如图 1, 图 2 和图 3

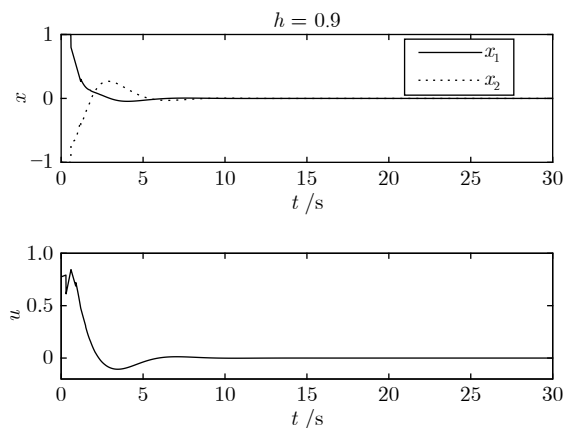


图 1 系统 (30) 和 (31) 组成闭环系统的状态轨迹和控制信号

Fig.1 State trajectories and control signals for the closed-loop system consisting of (30) and (31)

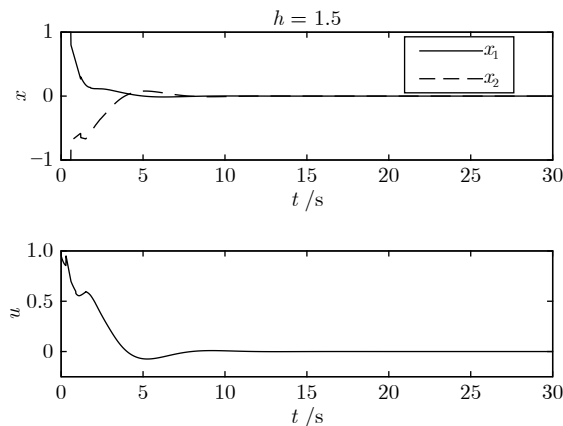


图 2 系统 (30) 和 (32) 组成闭环系统的状态轨迹和控制信号

Fig.2 State trajectories and control signals for the closed-loop system consisting of (30) and (32)

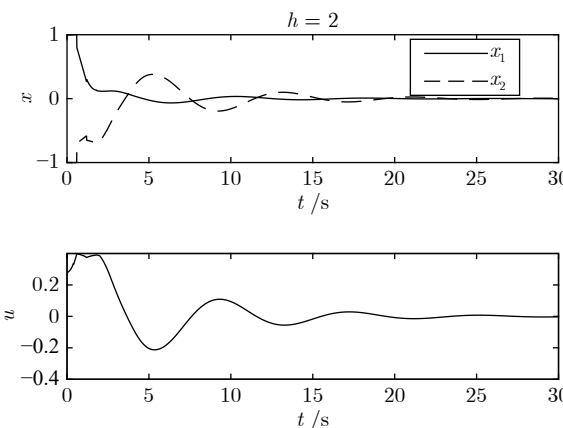


图 3 系统 (30) 和 (33) 组成闭环系统的状态轨迹和控制信号

Fig.3 State trajectories and control signals for the closed-loop system consisting of (30) and (33)

所示, 易知闭环系统是渐近稳定的.

5 结论

针对同时具有输入和状态时滞的中立型/滞后型时滞控制系统, 研究仅对其输入时滞补偿问题, 提出了嵌套-伪预估器反馈方法, 不同于传统的预估器反馈利用开环系统预测系统未来的状态, 嵌套-伪预估器反馈则是利用闭环系统嵌套地预测系统未来的状态, 实现对任意大但有界的输入时滞进行完全补偿. 结果表明闭环系统是渐近稳定的当且仅当积分时滞系统是渐近稳定的. 最后, 给出一个数值仿真验证所提出方法的有效性.

References

- Xu S, Lam J, Zou Y. New results on delay-dependent robust H_∞ control for systems with time-varying delays. *Automatica*, 2006, **42**(2): 343–348
- Wu Z G, Shi P, Su H, Chu J. Sampled-data synchronization of chaotic Lur'e systems with time delays. *IEEE transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, **24**(3): 410–421
- Zhang B, Lam J, Xu S. Relaxed results on reachable set estimation of time-delay systems with bounded peak inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, **26**(9): 1994–2007
- He Bo, Fang Yong-Chun, Lu Biao. Robust control for an overhead crane with input delay. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(6): 1065–1073
(何博, 方勇纯, 卢彪. 针对输入时滞的桥式起重机鲁棒控制. 自动化学报, 2019, **45**(6): 1065–1073)
- Zhou Bi-Feng, Luo Yi-Ping. Neutralization control of distributed parameter systems with delay. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(12): 2222–2227
(周笔锋, 罗毅平. 时滞分布参数系统中和控制设计. 自动化学报, 2018, **44**(12): 2222–2227)
- Xu Jun, Zhang Guo-Liang, Zeng Jing, Sun Qiao, Yang Fan. Robust guaranteed cost consensus for high-order discrete-time multi-agent systems with switching topologies and time delays. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(2): 360–373
(徐君, 张国良, 曾静, 孙巧, 羊帆. 具有时延和切换拓扑的高阶离散时间多智能体系统鲁棒保性能一致性. 自动化学报, 2019, **45**(2): 360–373)
- Wu M, He Y, She J H, Liu G P. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. *Automatica*, 2004, **40**(8): 1435–1439
- Sun X M, Wang W. Integral input-to-state stability for hybrid delayed systems with unstable continuous dynamics. *Automatica*, 2012, **48**(9): 2359–2364
- Chen W H, Zheng W X. Exponential stability of nonlinear time-delay systems with delayed impulse effects. *Automatica*, 2011, **47**(5): 1075–1083
- Mazenc F, Malisoff M. Stabilization and robustness analysis for time-varying systems with time-varying delays using a sequential subpredictors approach. *Automatica*, 2017, **82**: 118–127
- Liu K Z, Sun X M, Krstic M. Distributed predictor-based stabilization of continuous interconnected systems with input delays. *Automatica*, 2018, **91**: 69–78
- Li X, Song S. Stabilization of delay systems: Delay-dependent impulsive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **62**(1): 406–411
- Cacace F, Germani A. Output feedback control of linear systems with input, state and output delays by chains of predictors. *Automatica*, 2017, **85**: 455–461
- Liu X, Zhang, K. Input-to-state stability of time-delay systems with delay-dependent impulses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, **65**(4): 1676–1682
- Chen W H, Ruan Z, Zheng W X. Stability and L_2 -gain analysis for linear time-delay systems with delayed impulses: An augmentation-based switching impulse approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, **64**(10): 4209–4216
- Li X, Song S, Wu J. Exponential stability of nonlinear systems with delayed impulses and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, **64**(10): 4024–4034
- Cai T, Cheng P. Exponential stability theorems for discrete-time impulsive stochastic systems with delayed impulses. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, **357**(2): 1253–1279
- Hu W, Zhu Q. Stability analysis of impulsive stochastic delayed differential systems with unbounded delays. *Systems Control & Letters*, 2020, **136**: 104606
- Juarez L, Mondies, Kharitonov V L. Dynamic predictor for systems with state and input delay: A time-domain robust stability analysis. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, **30**(6): 2204–2218
- Sun H, Sun J, Chen J. Stability of linear systems with sawtooth input delay and predictor-based controller. *Automatica*, 2020, **117**: 108949
- Shi C, Vong S. Finite-time stability for discrete-time systems with time-varying delay and nonlinear perturbations by weighted inequalities. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, **357**(1): 294–313
- Zhang X, Zhao N, Shi P. Necessary conditions of exponential stability for a class of linear neutral-type time-delay systems. *International Journal of Control*, 2019, **92**(6): 1289–1297
- Smith O J M. A controller to overcome dead time. *ISA Journal*, 1959, **6**(2): 28–33
- Bekiaris-Liberis N, Krstic M. Predictor-feedback stabilization of multi-input nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **62**(2): 516–531
- Xia Y, Liu G P, Fu M, Rees D. Predictive control of networked systems with random delay and data dropout. *IET Control Theory & Applications*, 2009, **3**(11): 1476–1486
- Manitius A Z, Olbrot A W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, **24**: 541–553
- Zhou B. Pseudo-predictor feedback stabilization of linear systems with time-varying input delays. *Automatica*, 2014, **50**(11): 2861–2871
- Liu Q, Zhou B. Regulation of linear systems with both pointwise and distributed input delays by memoryless feedback. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, **356**(10): 5172–5192
- Zhou B, Liu Q, Michiels W. Design of pseudo-predictor feedback for neutral-type linear systems with both state and input delays. *Automatica*, 2019, **109**: 108502
- Zhou B, Lin Z, Duan G R. Truncated predictor feedback for lin-

- ear systems with long time-varying input delay. *Automatica*, 2012, **48**(10): 2387–2399
- 31 Zhou B. Input delay compensation of linear systems with both state and input delays by nested prediction. *Automatica*, 2014, **50**(5): 1434–1443
- 32 Zhou B, Liu Q. Input delay compensation for neutral type time-delay systems. *Automatica*, 2017, **78**: 309–319
- 33 Kharitonov V L. An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay. *Automatica*, 2014, **50**(1): 211–217
- 34 Kharitonov V L. Predictor based stabilization of neutral type systems with input delay. *Automatica*, 2015, **52**: 125–134
- 35 Fiagbedzi Y A, Pearson A E. Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(9): 847–855
- 36 Van Assche V, Dambrine M, Lafay J F, Richard J P. Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws. In: Proceedings of 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999, 4668–4672
- 37 Zhou B, Liu Q. On nested predictor feedback for linear systems with both state and input delays, In: Proceedings of the 12th World Congress on Intelligent Control and Automation, IEEE, 2016, 2382–2387
- 38 Zhou B, Li Z Y. Stability analysis of integral delay systems with multiple delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(1): 188–193
- 39 Han Q L. A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral systems with discrete and distributed delays. *Automatica*, 2004, **40**(10): 1791–1796



刘青松 武汉科技大学信息科学与工程学院副教授. 2019 年获哈尔滨工业大学控制科学与工程专业博士学位. 主要研究方向为时滞补偿, 社会网络和多智能体系统.

E-mail: qingsongliu@wust.edu.cn

(LIU Qing-Song Associate professor at the School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology. He received his Ph.D. degree from the Department of Control Science and Engineering at Harbin Institute of Technology in 2019. His research interest delay compensation, social networks, and multiagent systems.)