

# 归一化频率自适应梳状滤波器的稳定性分析

储昭碧<sup>1</sup> 丁明<sup>1</sup> 杜少武<sup>1</sup> 冯小英<sup>1</sup>

**摘要** 采用多个归一化频率估计器并联形成梳状滤波器,以跟踪和检测平稳周期信号各正弦成分的未知频率和未知幅值.滤波器包括相互耦合的状态估计和频率估计两个非线性微分方程.运用慢积分流形实现两个微分方程之间的解耦,获得关于多个频率估计值的概周期非线性动力系统,再应用平均方法导出估计频率的非线性自治方程.分析了自治系统的三种局部稳定性:孤立平衡点的指数稳定性,中心流形存在性与半稳定性以及结构扰动下的有界性.说明幅值估计与信号跟随的收敛性和有界性.给出滤波器参数对频率跟踪和幅值估计的暂态和稳态性能的影响.算法实现了在给定频率区间而不是给定数值条件下的正弦分量及其幅值的准确跟踪,并且响应速度不受正弦分量幅值大小的影响.通过仿真验证了算法的有效性.

**关键词** 梳状滤波器,归一化频率估计,慢积分流形,稳定性分析,半稳定性

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.01581

## Stability Analysis of Normalized Frequency Adaptive Comb Filter

CHU Zhao-Bi<sup>1</sup> DING Ming<sup>1</sup> DU Shao-Wu<sup>1</sup> FENG Xiao-Ying<sup>1</sup>

**Abstract** A normalized frequency adaptive comb filter composed of a number of normalized frequency estimators in parallel is proposed to track unknown frequency and unknown amplitude of each component of an almost periodic signal. The filter consists of two coupled nonlinear differential equations respectively for updating frequencies and estimating state variables. A nonlinear autonomous equation for frequency estimation is deduced after average method is applied to the almost periodic dynamic system resulting from system decoupling by slow integral manifold. Three kinds of local stability of the autonomous system: the exponential stability of isolated equilibrium point, the semistability on center manifold, and the robustness under unknown periodic disturbance are proved. The convergence and the boundedness of amplitude estimation and signal tracking as well as the effect of parameters on the transient and steady-state performance of frequency and amplitude are investigated. Each sinusoidal component and its amplitude are accurately tracked on the condition of given intervals instead of the values of frequencies. The response speed is independent of the component amplitude. Simulation results reveal the validity of the proposed algorithm.

**Key words** Comb filter, normalized frequency estimation, slow integral manifold, stability analysis, semistability

工程中的许多信号,包括电力系统谐波和间谐波、机械振动、语音信号,常可归结为若干个频率未知的正弦信号叠加形成的概周期函数,其时频分析的主要目标是检测各个正弦分量的频率、幅值以及实现对正弦分量本身的跟随.近年来自适应陷波滤波器(Adaptive notch filter, ANF)逐渐应用于这类分析<sup>[1-21]</sup>.

本文所讨论的这类 ANF 算法,先由 Regalia 提出了离散时间形式以估计单个正弦信号的未知频率<sup>[1]</sup>,后由 Bodson 等<sup>[2]</sup>将其改写为连续时间形式,用以消除未知频率的正弦扰动.接着 Hsu 等<sup>[3]</sup>指出正弦信号的幅值与频率是高度耦合的,使得有些频

率估计算法的暂态响应速度受输入幅值大小的影响,称之为非归一化算法,而把收敛速度基本不受幅值大小影响的算法称为归一化频率估计算法.他们提出了全局收敛的非归一化算法和归一化算法:非归一化算法采用常数频率自适应增益,计算简单,改进了暂态响应性能,扩大了稳定域;归一化算法的频率自适应增益通过一个多达 5 个参数的公式计算得到,计算复杂且不易调整参数. Mojiri 等沿用了常数频率自适应增益的非归一化算法计算简单的优点,改善了暂态性能<sup>[4]</sup>以及更加便于实现正弦信号跟随<sup>[5]</sup>.在文献 [1-5] 的非归一化算法中,除频率自适应增益以外,还有一个参数是阻尼系数.

基于最小方差原则与梯度下降算法, Karimi-Ghartemani 等<sup>[6-7]</sup>提出幅值、相位模型 (Amplitude phase model, APM) 与幅值、相位、频率模型 (Amplitude phase frequency model, APFM) 两种非线性时变强耦合滤波器,分别跟踪已知和未知频率的单个正弦信号<sup>[6-7]</sup>. APFM 方法属于非归一化频率估计算法.这两种算法的两个参数  $\mu_1$  和  $\mu_2$  与正弦幅值  $U$  之间只有保持  $\mu_1 = \mu_2 U$ , 才能使得算

收稿日期 2010-04-23 录用日期 2010-07-20  
Manuscript received April 23, 2010; accepted July 20, 2010  
国家自然科学基金(50837001),合肥工业大学科学研究发展基金(105-037527),合肥工业大学博士学位专项基金(105-4115103001)资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (50837001), Science and Research Development Fund of Hefei University of Technology (105-037527), and Special Fund for Doctors of Hefei University of Technology (105-4115103001)  
1. 合肥工业大学电气与自动化工程学院 合肥 230009  
1. School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009

法近似于线性时不变系统,从而达到最优的暂态性能.而在文献[1-5]的算法中,以一个参数 $\varsigma$ 取代两个参数 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 的作用,这使得APFM算法关于信号幅值变换的鲁棒性相对较差.

基于内模原理,Brown等提出了归一化的频率估计算法,用以辨识未知频率的周期信号<sup>[8]</sup>或者消除未知频率的周期扰动<sup>[9]</sup>,随后又对该算法进行简化处理<sup>[10]</sup>,进一步应用于指数衰减正弦信号的跟随中<sup>[11]</sup>.

在沿用了文献[6-7]的最小方差原则与梯度下降方法的基础上,增加旋转变换,可导出只有一个参数 $\mu$ 的二维线性正弦跟踪算法(Linear sinusoid tracker, LST),用以提取给定频率的正弦信号<sup>[12]</sup>、分析谐波和间谐波幅值<sup>[13]</sup>以及检测电压闪变<sup>[14]</sup>.在LST算法中参数 $\mu$ 在数值上等于幅值传递函数的-3dB带宽,与APM算法相比,LST算法参数物理意义更加明确且较易调整,暂态响应平稳,暂态性能受幅值变化影响较小.

基于LST方法,可提出非归一化与归一化两种频率估计算法,准确跟随单个正弦信号的频率和幅值<sup>[15]</sup>.非归一化频率估计算法改进了文献[1-5]的同类算法的收敛速度受制于输入频率数值的不足;暂态响应相当于文献[6-7]的APFM算法的参数始终保持在 $\mu_1 = \mu_2 U$ 条件下最优性能,且参数较少、鲁棒性较好.归一化频率估计算法是基于估计频率的导数,而不是估计频率的偏移量<sup>[10]</sup>.

上述针对单个正弦信号的跟踪算法,被推广用于多种信号的分析.文献[16-17]推广到三相电力系统的谐波和间谐波分析中.文献[5]分析基波频率未知、谐波和间谐波次数已知的多个正弦成分叠加的概周期信号,实现了对基波频率以及整数次谐波的跟随;文献[18]采用一个APFM与多个APM并联,文献[19]采用一个非归一化频率估计算法以及多个LST并联,都能估计基波频率、基波幅值以及谐波和间谐波幅值.这些算法事实上构成了非归一化基波频率估计器.针对基波、谐波与间谐波频率都未知的多正弦成分叠加的信号,文献[20]采用多个APFM分析了基波、谐波和间谐波成分,文献[21]采用多个文献[5]的频率估计算法实现相同的目标.这类采用多个正弦跟踪算法或频率估计算法并联构成的系统,其频谱特性具有梳状滤波器的特点,即在多个频率点出现幅频特性等于“1”的具有一定宽度的“梳齿”.由多个频率估计器并联而形成的滤波器,能够自适应跟踪基波、谐波和间谐波的频率.然而,上述频率自适应梳状滤波器都是基于非归一化算法,其响应速度受到基波、谐波和间谐波幅值大小的制约.另外,前述文献仅分析了各自所提出的频率自适应梳状滤波器的渐近稳定性,局限在输入

正弦成分个数恰好等于系统所并联的频率估计器个数的情况,而没有考虑小于或大于的情况.

为此,本文采用多个文献[15]所提出的归一化频率估计算法并联形成归一化频率自适应梳状滤波器,分析基波、谐波、间谐波的频率都未知的平稳概周期信号.新算法较非归一化算法具有暂态响应速度不受正弦幅值影响的优点,鲁棒性较好.先进行系统解耦和平均化处理,以获得估计频率的平均方程,再依据输入正弦成分个数等于、小于和大于并联频率估计器个数三种情况,分别讨论算法的单个孤立平衡点的稳定性、中心流形和周期扰动下的稳定性,并讨论幅值估计的收敛性,最后通过仿真实例验证算法性能.

## 1 算法说明

考虑由 $K$ 个正弦分量组成的输入信号

$$u(t) = \sum_{k=1}^K u_k = \sum_{k=1}^K U_k \sin(\omega_k t + \delta_k) = \mathbf{\Gamma}_K^T \times \mathbf{u} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_K]^T$ 为输入向量, $\mathbf{\Gamma}_K = [1 \ 1 \ \cdots \ 1]^T$ 为数值都等于1的 $K$ 维列向量,显然 $u(t)$ 为关于 $t$ 的概周期函数<sup>[19]</sup>.各个输入正弦分量的幅值 $U_k$ 、角频率 $\omega_k$ 和初相角 $\delta_k$ 都是未知的恒值,但能够确定 $U_{\min} \leq U_k \leq U_{\max}$ , $\omega_{k\min} \leq \omega_k \leq \omega_{k\max}$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ).假定 $\omega_k$ 互不相同,即 $[\omega_{k\min} \ \omega_{k\max}] \cap [\omega_{j\min} \ \omega_{j\max}] = \emptyset$ 对于任意 $k \neq j$ 都成立.信号时频分析的任务主要是获得角频率向量 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_K]^T$ 和幅值向量 $\mathbf{U} = [U_1 \ U_2 \ \cdots \ U_K]^T$ 的精确估计,以及实现对 $u(t)$ 及其各个正弦分量 $u_k(t)$ 的高精度跟随.

参考频率估计器并联结构<sup>[20-21]</sup>,可得到图1上半部分所示的 $N$ 个频率估计器Estimator 1 ~ Estimator  $N$ 并联而形成的时频分析算法,其中每个频率估计器采用归一化算法<sup>[15]</sup>,结构如图1中下边的虚线框内所示. $\hat{u}$ 为系统输出, $e$ 是总跟随误差.第 $n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ )个频率估计器的状态变量是 $x_n$ 和 $\tilde{x}_n$ ,频率估计值为 $\theta_n$ ,幅值估计值为 $a_n$ , $\mu_n > 0$ 是带宽参数, $\gamma \geq 0$ 是频率估计自适应增益.记状态向量为 $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \tilde{\mathbf{x}}^T \end{bmatrix}^T$ , $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N]^T$ , $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \cdots \ \tilde{x}_N]^T$ .

假定状态变量初值为

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0)^T & \tilde{\mathbf{x}}(0)^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{10} & \cdots & x_{N0} & \tilde{x}_{10} & \cdots & \tilde{x}_{N0} \end{bmatrix}^T \quad (2)$$



系统状态变量稳态输出记为

$$\bar{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} H_1(\omega_1, \boldsymbol{\theta}) & \cdots & H_1(\omega_K, \boldsymbol{\theta}) \\ H_2(\omega_1, \boldsymbol{\theta}) & \cdots & H_2(\omega_K, \boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_N(\omega_1, \boldsymbol{\theta}) & \cdots & H_N(\omega_K, \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1 + \varphi(\omega_1, \boldsymbol{\theta})) \\ U_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2 + \varphi(\omega_2, \boldsymbol{\theta})) \\ \vdots \\ U_K \sin(\omega_K t + \delta_K + \varphi(\omega_K, \boldsymbol{\theta})) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1(\omega_1, \boldsymbol{\theta}) & \cdots & \tilde{H}_1(\omega_K, \boldsymbol{\theta}) \\ \tilde{H}_2(\omega_1, \boldsymbol{\theta}) & \cdots & \tilde{H}_2(\omega_K, \boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{H}_N(\omega_1, \boldsymbol{\theta}) & \cdots & \tilde{H}_N(\omega_K, \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1 + \varphi(\omega_1, \boldsymbol{\theta})) \\ U_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2 + \varphi(\omega_2, \boldsymbol{\theta})) \\ \vdots \\ U_K \cos(\omega_K t + \delta_K + \varphi(\omega_K, \boldsymbol{\theta})) \end{bmatrix}$$

记

$$L(\omega_k) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i \omega_k}{\theta_i^2 - \omega_k^2}$$

则第  $n$  个跟踪器的状态变量  $x_n$ ,  $\tilde{x}_n$  对于第  $k$  输入分量  $u_k$  的相移特性为

$$\varphi(\omega_k, \boldsymbol{\theta}) = 0.5\pi - \arcsin(L(\omega_k))$$

幅频特性为

$$H_n(\omega_k, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\mu_n \omega_k}{(\theta_n^2 - \omega_k^2) \sqrt{1 + L^2(\omega_k)}}$$

$$\tilde{H}_n(\omega_k, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\mu_n \theta_n}{(\theta_n^2 - \omega_k^2) \sqrt{1 + L^2(\omega_k)}}$$

令  $m, n = 1, 2, \dots, N$ , 有

$$|H_n(\omega_k, \boldsymbol{\theta})| = \begin{cases} 1, & \omega_k = \theta_n \\ 0, & \omega_k = \theta_m, m \neq n \\ (0, 1), & \omega_k \neq \theta_m \end{cases}$$

所以  $H_n(j\omega_k, \boldsymbol{\theta})$  是连续有界的, 还可验证  $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} H_n(j\omega_k, \boldsymbol{\theta})$  和  $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \tilde{H}_n(j\omega_k, \boldsymbol{\theta})$  也是连续有界的, 故  $\bar{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\theta})$  与  $\tilde{\mathbf{x}}_\theta(t, \boldsymbol{\theta})$  是关于  $t$  和  $\boldsymbol{\theta}$  的连续有界概周期函数. 于是引理成立.  $\square$

**定理 2.** 存在  $\gamma_0 > 0$ , 当  $\gamma \in [0, \gamma_0]$  时, 有关于  $t$  的概周期函数  $\boldsymbol{\beta}(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma)$ , 满足  $\boldsymbol{\beta}(t, \boldsymbol{\theta}, 0) = \mathbf{0}$ , 使存在关于  $\boldsymbol{\theta}$  和  $\boldsymbol{\chi}$  的积分流形, 从而频率更新法则可写为概周期微分方程

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \gamma \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) = \gamma \mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\beta}(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma)) \quad (11)$$

**证明.** 综合定理 1 和引理 1, 根据文献 [22] 的定理 3.1 直接可知存在概周期函数

$$\boldsymbol{\beta}(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) = [\mathbf{v}^T(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) \quad \tilde{\mathbf{v}}^T(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma)]^T$$

$$\mathbf{v}(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) = [v_1(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) \quad \cdots \quad v_N(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma)]^T$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) = [\tilde{v}_1(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) \quad \cdots \quad \tilde{v}_N(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma)]^T$$

使得系统 (4) 和 (5) 具有唯一的积分流形

$$\mathcal{M} = \{(t, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\chi}) | \boldsymbol{\chi} = \bar{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\beta}(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma)\},$$

$$\forall \gamma \in [0, \gamma_0], \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \boldsymbol{\chi} \in \mathcal{D}$$

在积分流形  $\mathcal{M}$  上估计频率  $\boldsymbol{\theta}$  满足式 (11).  $\square$

实现估计频率与状态变量之间解耦后, 获得关于估计频率的概周期微分方程. 此时

$$a_n^2(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) = (\bar{x}_n(t, \boldsymbol{\theta}) + v_n(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma))^2 + (\tilde{x}_n(t, \boldsymbol{\theta}) + \tilde{v}_n(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma))^2 \quad (12)$$

若记

$$\mathbf{F}(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) = [F_1(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) \quad \cdots \quad F_N(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma)]^T$$

则有

$$F_n(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma) = \frac{\mu_n (\tilde{x}_n(t, \boldsymbol{\theta}) + \tilde{v}_n(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma))}{a_n^2(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma)} \times \left( u(t) - \sum_{i=1}^N (\bar{x}_i(t, \boldsymbol{\theta}) + v_i(t, \boldsymbol{\theta}, \gamma)) \right) \quad (13)$$

定理 2 中积分流形的存在性与唯一性说明了算法的整体稳定性, 只要估计频率与状态的初始值处于积分流形上, 则对于任意时刻估计频率与状态都处于该积分流形上. 而引理 1 说明在该积分流形上, 算法的稳定性主要决定于估计频率  $\boldsymbol{\theta}(t)$  在  $t \rightarrow +\infty$  时的行为, 故以下通过讨论估计频率的稳定性来揭示算法的稳定性.

### 3 频率估计稳定性

对式 (13) 运用平均方法<sup>[23]</sup>, 得到估计频率  $\boldsymbol{\theta}$  的平均方程

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \gamma \bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\theta}) = \gamma [\bar{F}_1(\boldsymbol{\theta}) \quad \bar{F}_2(\boldsymbol{\theta}) \quad \cdots \quad \bar{F}_N(\boldsymbol{\theta})]^T$$

由于

$$\begin{aligned} a_n^2(t, \boldsymbol{\theta}, 0) &= \bar{x}_n^2(t, \boldsymbol{\theta}) + \tilde{x}_n^2(t, \boldsymbol{\theta}) \\ F_n(t, \boldsymbol{\theta}, 0) &= \frac{\mu_n \tilde{x}_n(t, \boldsymbol{\theta})}{a_n^2(t, \boldsymbol{\theta}, 0)} \left( u(t) - \sum_{i=1}^N \bar{x}_i(t, \boldsymbol{\theta}) \right) \end{aligned}$$

于是在式 (1) 的输入下有

$$\begin{aligned} \bar{a}_n^2(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\mu_n^2}{2} \hat{a}_n^2(\boldsymbol{\theta}) = \\ &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a_n^2(t, \boldsymbol{\theta}, 0) dt = \\ &\frac{\mu_n^2}{2} \sum_{k=1}^K \left( \frac{(\theta_n^2 + \omega_k^2) U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^2 (1 + L^2(\omega_k))} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_n(\boldsymbol{\theta}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_n(t, \boldsymbol{\theta}, 0) dt = \\ &\frac{-1}{\bar{a}_n^2(\boldsymbol{\theta})} \sum_{k=1}^K \left( \frac{\theta_n U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2) (1 + L^2(\omega_k))} \right) \quad (15) \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\theta_n \rightarrow \omega_k} \frac{1}{1 + L^2(\omega_k)} = \frac{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^2}{(\mu_n \omega_k)^2}$$

所以  $\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\theta})$  是连续有界函数, 将其写成矩阵形式

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\theta}) &= - \begin{bmatrix} \hat{a}_1^{-2}(\boldsymbol{\theta}) & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{a}_N^{-2}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \times \\ &\begin{bmatrix} \theta_1 & & \theta_1 \\ \frac{\theta_1^2 - \omega_1^2}{\theta_2} & \cdots & \frac{\theta_1^2 - \omega_K^2}{\theta_2} \\ \frac{\theta_2^2 - \omega_1^2}{\theta_2} & \cdots & \frac{\theta_2^2 - \omega_K^2}{\theta_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_N & \cdots & \theta_N \\ \frac{\theta_N^2 - \omega_1^2}{\theta_N} & \cdots & \frac{\theta_N^2 - \omega_K^2}{\theta_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{U_1^2}{1 + L^2(\omega_1)} \\ \frac{U_2^2}{1 + L^2(\omega_2)} \\ \vdots \\ \frac{U_K^2}{1 + L^2(\omega_K)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$  互不相同,  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K$  互不相同,  $\bar{a}_n^{-2}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ , 所以平均方程的平衡点即  $\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$  只有平凡解

$$\left[ (1 + L^2(\omega_1))^{-1} \quad \cdots \quad (1 + L^2(\omega_K))^{-1} \right]^T = \mathbf{0}$$

从而有

$$\left[ \prod_{n=1}^N (\theta_n^2 - \omega_1^2) \quad \cdots \quad \prod_{n=1}^N (\theta_n^2 - \omega_K^2) \right]^T = \mathbf{0} \quad (16)$$

为方便讨论, 定义中心为  $\boldsymbol{\omega}$ 、半径为  $r$  的球域为

$$\mathcal{B}_r(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) = \{\boldsymbol{\theta} \mid \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\omega}\| \leq r, \boldsymbol{\theta} \in \Theta\}$$

分三种情况讨论频率估计平均方程的局部稳定性.

### 3.1 孤立平衡点的指数稳定性

若输入正弦成分个数等于频率估计器个数, 即  $N = K$ , 再假设输入信号各个频率的范围已知, 即对于  $k = 1, \dots, K$  都满足条件

$$[\omega_{k\min}, \omega_{k\max}] \subseteq [\theta_{k\min}, \theta_{k\max}] \quad (17)$$

则平均系统有唯一的孤立平衡点  $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}$ , 此时系统有如下特性.

**定理 3.** 对孤立平衡点  $\boldsymbol{\omega}$ , 存在常数  $r_1 > 0$  与  $M_1 > 0$  和有限的时间  $T > t_0$ , 使对于任意初始值  $\boldsymbol{\theta}(t_0) \in \mathcal{B}_{r_1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega})$  和任意时刻  $t \geq T$ , 估计频率满足

$$\|\boldsymbol{\theta}(t) - \boldsymbol{\omega}\| \leq M_1 \|\boldsymbol{\theta}(t_0) - \boldsymbol{\omega}\| e^{-\gamma(t-t_0)} \quad (18)$$

**证明.** 采用局部线性化方法, 在  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  邻域对  $\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\theta})$  进行一阶近似, 平均方程可改写为

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \gamma \bar{\mathbf{F}}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) + \gamma \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \bar{\mathbf{F}}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) (\boldsymbol{\theta} - \bar{\boldsymbol{\theta}}) \quad (19)$$

令  $m \neq n$ , 由式 (15) 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \bar{F}_n(\boldsymbol{\theta}) &= 4 \left( \sum_{k=1}^K \frac{(\theta_n^2 + \omega_k^2) U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^2 (1 + L^2(\omega_k))} \right)^{-2} \times \\ &\sum_{k=1}^K \frac{\theta_n U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2) (1 + L^2(\omega_k))} \times \\ &\sum_{k=1}^K \frac{\mu_m \theta_m \omega_k (\theta_n^2 + \omega_k^2) U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^2 (\theta_m^2 - \omega_k^2)^2 (1 + L^2(\omega_k))^2} - \\ &4 \left( \sum_{k=1}^K \frac{(\theta_n^2 + \omega_k^2) U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^2 (1 + L^2(\omega_k))} \right)^{-1} \times \\ &\sum_{k=1}^K \frac{\mu_m \theta_m \omega_k \theta_n U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2) (\theta_m^2 - \omega_k^2)^2 (1 + L^2(\omega_k))^2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_n} \bar{F}_n(\boldsymbol{\theta}) &= 4 \left( \sum_{k=1}^K \frac{(\theta_n^2 + \omega_k^2) U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^2 (1 + L^2(\omega_k))} \right)^{-2} \times \\ &\sum_{k=1}^K \frac{\theta_n U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2) (1 + L^2(\omega_k))} \times \\ &\sum_{k=1}^K \frac{\mu_n \theta_n \omega_k (\theta_n^2 + \omega_k^2) U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^4 (1 + L^2(\omega_k))^2} - \\ &4 \left( \sum_{k=1}^K \frac{(\theta_n^2 + \omega_k^2) U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^2 (1 + L^2(\omega_k))} \right)^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{\mu_n \theta_n^2 \omega_k U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^3 (1 + L^2(\omega_k))^2} - 2 \left( \sum_{k=1}^K \frac{(\theta_n^2 + \omega_k^2) U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^2 (1 + L^2(\omega_k))} \right)^{-2} \times \sum_{k=1}^K \frac{\theta_n U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)(1 + L^2(\omega_k))} \times \sum_{k=1}^K \frac{\theta_n (\theta_n^2 + 3\omega_k^2) U_k^2}{(\theta_n^2 - \omega_k^2)^3 (1 + L^2(\omega_k))^2} + 1$$

以  $\theta = \bar{\theta}$  代入得

$$\frac{\partial}{\partial \theta_m} \bar{F}_n(\bar{\theta}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_n} \bar{F}_n(\bar{\theta}) = -1 \quad (20)$$

于是有负单位矩阵

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{F}(\bar{\theta}) = \text{diag} \{-1, -1, \dots, -1\} \quad (21)$$

故  $\bar{\theta} = \omega$  是平均方程的局部指数稳定平衡点, 则根据 Lyapunov 局部指数稳定性定理, 存在球域  $\mathcal{B}_{r_1}(\theta, \omega)$  使定理成立. 并且局部的频率收敛速度不受制于输入分量的幅值.  $\square$

由于  $\bar{F}(\theta)$  连续可微, 且  $\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{F}(\theta)$  在  $\Theta$  上有界, 据局部指数稳定平衡点的 Lyapunov 逆定理, 由文献 [24] 定理 4.14 直接得到以下结论.

**引理 2.** 当  $\omega$  是平均系统的指数稳定平衡点时, 存在函数  $V_1(\theta, \omega) : \Theta \rightarrow \mathbf{R}$ , 满足不等式

$$c_1 \|\theta - \omega\|^2 \leq V_1(\theta, \omega) \leq c_2 \|\theta - \omega\|^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} V_1(\theta, \omega) \bar{F}(\theta) \leq -c_3 \|\theta - \omega\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \theta} V_1(\theta, \omega) \right\| \leq c_4 \|\theta - \omega\|$$

其中,  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为正常数.

### 3.2 中心流形与半稳定性

若输入正弦成分个数小于频率估计器个数, 即  $N_1 = N - K > 0$  时, 把估计频率改写为  $\tilde{\theta} = [\theta^T \quad \eta^T]^T$ , 其中

$$\theta = [\theta_1 \quad \dots \quad \theta_K]^T$$

$$\eta = [\eta_1 \quad \dots \quad \eta_{N_1}]^T$$

若  $\theta$  满足式 (17), 只要  $\theta = \omega$ , 总有  $\bar{F}(\tilde{\theta}) = 0$ , 所以平均方程有平衡点连续体

$$\bar{F}^{-1}(0) = \{\theta | \theta = \omega, \tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}\}$$

由于  $\bar{F}^{-1}(0)$  中不对  $\eta$  作限制,  $\eta$  可为任何值, 系统的平衡点不是孤立平衡点, 而是连续平衡点集. 文献 [25] 指出渐近稳定性概念不适合这类系统, 而应该用半稳定性来分析. 半稳定性理论在文献 [26] 得到较深入研究并被应用于非连续自治系统 [27] 和控制网络一致性规约 [28] 的稳定性分析中. 以下定义选自文献 [26].

**定义 1.** 设非线性动力系统  $\dot{x} = f(x)$  平衡点集记为  $f^{-1}(0)$ , 称  $x_e \in f^{-1}(0)$  是半稳定的, 如果它是 Lyapunov 稳定的, 并且存在包含  $x_e$  的开子集  $\mathcal{Q}$ , 使得起始于初值  $x(t_0) \in \mathcal{Q}$  的所有轨线都收敛, 即  $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  存在, 且  $x(\infty)$  也是 Lyapunov 稳定的. 如果所有的平衡点都是半稳定的, 则称系统是半稳定的.

在上述定义中,  $x(\infty)$  可能不等于  $x_e$ . 对于半稳定性分析, 我们不加证明地引用文献 [26] 的定理 3.1 作为如下引理.

**引理 3.** 记  $\mathcal{Q}$  是平衡点集  $f^{-1}(0)$  的开邻域, 假设存在某个连续可微函数  $V : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{R}$  使得

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) < 0, \quad x \in \mathcal{Q} \setminus f^{-1}(0)$$

若系统是 Lyapunov 稳定的, 那么系统是半稳定的.

此时频率估计稳定性描述如下:

**定理 4.** 若  $\theta$  满足式 (17), 存在常数  $r_2 > 0$  与  $M_2 > 0$ , 对于任意初始值  $\tilde{\theta}(t_0) \in \mathcal{B}_{r_2}(\tilde{\theta}, \omega)$ ,

$$\eta(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \text{Constant} \quad (22)$$

$$\theta(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \omega \quad (23)$$

并且存在有限的时间  $T > t_0$ , 使得对于任意时刻  $t \geq T$  满足

$$\|\theta(t) - \omega\| \leq M_2 \|\theta(t_0) - \omega\| e^{-\gamma(t-t_0)} \quad (24)$$

**证明.** 考虑在某个平衡点  $\tilde{\theta} = [\omega^T \quad \bar{\eta}^T]^T$  的邻域, 根据式 (20) 把平均方程的近似式 (19) 改为

$$\dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{F}(\tilde{\theta})(\theta - \omega)$$

$$\dot{\eta} = 0$$

其中,  $\frac{\partial}{\partial \theta} \bar{F}(\tilde{\theta})$  是式 (21) 的负单位矩阵, 根据中心流形定理, 存在  $N_1$  维中心流形

$$\mathcal{M}_c = \left\{ \tilde{\theta} = [\theta^T \quad \eta^T]^T \mid \theta = h(\eta) \right\}$$

由于  $\dot{\eta} = 0$ , 所以在该流形上  $\eta$  为常数. 再由文献 [24] 的推论 8.1 确定平均系统在  $\tilde{\theta}$  处是局部 Lyapunov 稳定的.

由引理 2 选择  $V(\tilde{\theta}) = V_1(\theta, \omega)$  为 Lyapunov 函数, 则

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{\theta})\tilde{F}(\tilde{\theta}) < 0, \quad \forall \tilde{\theta} \in \tilde{\Theta} \setminus \tilde{F}^{-1}(0)$$

由引理 3 知平均系统是局部半稳定的. 根据半稳定性的定义知式 (22) 和 (23) 成立.

另外, 由于对应于  $\eta_i$  的幅值  $a_i$  很小, 使得  $\|f_i(t, \chi)\|$  很大, 所以  $\eta$  的收敛速度较  $\theta$  快, 经过有限时间  $T$  后,  $\eta$  就达到中心流形  $\mathcal{M}_c$  或边界点上, 此时恒定的  $\eta$  使得关于  $\tilde{\theta}$  的  $K + N_1$  维平均方程退化为关于  $\theta$  的  $K$  维自治方程, 由定理 3 知  $\theta$  按指数规律收敛到  $\omega$ , 所以式 (24) 成立.  $\square$

综合定理 3 和定理 4, 经过有限时间  $T$  后, 估计频率  $\theta$  都按指数规律趋向  $\omega$ , 即  $\theta = \omega$  是平均方程  $\dot{\theta} = \gamma F(\theta)$  的指数平衡点. 依据概周期动力系统的平均定理<sup>[23]</sup>, 平均方程的指数稳定平衡点也是原概周期方程  $\dot{\theta} = \gamma F(t, \theta, \gamma)$  的局部指数稳定平衡点, 由于  $F(t, \theta, \gamma)$  一致连续可微, 且  $\frac{\partial}{\partial \theta} F(t, \theta, \gamma)$  在  $\Theta$  上一致有界, 据局部指数稳定平衡点的 Lyapunov 逆定理, 由文献 [24] 的定理 4.14 直接得到以下结果.

**引理 4.** 当  $\omega$  是平均系统的指数稳定平衡点时, 概周期微分方程  $F(t, \theta, \gamma)$  存在函数  $V_2(t, \theta, \omega) : [0, +\infty) \times \Theta \rightarrow \mathbf{R}$ , 满足不等式

$$c_5 \|\theta - \omega\|^2 \leq V_2(t, \theta, \omega) \leq c_6 \|\theta - \omega\|^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V_2(t, \theta, \omega) + \frac{\partial}{\partial \theta} V_2(t, \theta, \omega) F(t, \theta, \gamma) \leq \\ - c_7 \|\theta - \omega\|^2 \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \theta} V_2(t, \theta, \omega) \right\| \leq c_8 \|\theta - \omega\|$$

其中,  $c_5, c_6, c_7, c_8$  为正常数.

### 3.3 周期扰动下的有界性

由于实际信号频率成分复杂, 难免存在未知频率成分, 考虑在式 (1) 的输入信号中迭加周期扰动信号, 由  $K_1$  个未知频率的正弦成分组成

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^{K_1} \tilde{U}_i \sin(\xi_i t + \tilde{\delta}_i) \quad (25)$$

把输入频率改写为  $\tilde{\omega} = [\omega^T \ \xi^T]^T$ , 其中,  $\omega = [\omega_1 \ \cdots \ \omega_K]^T$  是  $K$  个已知范围的频率,  $\xi = [\xi_1 \ \cdots \ \xi_{K_1}]^T$  是  $K_1$  个未知范围的频率,  $\xi \in \Xi$ ,  $\Xi \cap \Theta = \phi$ . 此时平均系统不存在精确的平衡点.

把估计频率的概周期微分方程改写为

$$\dot{\theta} = \gamma F(t, \theta, \gamma) + \gamma g(t, \theta, \gamma) \quad (26)$$

其中  $F(t, \theta, \gamma)$  由式 (12) 和 (13) 决定, 而

$$\begin{aligned} g(t, \theta, \gamma) &= \begin{bmatrix} g_1(t, \theta, \gamma) & \cdots & g_N(t, \theta, \gamma) \end{bmatrix}^T \\ g_n(t, \theta, \gamma) &= \frac{\mu_n (\tilde{x}_n(t, \theta) + \tilde{v}_n(t, \theta, \gamma)) \hat{u}(t)}{a_n^2(t, \theta, \gamma)} \end{aligned}$$

考虑  $\omega$  是标称系统  $\dot{\theta} = \gamma F(t, \theta, \gamma)$  的指数稳定平衡点, 把  $\gamma g(t, \theta, \gamma)$  作为标称系统的结构扰动, 分析扰动系统的有界性, 有以下定理.

**定理 5.** 记  $\mu_M = \max(\mu_1, \cdots, \mu_N)$  为带宽参数的最大值, 存在正常数  $\bar{\gamma}, \bar{\mu}, M_3, \bar{b}, r_3$  与某个有限的时刻  $T$ , 当  $\gamma \in (0, \bar{\gamma}]$ ,  $\mu_M \in (0, \bar{\mu}]$  且  $\gamma \mu_M < \bar{b}$  时, 则对于所有初值  $\theta(t_0) \in \mathcal{B}_{r_3}(\theta, \omega)$ , 扰动系统的解  $\theta(t)$  当  $t_0 \leq t < t_0 + T$  时满足:

$$\|\theta(t) - \omega\| \leq M_3 \|\theta(t_0) - \omega\| e^{-\gamma \mu_M b_M (t - t_0)}$$

当  $t \geq T + t_0$  时满足

$$\|\theta(t) - \omega\| \leq \gamma \mu_M b_0 \sum_{k=1}^{K_1} \tilde{U}_k \quad (27)$$

**证明.** 由于  $g(t, \theta, \gamma)$  是有界域  $\Theta$  上的一致连续函数, 且扰动量  $\gamma g(t, \theta, \gamma)$  有如下的边界

$$\|\gamma g(t, \theta, \gamma)\| \leq \gamma \mu_M \bar{L}_0 \sum_{k=1}^{K_1} \tilde{U}_k \quad (28)$$

其中

$$\bar{L}_0 = \max_{1 \leq n \leq N} \left\| \frac{\tilde{x}_n(t, \theta) + \tilde{v}_n(t, \theta, \gamma)}{a_n^2(t, \theta, \gamma)} \right\|$$

当  $\omega$  是标称系统的指数稳定平衡点时, 存在引理 4 所列的函数  $V_2(t, \theta, \omega)$  和常数  $c_5, c_6, c_7, c_8$ , 令  $0 < \lambda < 1$ , 取

$$\bar{b} \leq \frac{c_7}{c_8} \sqrt{\frac{c_5}{c_6}} \frac{\lambda r_3}{\bar{L}_0 \sum_{k=1}^{K_1} \tilde{U}_k}$$

对给定的  $r_3 > 0$ , 总可以选择  $\bar{\gamma}, \bar{\mu}$ , 当  $\gamma \leq \bar{\gamma}$ ,  $\mu_M \leq \bar{\mu}$  使得  $0 < \gamma \mu_M \leq \bar{b}$ , 从而

$$\|\gamma g(t, \theta, \gamma)\| \leq \frac{c_7}{c_8} \sqrt{\frac{c_5}{c_6}} \lambda r_3$$

根据文献 [24] 的引理 9.2 知, 令

$$M_3 = \sqrt{\frac{c_6}{c_5}}, \quad b_M = \frac{(1 - \lambda)c_7}{2c_6}, \quad b_0 = \frac{c_8}{c_7} \sqrt{\frac{c_6}{c_5}} \frac{\bar{L}_0}{\lambda}$$

即可使得定理成立.  $\square$

综上所述, 估计频率的暂态响应速度主要取决于参数  $\gamma$ ,  $\gamma$  越大收敛越快, 受带宽参数的影响相对很小. 当所有输入成分的频率范围已知时, 频率估计

方程处于指数稳定或半稳定状态, 估计频率收敛到输入信号频率. 当输入信号包含有未知频率范围的正弦成分时, 估计频率  $\theta$  不趋向于恒值, 而在输入频率  $\omega$  的邻域内振荡, 振荡范围决定于最终边界, 该值与算法参数乘积  $\gamma\mu_M$  的大小成比例.

#### 4 幅值估计与信号跟随

由式 (4) ~ (8) 知, 估计幅值对时间  $t$  的变化率为

$$\frac{d}{dt}a_n^2(t) = 2x_n\dot{x}_n + 2\tilde{x}_n\dot{\tilde{x}}_n = 2\mu_n x_n e$$

这说明估计幅值  $a_n$  的收敛速度主要决定于带宽参数  $\mu_n$ , 受参数  $\gamma$  的影响相对较小.

当  $N = K$ , 估计频率具有指数稳定的孤立平衡点时, 暂态响应结束后, 在稳态过程中,  $\theta(t)$  变化缓慢, 依据慢流形思想, 可将其视为常数以简化分析. 以  $\theta = \omega$  代入  $H(j\omega, \theta)$  和  $\tilde{H}(j\omega, \theta)$  有

$$H_k(j\omega_k, \theta) = 1, \tilde{H}_k(j\omega_k, \theta) = j, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$H_n(j\omega_k, \theta) = 0, \tilde{H}_n(j\omega_k, \theta) = 0, \quad n \neq k$$

从而

$$H(j\omega, \theta) = I_{K \times K}, \quad \tilde{H}(j\omega, \theta) = jI_{K \times K}$$

于是稳态状态变量成为

$$\mathbf{x}(\infty) = [U_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) \cdots U_K \sin(\omega_K t + \delta_K)]^T$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(\infty) = [U_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \cdots U_K \cos(\omega_K t + \delta_K)]^T$$

可见  $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{u}$ , 此时  $\hat{u}(\infty) = \sum_{n=1}^N x_n = u(t)$ , 可准确跟随输入信号及其各个正弦成分. 另外,

$$a_n(\infty) = \sqrt{x_n^2(\infty) + \tilde{x}_n^2(\infty)} = U_n, \quad n = 1, 2, \dots, K$$

同时能够获得各个正弦成分幅值的准确估计.

对于频率估计是半稳定的情况, 稳态频率为  $\theta(\infty) = [\omega^T \quad \bar{\eta}^T]^T$ , 其中  $\bar{\eta}$  为常数, 所以稳态频率特性矩阵具有以下形式

$$H(j\omega, \theta) = \begin{bmatrix} I_{K \times K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}(j\omega, \theta) = \begin{bmatrix} jI_{K \times K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

于是当  $1 \leq n \leq K$  时,

$$x_n(\infty) = U_n \sin(\omega_n t + \delta_n)$$

$$\tilde{x}_n(\infty) = U_n \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

$$a_n(\infty) = U_n$$

而当  $K < n \leq N$  时,

$$x_n(\infty) = \tilde{x}_n(\infty) = 0, \quad a_n(\infty) = 0$$

仍获得输入信号的各个成分及其幅值的准确估计.

设输入信号由式 (1) 的  $K$  个已知频率范围的正弦成分与式 (25) 的  $K_1$  个未知频率范围的正弦分量叠加, 已知范围频率的估计值为  $\theta = [\theta_1 \cdots \theta_K]^T$ , 令  $1 \leq n \leq K$ , 状态变量为

$$\begin{aligned} x_n &= U_n \sin(\omega_n t + \delta_n) + \sum_{i=1}^{K_1} \left( H_n(\xi_i, \theta) \tilde{U}_i \sin(\xi_i t + \tilde{\delta}_i + \varphi(\xi_i, \theta)) \right) \\ \tilde{x}_n &= U_n \cos(\omega_n t + \delta_n) + \sum_{i=1}^{K_1} \left( \tilde{H}_n(\xi_i, \theta) \tilde{U}_i \cos(\xi_i t + \tilde{\delta}_i + \varphi(\xi_i, \theta)) \right) \end{aligned}$$

此时状态变量  $\mathbf{x}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}$  不能趋向于稳定的单一的正弦信号, 而是多个频率正弦信号的叠加. 记状态变量的标准值为  $\bar{x}_n = U_n \sin(\omega_n t + \delta_n)$ ,  $\bar{\tilde{x}}_n = U_n \cos(\omega_n t + \delta_n)$ , 状态跟随误差为

$$|e_n| = |x_n - \bar{x}_n| \leq \mu_n \sum_{i=1}^{K_1} \frac{\xi_i \tilde{U}_i}{|\theta_n^2 - \xi_i^2| \sqrt{1 + L^2(\xi_i)}}$$

$$|\tilde{e}_n| = |\tilde{x}_n - \bar{\tilde{x}}_n| \leq \mu_n \sum_{i=1}^{K_1} \frac{\theta_n \tilde{U}_i}{|\theta_n^2 - \xi_i^2| \sqrt{1 + L^2(\xi_i)}}$$

此时幅值估计  $a_n$  也不等于恒值, 同样叠加了多个频率的正弦信号. 显然幅值的标准值为  $\bar{a}_n = \sqrt{\bar{x}_n^2 + \bar{\tilde{x}}_n^2} = U_n$ , 根据测量误差的合成原理, 幅值估计误差可表示为

$$\begin{aligned} |\Delta a_n| &= |a_n - \bar{a}_n| = \left| \frac{\bar{x}_n e_n + \bar{\tilde{x}}_n \tilde{e}_n}{\sqrt{\bar{x}_n^2 + \bar{\tilde{x}}_n^2}} \right| = \\ &= |\sin(\omega_n t + \delta_n) e_n + \cos(\omega_n t + \delta_n) \tilde{e}_n| \leq \\ &= \mu_n \sum_{i=1}^{K_1} \frac{(\theta_n + \xi_i) \tilde{U}_i}{|\theta_n^2 - \xi_i^2| \sqrt{1 + L^2(\xi_i)}} \end{aligned}$$

上述表明, 存在未知频率的正弦成分时, 稳态幅值估计与状态跟随误差都随着  $\mu_n$  的增大而增大, 受参数  $\gamma$  的影响较小, 误差也随着未知正弦分量的幅值的增大而增大.

#### 5 应用仿真

假设输入信号包含 5 个正弦成分

$$u(t) = \sum_{k=1}^5 u_k(t) = \sum_{k=1}^5 U_k \sin(2\pi f_k t + \delta_k)$$



采用 5 个频率估计器并联, 估计频率  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  的单位定为 Hz, 对应的数值区间设为  $[40, 59]$ 、 $[90, 109]$ 、 $[140, 159]$ 、 $[190, 209]$ 、 $[240, 259]$ , 带宽参数相等都为  $\mu$ , 采样频率选为 10 kHz, 在 Simulink 环境下, 选择龙格-库塔算法进行仿真. 为防止积分器深度饱和, 对状态变量设置  $\pm 1.5$  的限幅.

### 5.1 跟随性能

选择  $\gamma = 4\pi$ ,  $\mu = 20\pi$ , 图 2 给出各个频率的实际值  $f_k$  和估计值  $\theta_k$  曲线, 图 3 是各个正弦成分幅值的实际值  $U_k$  和估计值  $a_k$  曲线.

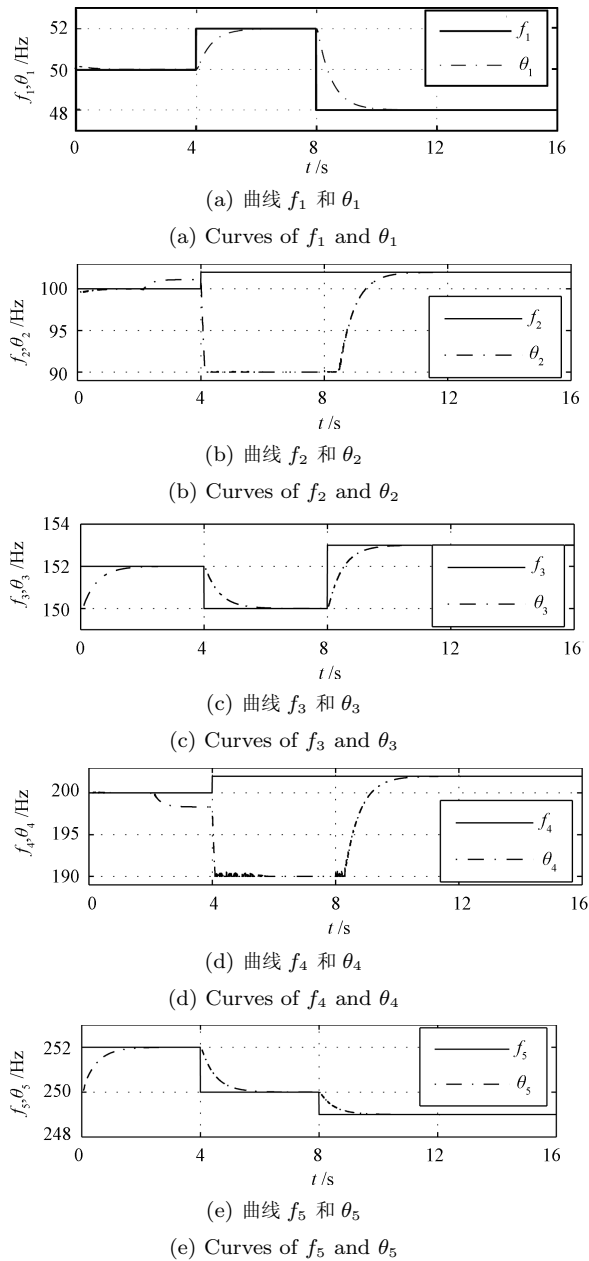


图 2 频率跟随性能

Fig.2 Frequency performances of tracking

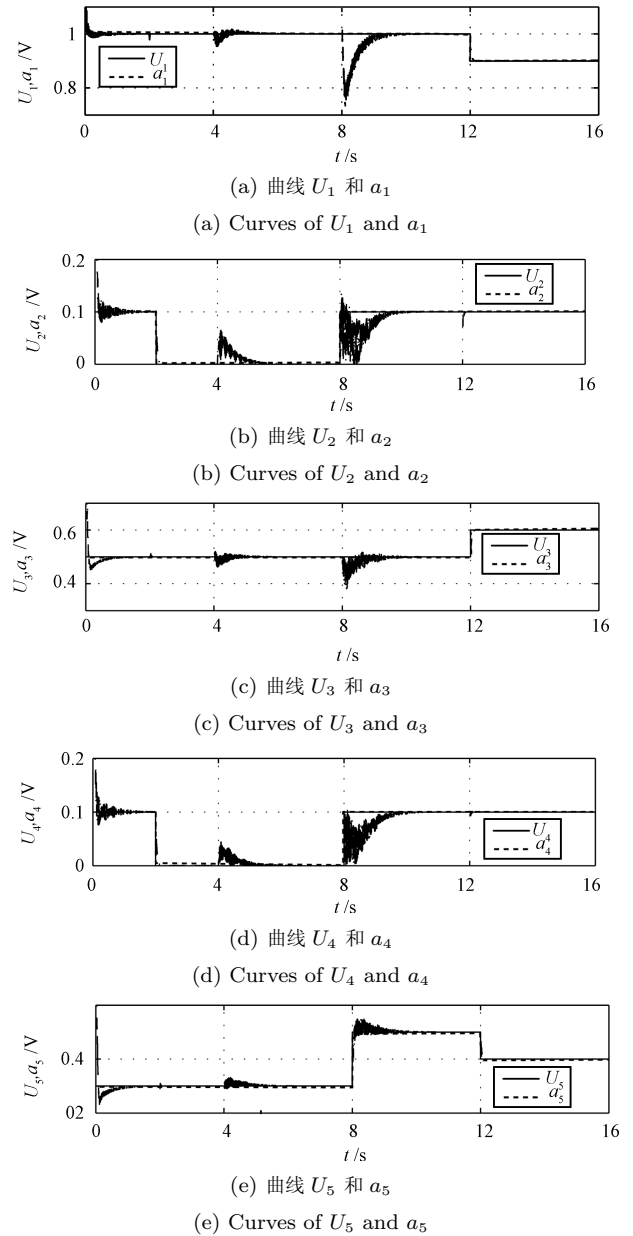


图 3 幅值跟随性能

Fig.3 Amplitude performances of tracking

经过 1.2s 时间, 估计频率  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  从各自初始值 50 Hz, 100 Hz, 150 Hz, 200 Hz, 250 Hz 准确跟随到实际频率 50 Hz, 100 Hz, 152 Hz, 200 Hz, 252 Hz, 估计幅值  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  都从同一个初始值 1.0 准确跟随到实际幅值 1.0, 0.1, 0.5, 0.1, 0.3, 此时 5 个正弦分量的幅值都不等于 0, 频率估计算法存在稳定的孤立平衡点, 估计频率按指数规律趋于真值.

在  $t = 2.0$ s 时两个正弦分量的幅值  $U_2, U_4$  变为 0, 估计频率由指数稳定的孤立平衡点转向稳定的中心流形, 在该流形上  $\theta_2 = 101$  Hz,  $\theta_4 = 198.5$  Hz 为常数.  $U_2, U_4$  变化并没有引起其他三个正弦分量

的估计频率或幅值曲线的较大变动,说明状态变量与估计频率之间的解耦是有效的.

在  $t = 4.0\text{s}$  时刻,  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  分别有  $2.0\text{Hz}, 2.0\text{Hz}, -2.0\text{Hz}, 2.0\text{Hz}, -2.0\text{Hz}$  的跳变, 由于  $U_2 = U_4 = 0$ , 估计频率处于半稳定状态,  $\theta(t)$  从中心流形的一个平衡点转向另一个平衡点, 由于  $a_2, a_4$  很小, 受制于边界条件,  $\theta_2, \theta_4$  很快收敛到其最小值  $90\text{Hz}, 190\text{Hz}$ , 此后, 其余的估计频率再按指数规律趋向各自的平衡态. 到  $t = 5.2\text{s}$  时, 暂态过程结束, 频率和幅值的估计值即准确跟随了实际值. 注意到  $f_1, f_2, f_4$  的跳变方向为正,  $f_3, f_5$  的跳变为负, 说明各个估计频率具有独立跟随性能. 在  $t = 8.0\text{s}$  时刻,  $f_1, f_3, f_5$  分别有  $-4.0\text{Hz}, 3.0\text{Hz}, -1.0\text{Hz}$  的跳变,  $U_2, U_4, U_5$  分别有  $0.1, 0.1, 0.2$  的跳变, 注意到此时算法又从半稳定状态恢复到指数稳定状态. 幅值与频率跳变的叠加使得幅值的暂态响应比较剧烈, 暂态响应过程稍长, 直到  $t = 10.0\text{s}$  才结束.

在  $t = 12.0\text{s}$  时刻, 在保持频率不变的同时使  $U_1, U_3, U_5$  分别有  $-0.1, 0.1, -0.1$  的跳变, 由此引发的暂态变化主要局限在状态变量, 对估计频率的影响很小, 显示频率估计算法对输入信号幅值的跳变具有较好的鲁棒性, 不同方向的幅值跳变展示了幅值估计算法的相对独立的跟随性能.

图 4 的跟随误差定义为  $e_k = u_k - x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ), 图中显示稳态时状态变量  $x_k$  对输入正弦成分  $u_k$  具有良好的跟随性能. 注意到在指数稳定状态与半稳定中心流形下, 稳态时都能够实现频率、幅值与信号分量本身无差的精确跟随.

## 5.2 参数影响

为考察参数  $\gamma, \mu$  对算法性能的影响, 在  $t = 12\text{s}$  时保持所有正弦分量的频率不变而改变其幅值, 在  $t = 13\text{s}$  时保持所有正弦分量的幅值不变而改变其频率, 分别选择不同的参数值, 得到估计幅值  $a_1$  曲线、估计频率  $\theta_1$  曲线列在图 5 和图 6 中.

从图 5 的  $\theta_1$  曲线显示, 参数  $\gamma$  越大, 估计频率  $\theta$  的动态响应越快, 而数值小的  $\gamma$  使估计频率和幅值跟随暂态过程加长. 在  $t = 12\text{s}$  处的  $\gamma = 10\pi$  与  $\gamma = 2\pi$  对应的两条幅值  $a_1$  曲线基本重合, 展示参数  $\gamma$  的大小对单纯幅值跳变引起的幅值跟随性能影响不大.

从图 6 幅值  $a_1$  曲线显示, 较大的  $\mu$  值使幅值具有较好的快速跟随性能, 因频率变化而导致的超调量也较小. 在  $t = 13\text{s}$  处的  $\mu = 50\pi$  与  $\mu = 10\pi$  对应的两条幅值  $\theta_1$  曲线基本重合, 展示参数  $\mu$  的大小对单纯频率跳变引起的频率跟随暂态性能影响不大.

在指数稳定平衡点和半稳定的中心流形上, 参

数  $\gamma, \mu$  的大小只影响暂态性能, 不影响稳态估计精确度.

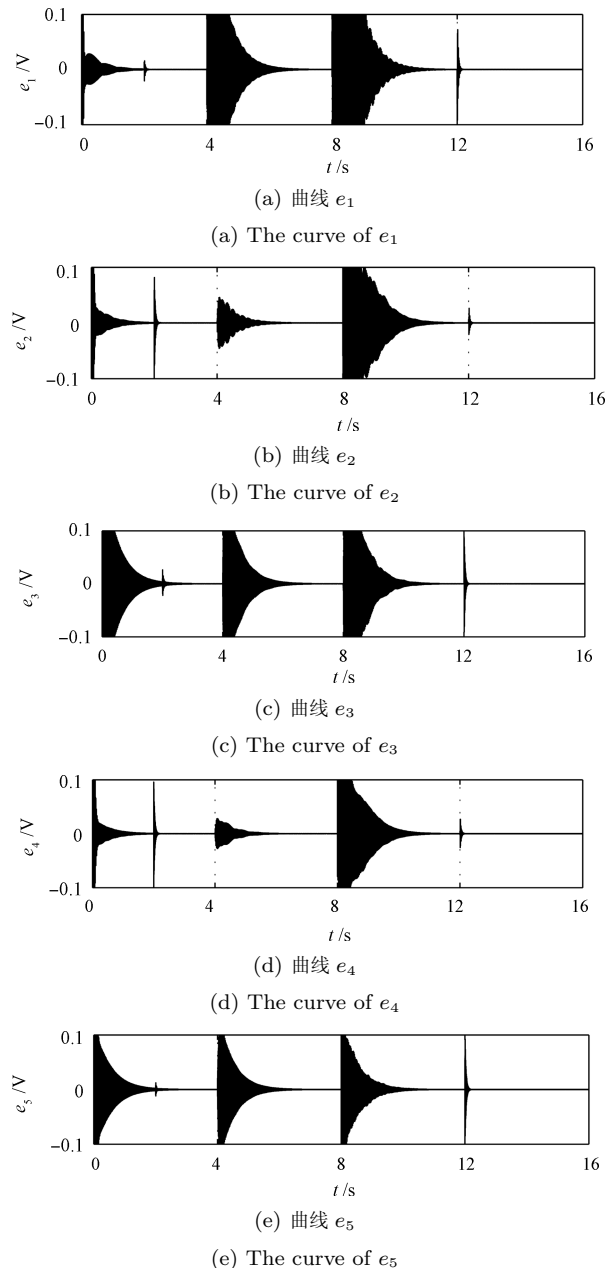


图 4 跟随误差曲线  
Fig. 4 Curves of tracking error

## 5.3 有界性

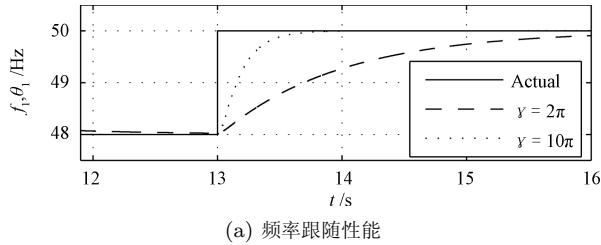
当输入信号中正弦分量的频率不在估计频率的设定范围中时, 各个频率与幅值的稳态估计值除受未知成分影响外, 还受到参数  $\gamma, \mu$  数值的影响. 在输入信号中加入正弦分量

$$u_6(t) = 1.0 \sin(2\pi \times 230t)$$

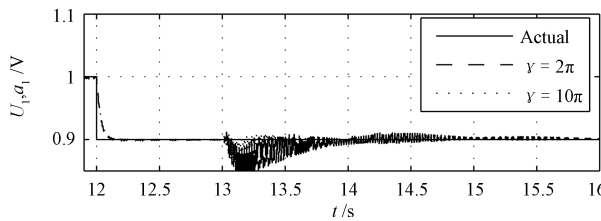
其频率  $230\text{Hz}$  不处于任何估计频率空间中, 保持其

他频率不变, 改变参数  $\gamma$ ,  $\mu$  数值, 得到各稳态估计值列在表 1 和表 2 中.

在表 1 中, 输入信号的 5 个正弦分量的幅值都不等于 0, 此时扰动系统的标称系统处于指数稳定状态. 在表 2 中, 由于对应  $\theta_2$ ,  $\theta_4$  的两个正弦分量幅值都等于 0, 此时扰动系统的标称系统处于半稳定状态.



(a) Frequency tracking performances



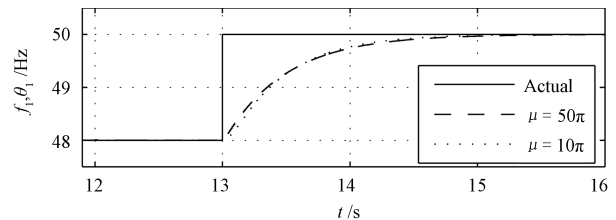
(b) Amplitude tracking performances

图 5  $\mu = 20\pi$  跟随性能

Fig. 5 Tracking performances when  $\mu = 20\pi$

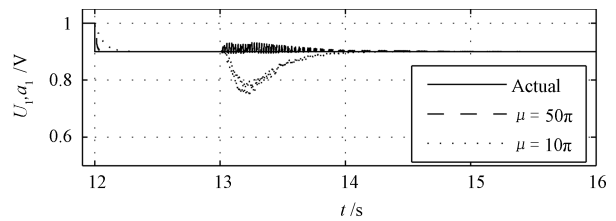
由于未知正弦分量的扰动作用, 估计频率和幅值在真值上都叠加了高频振荡. 每个表中  $\mu$  相同的

两行幅值的振荡范围基本相同, 说明稳态幅值估计精度主要决定于参数  $\mu$ , 受  $\gamma$  的影响较小. 表中  $\mu$  与  $\gamma$  乘积相同的两行频率的振荡范围基本相同, 说明频率幅值估计精度主要决定于乘积  $\gamma \cdot \mu$ . 选择较小的参数能够增强算法的鲁棒性, 提高估计精度, 但会降低动态响应速度, 延长动态响应时间. 较小的  $\mu$  值使算法的带宽变窄, 从而能够降低频谱泄露导致的检测误差.



(a) 频率跟随性能

(a) Frequency tracking performances



(b) 幅值跟随性能

(b) Amplitude tracking performances

图 6  $\gamma = 4\pi$  跟随性能

Fig. 6 Tracking performances when  $\gamma = 4\pi$

表 1 指数稳定鲁棒性

Table 1 Robustness with exponential stability

| 幅值<br>真值                     | $a_1$          | $a_2$          | $a_3$          | $a_4$          | $a_5$          | 频率<br>真值                     | $\theta_1$ (Hz) | $\theta_2$ (Hz) | $\theta_3$ (Hz) | $\theta_4$ (Hz) | $\theta_5$ (Hz) |
|------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|                              | 1.00           | 0.10           | 0.50           | 0.10           | 0.30           |                              | 50              | 100             | 152             | 200             | 252             |
| $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $1.0 \pm 0.02$ | $0.1 \pm 0.02$ | $0.5 \pm 0.04$ | $0.1 \pm 0.04$ | $0.3 \pm 0.10$ | $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $50 \pm 0.02$   | $100 \pm 0.30$  | $152 \pm 0.1$   | 上限值             | $252 \pm 0.4$   |
| $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $1.0 \pm 0.11$ | $0.1 \pm 0.12$ | $0.5 \pm 0.20$ | $0.6 \pm 0.15$ | $1.3 \pm 0.18$ | $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $50 \pm 0.11$   | $109 \pm 4.55$  | $152 \pm 0.4$   | 上限值             | 下限值             |
| $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $1.0 \pm 0.02$ | $0.1 \pm 0.02$ | $0.5 \pm 0.04$ | $0.1 \pm 0.04$ | $0.3 \pm 0.06$ | $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $50 \pm 0.11$   | $100 \pm 1.50$  | $152 \pm 0.4$   | 上限值             | $252 \pm 2.2$   |
| $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $1.0 \pm 0.11$ | $0.1 \pm 0.12$ | $0.5 \pm 0.19$ | $0.6 \pm 0.15$ | $1.3 \pm 0.18$ | $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $50 \pm 0.60$   | $109 \pm 4.50$  | $152 \pm 2.0$   | 上限值             | 下限值             |

表 2 半稳定鲁棒性

Table 2 Robustness with semistability

| 幅值<br>真值                     | $a_1$          | $a_2$           | $a_3$          | $a_4$           | $a_5$          | 频率<br>真值                     | $\theta_1$ (Hz) | $\theta_2$ (Hz) | $\theta_3$ (Hz) | $\theta_4$ (Hz) | $\theta_5$ (Hz) |
|------------------------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|                              | 1.00           | 0.00            | 0.50           | 0.00            | 0.30           |                              | 50              | 无               | 152             | 无               | 252             |
| $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $1.0 \pm 0.02$ | $0.0 \pm 0.007$ | $0.5 \pm 0.04$ | $0.1 \pm 0.005$ | $0.3 \pm 0.10$ | $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $50 \pm 0.02$   | 上限值             | $152 \pm 0.1$   | 上限值             | $252 \pm 0.4$   |
| $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $1.0 \pm 0.11$ | $0.1 \pm 0.005$ | $0.5 \pm 0.20$ | $0.6 \pm 0.006$ | $1.3 \pm 0.18$ | $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $50 \pm 0.11$   | 上限值             | $152 \pm 0.4$   | 上限值             | 下限值             |
| $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $1.0 \pm 0.02$ | $0.2 \pm 0.012$ | $0.5 \pm 0.04$ | $0.1 \pm 0.006$ | $0.3 \pm 0.06$ | $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $50 \pm 0.11$   | 上限值             | $152 \pm 0.4$   | 上限值             | $252 \pm 2.2$   |
| $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $1.0 \pm 0.11$ | $0.1 \pm 0.007$ | $0.5 \pm 0.19$ | $0.6 \pm 0.006$ | $1.3 \pm 0.18$ | $\gamma=2\pi$<br>$\mu=10\pi$ | $50 \pm 0.60$   | 上限值             | $152 \pm 2.0$   | 上限值             | 下限值             |

表 2 中频率  $\theta_2$  和  $\theta_4$  受  $u_6(t)$  的影响, 都等于上限值, 其对时间的导数都等于 0, 维持了中心流形存在性. 表 2 中幅值  $a_2$  和  $a_4$  的振荡中心都偏离了其真值 0, 偏移量随着  $\mu$  的增大而增大, 从而形成伪信号, 这可认为是一种由频率格栅效应导致的频谱泄露现象. 本算法把频率轴划分为多个区间, 在每个区间内具有自适应跟随性能, 其频率格栅效应是基于区间的, 是对傅里叶变换的基于点的格栅效应的较大改进.

## 6 结论

本文把多个归一化频率估计器并联形成梳状滤波器, 应用于稳定周期信号的时频分析. 经理论分析和仿真验证可知: 当输入信号的正弦分量的频率都在设定范围变化内时, 算法处于指数稳定状态或半稳定状态, 能够获得各个正弦分量的频率、幅值及其本身的无差估计和准确跟随. 频率和幅值估计的收敛速度分别主要决定于自适应系数和带宽参数, 受输入分量幅值的影响较小. 当输入信号中包含不在设定范围内的正弦分量时, 算法的鲁棒性使得可以通过减小带宽参数来提高幅值估计精度, 通过减小带宽参数或自适应增益来提高频率估计精度. 算法把频率轴划分为多个区间, 每个区间内自适应跟踪性能使估计频率收敛到恒定的整数或小数, 从而提高对含有谐波和间谐波的周期信号时频分析的性能. 增加频率估计器的个数, 对频率轴进行精细划分, 能够减小频率格栅效应, 提高时频分析性能.

## References

- Regalia P A. An improved lattice-based adaptive IIR notch filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, **39**(9): 2124–2128
- Bodson M, Douglas S C. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency. *Automatica*, 1997, **33**(12): 2213–2221
- Hsu L, Ortega R, Damm G. A globally convergent frequency estimator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(4): 698–713
- Mojiri M, Bakhshai A R. An adaptive notch filter for frequency estimation of a periodic signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(2): 314–318
- Mojiri M, Karimi-Ghartemani M, Bakhshai A. Time-domain signal analysis using adaptive notch filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(1): 85–93
- Karimi-Ghartemani M, Ziarani A K. Periodic orbit analysis of two dynamical systems for electrical engineering applications. *Journal of Engineering Mathematics*, 2003, **45**(2): 135–154
- Karimi-Ghartemani M, Ziarani A K. Performance characterization of a nonlinear system as both an adaptive notch filter and a phase-locked loop. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2004, **18**(1): 23–53
- Brown L J, Zhang Q. Identification of periodic signals with uncertain frequency. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, **51**(6): 1538–1545
- Brown L J, Zhang Q. Periodic disturbance cancellation with uncertain frequency. *Automatica*, 2004, **40**(4): 631–637
- Zhang Q, Brown L J. Noise analysis of an algorithm for uncertain frequency identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(1): 103–110
- Lu J, Brown L J. Internal model principle-based control of exponentially damped sinusoids. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2010, **24**(3): 219–232
- Chu Zhao-Bi, Zhang Chong-Wei, Feng Xiao-Ying. A new linear band-adjustable algorithm for real-time signal analysis in power system. *Proceedings of the CSEE*, 2009, **29**(1): 94–99  
(储昭碧, 张崇巍, 冯小英. 一种可调带宽的线性电力信号实时分析新算法. 中国电机工程学报, 2009, **29**(1): 94–99)
- Chu Zhao-Bi, Zhang Chong-Wei, Feng Xiao-Ying. Adaptive filter-based time-frequency analysis. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(11): 1420–1428  
(储昭碧, 张崇巍, 冯小英. 基于自适应滤波器的时频分析. 自动化学报, 2009, **35**(11): 1420–1428)
- Chu Zhao-Bi, Zhang Chong-Wei, Feng Xiao-Ying. Detection of voltage flicker based on parallel filter. *Journal of Electronic Measurement and Instrument*, 2009, **23**(3): 110–115  
(储昭碧, 张崇巍, 冯小英. 基于并联滤波器的电压闪变检测. 电子测量与仪器学报, 2009, **23**(3): 110–115)
- Chu Zhao-Bi, Zhang Chong-Wei, Feng Xiao-Ying. Adaptive notch filter-based frequency and amplitude estimation. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(1): 60–66  
(储昭碧, 张崇巍, 冯小英. 基于自适应限波滤波器的频率和幅值估计. 自动化学报, 2010, **36**(1): 60–66)
- Karimi-Ghartemani M, Karimi H, Bakhshai A R. A filtering technique for three-phase power system. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2009, **58**(2): 389–396
- Yazdani D, Bakhshai A, Joos G, Mojiri M. A real-time three-phase selective-harmonic-extraction approach for grid-connected converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, **56**(10): 4097–4106
- McNamara D M, Ziarani A K, Ortmeyer T H. A new technique of measurement of nonstationary harmonics. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2007, **22**(1): 387–395
- Chu Zhao-Bi, Zhang Chong-Wei, Feng Xiao-Ying. Multi-harmonics analysis based on fundamental frequency estimate. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(5): 532–539  
(储昭碧, 张崇巍, 冯小英. 基于基波频率估计的多谐波分析. 自动化学报, 2009, **35**(5): 532–539)
- Karimi-Ghartemani M, Iravani R M. Measurement of harmonics/inter-harmonics of time-varying frequencies. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2005, **20**(1): 23–31

- 21 Mojiri M, Bakhshai A R. Estimation of  $n$  frequencies using adaptive notch filter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2007, **54**(4): 338–342
- 22 Riedle B, Kokotovic P. Integral manifolds of slow adaptation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(4): 316–324
- 23 Lin Zhen-Sheng. *Almost Periodic Differential Equations and Integral Manifolds*. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1982. 166–219  
(林振声. 概周期微分方程与积分流形. 上海: 上海科学技术出版社, 1982. 166–219)
- 24 Khalil H K. *Nonlinear System*. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2007. 87–422
- 25 Bhat S P, Bernstein D S. Arc-length-based Lyapunov tests for convergence and stability in systems having a continuum of equilibria. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Denver, USA: IEEE, 2003. 2961–2966
- 26 Hui Q, Haddad W M, Bhat S P. Lyapunov and converse Lyapunov theorems for semistability. In: *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, USA: IEEE, 2007. 5870–5874
- 27 Hui Q, Haddad W M, Bhat S P. Semistability, finite-time stability, differential inclusions, and discontinuous dynamical systems having a continuum of equilibria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(10): 2465–2470
- 28 Hui Q, Haddad W M, Bhat S P. On robust control algorithms for nonlinear network consensus protocols. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, **20**(3): 269–284



**储昭碧** 合肥工业大学副教授. 主要研究方向为电能质量. 本文通信作者.

E-mail: zbchu@hfut.edu.cn

(**CHU Zhao-Bi** Associate professor at Hefei University of Technology. His main research interest is power quality. Corresponding author of this paper.)



**丁明** 合肥工业大学教授. 主要研究方向为电力系统分析.

E-mail: ming\_ding@hfut.edu.cn

(**DING Ming** Professor at Hefei University of Technology. His main research interest is power system analysis.)



**杜少武** 合肥工业大学教授. 主要研究方向为电力电子技术.

E-mail: dushaowu1965@126.com

(**DU Shao-Wu** Professor at Hefei University of Technology. His main research interest is power electronics technology.)



**冯小英** 合肥工业大学高级实验师. 主要研究方向为自动化仪表.

E-mail: czbfxy@126.com

(**FENG Xiao-Ying** Senior laboratory engineer at Hefei University of Technology. Her main research interest covers automation instruments.)