第 44 卷 第 12 期 自 动 化 学 报 Vol. 44, No. 12
2018 年 12 月 ACTA AUTOMATICA SINICA December, 2018

时滞分布参数系统中和控制器设计

周笔锋 [1,2] 罗毅平 [2,3]

摘 要 首先给出中和控制器设计思路, 针对具有时滞特性的分布参数系统, 设计中和控制器, 讨论此类系统的稳定问题. 利用 Lyapunov 稳定性理论并结合矩阵不等式处理方法, 得出具有时滞特性分布参数系统稳定中和控制器存在的充分条件. 最后结合所给条件, 给出一个数值仿真说明其有效性.

关键词 分布参数系统, 中和控制, Lyapunov 稳定性, 时滞

引用格式 周笔锋, 罗毅平. 时滞分布参数系统中和控制器设计. 自动化学报, 2018, **44**(12): 2222−2227

DOI 10.16383/j.aas.2018.c170084

Neutralization Control of Distributed Parameter Systems With Delay

ZHOU Bi-Feng[1,2] LUO Yi-Ping[2,3]

Abstract The design idea of neutralization controller is given at first. Then the stability problem of distributed parameter systems with delay is investigated. A neutralization controller is designed for the system. By the Lyapunov stability theory and the linear matrix inequality, a sufficient condition is obtained for the stable neutralization controller to exist in the distributed parameter systems, in which the characteristics are delayed. Finally, combined with the given conditions, a numerical simulation is conducted to illustrate the effectiveness of the controller.

Key words Distributed parameter systems (DPSs), neutralization control, Lyapunov stability, delay

Citation Zhou Bi-Feng, Luo Yi-Ping. Neutralization control of distributed parameter systems with delay. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(12): 2222−2227

实际生活中许多物理系统都具有时空特性, 例如热扩散、流体换热器、化学工程、旋转梁、可变几何形状静电微致动器、集成和消防神经元等[1−7], 其行为必须依赖于时间和空间位置, 这些系统的时空过程被称为分布参数系统 (Distributed parameter systems, DPSs). 为了更好地研究此类系统, 根据能量守恒定律, 通常构建拟线性抛物型偏微分方程 (Quasi-linear parabolic partial differential equation) 或拟线性抛物型偏微分−积分方程 (Quasi-linear partial differential-integral equations). 构建拟线性抛物型偏微分方程研究分布参数系统稳定性一直是国内外相关领域学者的重点研究课题[8−15].

文献 [8] 针对拟线性抛物型偏微分方程设计控制器, 利用 Lyapunov 稳定性定理结合线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 计算方法, 得出了分布参数系统指数稳定控制器存在的充分条件. 文献 [9] 针对一类同时具有变时滞和连续分布时滞的分布参数系统的状态反馈控制问题进行了研究, 通过选择适当的 Lyapunov-Krasovskii 函数, 采用 LMI 方法, 得到了变时滞闭环系统渐近稳定的一个充分条件. 文献 [10] 针对具有时滞性的抛物型偏微分方程, 利用滑模控制 (Sliding mode control, SMC), 研究了系统的稳定性. 文献 [11] 针对一类具有耦合性质的时滞分布参数系统, 构建拟线性抛物型偏微分方程并结合 Lyapunov 稳定性定理, 研究了系统节点的同步问题. 文献 [12] 针对工艺参数未知的化学分布参数系统, 构建半线性偏微分方程, 利用 Lyapunov 稳定性定理, 研究了其自适应输出反馈控制问题. 文献 [13] 基于边界观测和边界控制, 针对扩散抛物型偏微分方程, 运用自适应控制方案, 研究了系统的同步稳定性.

分布参数系统分布式控制是针对分布参数系统中的状态变量设计控制器, 达到控制的目的. 这种方法的好处在于控制器设计简单, 但实际应用中有一定难度. 考虑现实生活中存在另一类控制方法, 例如工厂的工业废水处理, 工业废水中污染物的种类较

收稿日期 2017-02-17 录用日期 2017-05-26
Manuscript received February 17, 2017; accepted May 26, 2017
国家自然科学基金 (11372107), 湖南省自然科学基金 (2017JJ5011, 2017JJ4004), 风力发电机组及控制湖南省重点实验室 (湖南工程学院) 开放基金 (2017FLFDYB03) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (11372107), Natural Science Foundation of Hunan Province (2017JJ5011, 2017JJ4004), and financially supported by Hunan Provincial Key Laboratory of Wind Generator and Its Control (2017FLFDYB03)
本文责任编委 姚鹏飞
Recommended by Associate Editor YAO Peng-Fei
1. 湖南电气职业技术学院 湘潭 411101 2. 湖南工程学院风电装备与电能变换协同创新中心 湘潭 411101 3. 湖南工程学院电气信息学院 湘潭 411101
1. Hunan Electrical College of Technology, Xiangtan 411101 2. Collaborative Innovation Center of Wind Power Equipment and Energy Conversion, Xiangtan 411101 3. College of Electrical Information, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411101

多, 较常见的有酸碱污染物, 对于工业废水, 在进入河道之前需进行一系列处理. 对于工业废水中的酸碱污染物, 比较常用的方法是用相对应的化学物质进行中和. 例如对于酸性污水需用碱性物质来中和, 首先, 溶液中酸性离子的分布可以看成一个分布参数系统, 因为其浓度不是均匀分布的; 其次, 在中和过程中, 渗入工业废水中的碱性离子的扩散也可以看作是一个分布参数系统, 对于不同的时间, 不同的位置, 碱性离子的密度不尽相同, 若添加了过量的碱性物质, 污水又将呈现碱性, 污染环境; 若碱性物质的量过少, 则存在部分酸性离子不能中和, 同样对环境存在危害. 基于此, 若将碱性物质在工业废水中的扩散现象构建成一个合适的分布参数系统, 用偏微分方程描述, 在构建的系统中同时考虑酸性离子对碱性物质的影响, 将碱性物质作为控制酸性离子的控制器, 这种控制方法称为中和控制.

在实际系统中, 时滞现象普遍存在[9−11, 16−18], 在系统的信息传递和信号检测过程中通常具有滞后现象. 因此, 从时滞分布参数系统出发, 设计中和控制器, 研究时滞分布参数系统的中和控制就显得尤为重要. 基于此, 本文针对具有变时滞特性的分布参数系统, 设计中和控制器, 讨论此类系统的稳定问题. 利用 Lyapunov 稳定性理论并结合 LMI 处理方法, 得出了具有时滞特性分布参数系统稳定中和控制器存在的充分条件. 最后结合所给条件, 给出一个数值仿真说明其有效性.

1　问题描述

考虑下列具有时滞特性的分布参数系统

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_i(x,t)}{\partial t} = D_a\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial x_k^2} + &\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}^0 w_j(x,t) + &\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j(x,t-\tau)+u_i,&\\ i=1,2,\cdots,n\end{aligned} \tag{1}$$

将系统变为矩阵形式, 即为

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = D_a\Delta W(x,t) + A_0W(x,t) + &\\ AW(x,t-\tau)+U(x,t)&\end{aligned} \tag{2}$$

其中, $(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+$, $D_a>0$, τ 为时滞, $A_0=(a_{ij}^0)_{n\times n}$ 和 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为常数矩阵, $\Omega=\{x,|x|<l<\infty\}\in\mathbf{R}^m$ 为具有光滑边界 Θ 的有界区域, 且 $mes\Omega>0$ ($mes\Omega$ 表示 Ω 的测度), $U(x,t)=(u_1(x,t),\cdots,u_n(x,t))\in\mathbf{R}^n$ 为控制输入, 状态变量 $W(x,t)=(w_1(x,t),\cdots,w_n(x,t))\in\mathbf{R}^n$, $\Delta=\sum_{k=1}^m\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 为 Laplace 扩散−吸收算子, 系统初始边界条件为

$$W(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Theta\times[0,+\infty) \tag{3}$$

或

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=0,\qquad (x,t)\in\Theta\times[0,+\infty) \tag{4}$$

$$W(x,t)=\psi(x,t),\quad (x,t)\in\Theta\times[-\tau,0) \tag{5}$$

其中, n 为 Θ 的单位外法向量, $\psi(x,t)$ 为适当光滑的函数.

为使系统 (1) 达到稳定, 设计如下中和控制器

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\eta_i(x,t)}{\partial t}=D_c\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2\eta_i(x,t)}{\partial x_k^2}+\sum_{j=1}^{n}b_{cij}\eta_j(x,t)+\\ \qquad\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_{cij}^1w_j(x,t)+\sum_{j=1}^{n}b_{cij}^2w_j(x,t-\tau)\\ u_i(x,t)=k_i\eta_i(x,t),\quad i=1,\cdots,n\end{cases} \tag{6}$$

将控制系统 (6) 变为矩阵形式, 即为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\chi(x,t)}{\partial t}=D_c\Delta\chi(x,t)+B_c\chi(x,t)+\\ \qquad B_{c1}W(x,t)+B_{c2}W(x,t-\tau)\\ U(x,t)=K\chi(x,t)\end{cases} \tag{7}$$

其中, $\chi(x,t)=(\eta_1(x,t),\cdots,\eta_n(x,t))\in\mathbf{R}^n$ 为状态变量, $D_c>0$, $B_c=(b_{cij})_{n\times n}$, $B_{c1}=(b_{cij}^1)_{n\times n}$, $B_{c2}=(b_{cij}^2)_{n\times n}$ 为控制器参数, 控制律 $U(x,t)$ 为系统 (2) 输入控制, 控制系统 (7) 初始边界条件为

$$\chi(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Theta\times[0,+\infty) \tag{8}$$

或

$$\frac{\partial\chi(x,t)}{\partial t}=0,\qquad (x,t)\in\Theta\times[0,+\infty) \tag{9}$$

$$\chi(x,t)=\varphi(x,t),\quad (x,t)\in\Theta\times[-\tau,0) \tag{10}$$

其中, n 为 Θ 的单位外法向量, $\varphi(x,t)$ 为适当光滑的函数.

引理 1 (Schur complements)[19]**.** 对于给定的对称矩阵 $S=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{12}^{\mathrm{T}} & S_{22}\end{bmatrix}<0$, 以下三个条件是等价的:

1) $S<0$;
2) $S_{11}<0$, $S_{22}-S_{12}^{\mathrm{T}}S_{11}^{-1}S_{12}<0$;
3) $S_{22}<0$, $S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}}<0$.

引理 2[20]**.** 设 $\Omega \in \mathbf{R}^n$ 是边界 Θ 内的光滑有界区域, n 为 Θ 的单位外法向量, $G \subset \Omega$ 为一光滑子域, 若 $u, v \in C^2(\bar{G})$, 则

$$\int_G u\Delta v \mathrm{d}x = \int_{\partial G} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s - \int_\Omega \bigtriangledown u \bigtriangledown v \mathrm{d}x \tag{11}$$

2 主要结论

本文的目标是设计控制器使系统达到稳定状态. 将设计的中和控制器 (7) 作用于系统 (2), 得到如下闭环系统.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = D_d \Delta z(x,t) + Hz(x,t) + Gz(x,t-\tau) \tag{12}$$

其中,

$$z(x,t) = \begin{bmatrix} W(x,t) \\ \chi(x,t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} D_a I_n & 0 \\ 0 & D_c I_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n\times 2n}$$

$$H = \begin{bmatrix} A_0 & K \\ B_{c1} & B_c \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n\times 2n}$$

$$G = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_{c2} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n\times 2n}$$

定理 1. 在给定参数条件下, 若存在矩阵 Y, W, S_{1n}, $S_{2n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为正定对称矩阵, 矩阵 M, D, X_1, X_2, X_3, $X_4 \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 满足以下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & X_3 & AS_{1n} & 0 & W & I \\ * & \Pi_2 & X_4 & 0 & M^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & -S_{1n} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S_{2n} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -S_{1n} & 0 \\ * & * & * & * & * & -S_{2n} \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} W & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} S_{1n} & 0 \\ 0 & S_{2n} \end{bmatrix} > 0 \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= W^{\mathrm{T}} A_0^{\mathrm{T}} + A_0 W + X_2 + X_2^{\mathrm{T}} \\ \Pi_2 &= A_0^{\mathrm{T}} Y + Y^{\mathrm{T}} A_0 + X_1 + X_1^{\mathrm{T}} \\ X_1 &= DB_{c1} \\ X_2 &= KM^{\mathrm{T}} \\ X_3 &= W^{\mathrm{T}} A_0^{\mathrm{T}} Y + X_2^T Y + W^{\mathrm{T}} X_1^{\mathrm{T}} + \\ &\quad MB_c^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} + A_0 \\ X_4 &= Y^{\mathrm{T}} AS_{1n} + DB_{c2} S_{1n} \end{aligned}$$

则构建的中和控制器使系统镇定.

证明. 构造李雅普诺夫函数为

$$V(t,z(x,t)) = \int_\Omega z^{\mathrm{T}}(x,t)Pz(x,t)\mathrm{d}x + \int_\Omega\int_{t-\tau}^t z^{\mathrm{T}}(x,\theta)Sz(x,\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \dot V(t,z(x,t)) =& \int_\Omega z^{\mathrm{T}}(x,t)P\dot z(x,t) + \\ & z^{\mathrm{T}}(x,t)P\dot z(x,t)\mathrm{d}x + \int_\Omega z^{\mathrm{T}}(x,t)Sz(x,t) - \\ & z^{\mathrm{T}}(x,t-\tau)Sz(x,t-\tau)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot V(t,z(x,t)) =& \int_\Omega z^{\mathrm{T}}(x,t)(PH+H^{\mathrm{T}}P)z(x,t) + \\ & z^{\mathrm{T}}(x,t)PGz(x,t-\tau) + \\ & 2z^{\mathrm{T}}(x,t)PD_d\Delta z(x,t) + \\ & z^{\mathrm{T}}(x,t-\tau)G^{\mathrm{T}}Pz(x,t) + \\ & z^{\mathrm{T}}(x,t)Sz(x,t) - z^{\mathrm{T}}(x,t-\tau)Sz(x,t-\tau)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

令 $I(t) = \int_\Omega z^{\mathrm{T}}(x,t)\Gamma\Delta z(x,t)\mathrm{d}x$, $\Gamma = (\Gamma_{ij}) = 2PD_d$, 利用引理 2 和边界条件

$$\begin{aligned} I(t) =& \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\Gamma_{ij}\int_\Omega z_i(x,t)\Delta z_i(x,t)\mathrm{d}x = \\ & \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\Gamma_{ij}[\int_\Theta z_i(x,t)\frac{\partial z_i(x,t)}{\partial n}\mathrm{d}x - \\ & \int_\Omega \bigtriangledown z_i(x,t)\bigtriangledown z_i(x,t)\mathrm{d}x] = \\ & -\int_\Omega \bigtriangledown z^{\mathrm{T}}(x,t)\Gamma\bigtriangledown z(x,t)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot V(t,z(x,t)) =& \int_\Omega z^{\mathrm{T}}(x,t)(PH+H^{\mathrm{T}}P)z(x,t) + \\ & z^{\mathrm{T}}(x,t)PGz(x,t-\tau) - \\ & \bigtriangledown z^{\mathrm{T}}(x,t)2PD_d\bigtriangledown z(x,t) + \\ & z^{\mathrm{T}}(x,t-\tau)G^{\mathrm{T}}Pz(x,t) + \\ & z^{\mathrm{T}}(x,t)Sz(x,t) - z^{\mathrm{T}}(x,t-\tau)Sz(x,t-\tau)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot V(t,z(x,t)) \le& \int_\Omega \begin{bmatrix} z(x,t) \\ z(x,t-\tau) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \times \\ & \begin{bmatrix} PH+H^{\mathrm{T}}P+S & PG \\ G^{\mathrm{T}}P & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(x,t) \\ z(x,t-\tau) \end{bmatrix}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

所以若存在不等式

$$\begin{bmatrix} PH+H^{\mathrm{T}}P+S & PG \\ G^{\mathrm{T}}P & -S \end{bmatrix}<0 \tag{16}$$

成立, 则

$$\dot{V}(t,z(x,t))<0 \tag{17}$$

由矩阵不等式 (16) 求解控制器时, 控制器参数 K, B_c, B_{c1}, B_{c2} 包含在矩阵 H 和矩阵 G 中不能被求出, 所以接下来的目的是求解控制器参数.

首先, 将矩阵 P, S 分区, 定义:

$$P=\begin{bmatrix} Y & D \\ D^{\mathrm{T}} & T_c \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} W & M \\ M^{\mathrm{T}} & N \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}=\begin{bmatrix} S_{1n} & 0 \\ 0 & S_{2n} \end{bmatrix} \tag{18}$$

其中, Y, W 是正定对称矩阵, D, $M\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是可逆矩阵, 且 $PP^{-1}=I$

$$MD^{\mathrm{T}}=I-WY \tag{19}$$

定义两个矩阵

$$E=\begin{bmatrix} W & I \\ M^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & D^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{20}$$

有

$$PE=F,\quad E^{\mathrm{T}}PE=E^{\mathrm{T}}F=\begin{bmatrix} W & I \\ I & Y \end{bmatrix}>0 \tag{21}$$

对式 (16) 两边左乘 $\begin{bmatrix} E^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix}$, 右乘 $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix}$, 有

$$\begin{bmatrix} E^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}F+F^{\mathrm{T}}HE+E^{\mathrm{T}}SE & F^{\mathrm{T}}GS^{-1} \\ S^{-1}G^{\mathrm{T}}F & -S^{-1} \end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

由式 (18) ~ (22), 根据 Schur 补定理及所给条件可得定理成立. □

推论 1. 对于系统 (1), 若取时滞 $\tau=0$, 则系统变为

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=D_a\Delta W(x,t)+ (A_0+A)W(x,t)+U(x,t)$$

则可构造控制器为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi(x,t)}{\partial t}=D_c\Delta\chi(x,t)+ B_c\chi(x,t)+B_{c1}W(x,t) \\ U(x,t)=K\chi(x,t) \end{cases}$$

在给定参数条件下, 若存在矩阵 Y, $W\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为正定对称矩阵, 矩阵 M, D, X_1, X_2, $X_3\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足以下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & X_3 \\ * & \Phi_2 \end{bmatrix}<0$$

$$\begin{bmatrix} W & I \\ I & Y \end{bmatrix}>0$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= W^{\mathrm{T}}(A_0^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}})+(A_0+A)W+X_2+X_2^{\mathrm{T}} \\ \Phi_2 &= (A_0^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}})Y+Y^{\mathrm{T}}(A_0+A)+X_1+X_1^{\mathrm{T}} \\ X_1 &= DB_{c1} \\ X_2 &= KM^{\mathrm{T}} \\ X_3 &= W^{\mathrm{T}}(A_0^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}})Y+X_2^{\mathrm{T}}Y+W^{\mathrm{T}}X_1^{\mathrm{T}}+ \\ & \quad MB_c^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}+A_0+A \end{aligned}$$

则构建的中和控制器使系统镇定.

证明. 构造李雅普诺夫函数为

$$V(t,z(x,t))=\int_{\Omega} z^{\mathrm{T}}(x,t)Pz(x,t)\mathrm{d}x$$

后续参考定理 1 的证明. □

注 1. 本文针对一类具有时空特性的分布参数系统提出了中和控制方法. 这类系统的控制许多学者进行了研究, 主要是用分布式控制设计控制器, 例如文献 [8−11] 等. 我们采用完全不同的设计思想, 在相应的时空上设计控制器, 控制器形如式 (6) 和式 (7) , 利用设计的分布参数系统控制目标分布参数系统, 控制过程为设计的分布参数系统自行运动的过程. 当知道控制系统的模型时, 这种控制方法在实际应用中容易实现, 此控制方法最大优点在于不用对状态点进行直接控制.

3 数值仿真

为了说明问题, 考虑如下分布参数系统及控制系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial W(x,t)}{\partial t} = D_a \Delta W(x,t) + A_0 W(x,t) + \\
\qquad AW(x,t-\tau) + U(x,t) \\
\dfrac{\partial \chi(x,t)}{\partial t} = D_c \Delta \chi(x,t) + B_c \chi(x,t) + \\
\qquad B_{c1} W(x,t) + B_{c2} W(x,t-\tau) \\
U(x,t) = K\chi(x,t)
\end{cases}
$$

对分布参数系统, $m=1$, $n=2$, 系统参数 $D_a = 1.9$, $A_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; 取时滞 $\tau = 1$, 应用定理 1 提出的方法, $D_c = 1.8$, 通过 MATLAB 软件中的 LMI 工具箱, 可以得到控制系统参数.

$$
K = 10^4 \times \begin{bmatrix} 2.4122 & 0 \\ 0 & 2.3778 \end{bmatrix}
$$

$$
B_c = 10^4 \times \begin{bmatrix} -1.6755 & -0.6569 \\ -0.6664 & -1.2168 \end{bmatrix}
$$

$$
B_{c1} = \begin{bmatrix} -1.5127 & 0.3684 \\ 0.3684 & -1.2435 \end{bmatrix}
$$

$$
B_{c2} = \begin{bmatrix} -0.6946 & -0.5525 \\ -0.2763 & -1.0235 \end{bmatrix}
$$

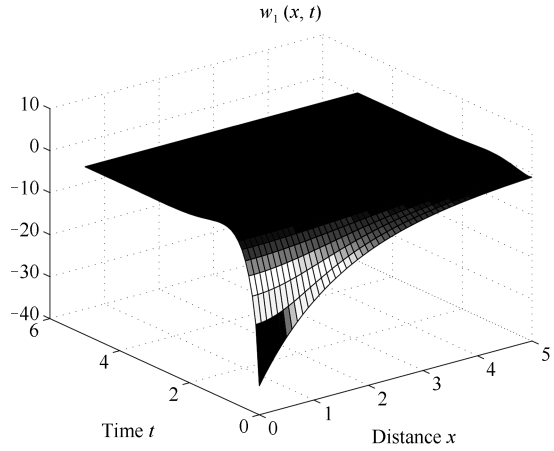
给定系统的初始条件

$$
\begin{aligned}
&w_1(x,0) = -\exp(0.7(-x+5)) \\
&w_2(x,0) = 0.5\sin(2x) \\
&\eta_1(x,0) = 0 \\
&\eta_2(x,0) = 0
\end{aligned}
$$

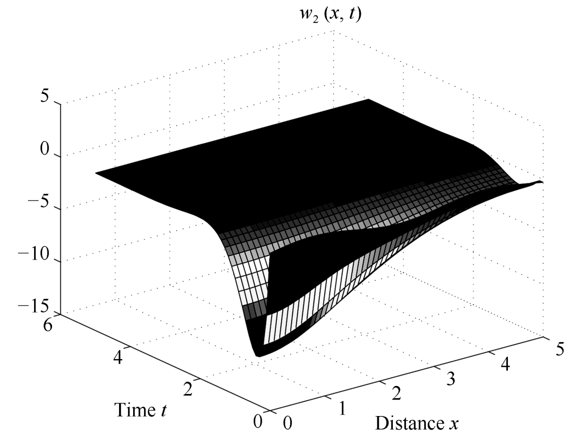
图 1 和图 2 是系统状态和控制系统的状态图. 从图 1 和图 2 可以看出, 系统在控制器的作用下, 经过一段时间后可达到稳定状态.

4 结束语

本文首先给出中和控制器设计思路, 针对具有时滞特性的分布参数系统, 设计中和控制器, 讨论此类系统的稳定问题. 利用 Lyapunov 稳定性理论并结合 LMI 处理方法, 得出了具有时滞特性分布参数系统稳定中和控制器存在的充分条件. 最后结合所给条件, 给出一个数值仿真说明其有效性.

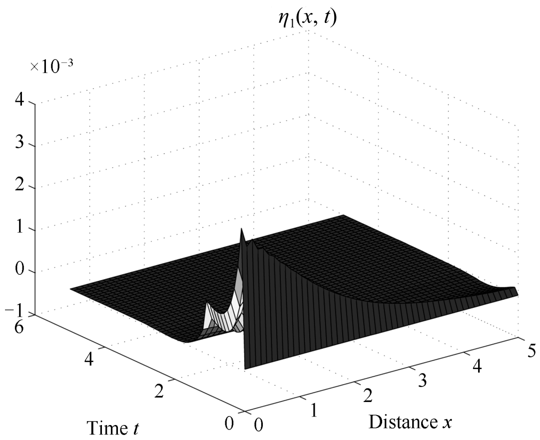


(a) $w_1(x,t)$ 状态图
(a) The state of $w_1(x,t)$

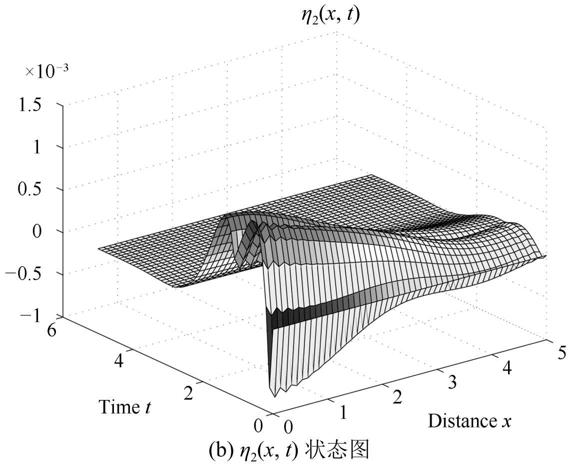


(b) $w_2(x,t)$ 状态图
(b) The state of $w_2(x,t)$

图 1 分布参数系统 $W(x,t)$ 状态图
Fig. 1 The state of distributed parameter systems $W(x,t)$



(a) $\eta_1(x,t)$ 状态图
(a) The state of $\eta_1(x,t)$



(b) $\eta_2(x, t)$ 状态图

(b) The state of $\eta_2(x, t)$

图 2 控制系统 $\chi(x, t)$ 状态图

Fig. 2 The state of controller $\chi(x, t)$

References

1 Ray W H. *Advanced Process Control*. New York: McGraw-Hill, 1981.

2 Christofides P D. *Nonlinear and Robust Control of PDE Systems*. Boston: Birkhäuser Boston, 2001.

3 Deng H, Li H X, Chen G R. Spectral-approximation-based intelligent modeling for distributed thermal processes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, **13**: 686−700

4 Padhi R, Ali S F. An account of chronological developments in control of distributed parameter systems. *Annual Reviews in Control*, 2009, **33**: 59−68

5 Baillieul J. Linearized models for the control of rotating beams. In: Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control. Austin, Texas, USA: IEEE, 1989, **3**: 1726−1731

6 Najar F, Choura S, Abdel-Rahman E M, El-Borgi S, Nayfeh A. Dynamic analysis of variable-geometry electrostatic microactuators. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2006, **16**(11): 2449−2457

7 Ly C, Doiron B. Correction: divisive gain modulation with dynamic stimuli in integrate-and-fire neurons. *PLoS Computational Biology*, 2009, **5**(6), DOI: 10.1371/annotation/9c4474f6-e58e-41ea-af4b-090bbb86f474

8 Luo Y P, Xia W H, Liu G R, Deng F Q. LMI approach to exponential stabilization of distributed parameter control systems with delay. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(3): 299−304

9 Gao Cun-Chen, Liu Zhen, Xu Rui-Ping. Feedback control for a class of distributed Parameter systems with continuous distributed time-delay. *Control and Decision*, 2013, **28**(3): 445−450
(高存臣, 刘振, 徐瑞萍. 一类具有连续分布时滞的分布参数系统的反馈控制. 控制与决策, 2013, **28**(3): 445−450)

10 Xing H L, Li D H, Gao C C, Kao Y G. Delay-independent sliding mode control for a class of quasi-linear parabolic distributed parameter systems with time-varying delay. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, **350**(2): 397−418

11 Yuan K, Alofi A, Cao J D, Al-Mazrooei A, Elaiw A. Synchronization of the coupled distributed parameter system with time delay via proportional-spatial derivative control. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2014, **2014**: Article No. 418258

12 Babaei D, Armaou P A. Adaptive control of chemical distributed parameter systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, **48**(8): 681−686

13 Demetriou M A. Boundary adaptive synchronization of networked PDEs with adaptive parameter estimators. *IFAC-PapersOnLine*, 2016, 49(8): 242−247

14 Jiang Z X, Cui B T, Wu W, Zhuang B. Event-driven observer-based control for distributed parameter systems using mobile sensor and actuator. *Computers and Mathematics with Applications*, 2016, **72**(12): 2854−2864

15 Wang Z P, Wu H N. Finite dimensional guaranteed cost sampled-data fuzzy control for a class of nonlinear distributed parameter systems. *Information Sciences*, 2016, **327**: 21−39

16 Guo Tao, Liang Yan-Jun. Adaptive decentralized fault-tolerant control for uncertain nonlinear time-delay large scale systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(3): 486−492
(郭涛, 梁燕军. 不确定非线性时滞关联大系统自适应分散容错控制. 自动化学报, 2017, **43**(3): 486−492)

17 Chen W H, Zhong J C, Zheng W X. Delay-independent stabilization of a class of time-delay systems via periodically intermittent control. *Automatica*, 2016, **71**: 89−97

18 Xie T T, Liao X F, Li H Q. Leader-following consensus in second-order multi-agent systems with input time delay: an event-triggered sampling approach. *Neurocomputing*, 2016, **177**: 130−135

19 Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

20 Cui Bao-Tong, Lou Xu-Yang. *Theory and Application of Time-Delay Distributed Parameter System*. Beijing: National Defense Industry Press, 2009. 8−12
(崔宝同, 楼旭阳. 时滞分布参数系统理论及其应用. 北京: 国防工业出版社, 2009. 8−12)

周笔锋 湖南电气职业技术学院教师. 2015 年获得湖南工程学院硕士学位. 主要研究方向为复杂网络系统, 分布参数系统. E-mail: zhoubifeng99@163.com
(**ZHOU Bi-Feng** Teacher at Hunan Electrical College of Technology. He received his master degree from Hunan Institute of Engineering in 2015. His research interest covers complex networks and distributed parameter systems.)

罗毅平 湖南工程学院教授. 2006 年获得华南理工大学博士学位. 主要研究方向为复杂网络系统, 分布参数系统. 本文通信作者. E-mail: lyp8688@sohu.com
(**LUO Yi-Ping** Professor at Hunan Institute of Engineering. He received his Ph. D. degree from South China University of Technology in 2006. His research interest covers complex networks and distributed parameter systems. Corresponding author of this paper.)