

受约束的二阶惯性边流资源竞争模型: 守恒性、KKT 平衡与有界优势集聚

黄 毅^{1,2} 朱扬威^{1,2} 陈祖国^{1,2} 张志鑫³ 黄廷文⁴

摘 要 针对一阶赢者通吃竞争模型难以兼顾惯性效应、状态约束与优化解释, 研究资源总量守恒与箱体约束下的分布式非凸资源分配问题. 为此, 对 Hill 型效用引入对数障碍正则化, 以图边流动量为中间状态构建二阶惯性边流资源竞争模型. 模型保持资源总量守恒, 并基于局部边际效用实现分布式交互. 随后, 通过能量函数和 LaSalle 不变性原理, 证明可行内点集正不变、系统能量单调耗散, 且系统轨迹收敛至平衡点集合. 进一步建立动力学平衡点与正则化问题 KKT 条件的对应关系, 并证明当障碍参数趋于零且对偶变量有界时, 平衡点极限恢复原问题的 KKT 结构. 此外, 在 Hill 边际效用饱和区, 给出能力参数与稳态资源分配之间的条件排序性质. 数值结果表明, 模型在保持约束的同时形成有界优势资源集聚.

关键词 二阶惯性边流资源竞争模型; 非凸资源分配; 资源守恒

引用格式 黄毅, 朱扬威, 陈祖国, 张志鑫, 黄廷文. 受约束的二阶惯性边流资源竞争模型: 守恒性、KKT 平衡与有界优势集聚. 自动化学报, 2026, 52(8): 1807–1820

DOI 10.16383/j.aas.c260212 **CSTR** 32138.14.j.aas.c260212

A Constrained Second-order Inertial Edge-flow Resource Competition Model: Conservation, KKT Equilibria, and Bounded Dominant Concentration

HUANG Yi^{1,2} ZHU Yang-Wei^{1,2} CHEN Zu-Guo^{1,2} ZHANG Zhi-Xin³ HUANG Ting-Wen⁴

Abstract This paper studies the distributed nonconvex resource allocation problem under total-resource conservation and box constraints, addressing the inability of first-order winner-take-all competition models to jointly capture inertia effects, state constraints, and an optimization interpretation. To this end, a logarithmic barrier regularization is introduced for Hill-type utilities, and a second-order inertial edge-flow resource competition model is constructed using graph edge-flow momentum as an intermediate state. The model preserves total-resource conservation and realizes distributed interaction based on local marginal utilities. Then, using an energy function and LaSalle's invariance principle, we prove positive invariance of the feasible interior set, monotonic dissipation of system energy, and that the system trajectory converges to the equilibrium set. We further establish the correspondence between dynamical equilibria and the KKT conditions of the regularized problem, and prove that, as the barrier parameter approaches zero and the dual variables are bounded, the equilibrium limits recover the KKT structure of the original problem. In addition, in the saturation region of the Hill marginal utility, we derive a conditional ordering property between capability parameters and steady-state resource allocations. Numerical results show that the model forms bounded dominant resource concentration while preserving constraints.

Keywords second-order inertial edge-flow resource competition model; nonconvex resource allocation; resource conservation

Citation Huang Yi, Zhu Yang-Wei, Chen Zu-Guo, Zhang Zhi-Xin, Huang Ting-Wen. A constrained second-order inertial edge-flow resource competition model: Conservation, KKT equilibria, and bounded dominant concentration. *Acta Automatica Sinica*, 2026, 52(8): 1807–1820

收稿日期 2026-03-30 录用日期 2026-06-29

Manuscript received March 30, 2026; accepted June 29, 2026
国家自然科学基金 (62403193, 62373144), 湖南省科技创新项目 (2025RC3197, 2024RC9015), 海南省自然科学基金 (626MS0242, 626MS0243) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62403193, 62373144), Science and Technology Innovation Program of Hunan Province (2025RC3197, 2024RC9015), and Natural Science Foundation of Hainan Province (626MS0242, 626MS0243)

本文责任编辑 刘毅

Recommended by Associate Editor LIU Yi

1. 湖南科技大学三亚研究院 三亚 572024 2. 湖南科技大学信息与电气工程学院 湘潭 411201 3. 华东交通大学电气与自动化工程学院 南昌 330013 4. 深圳理工大学计算机科学与人工智能学院 深圳 518107

1. Sanya Institute of Hunan University of Science and Technology, Sanya 572024 2. School of Information and Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201 3. School of Electrical and Automation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013 4. Faculty of Computer Science and Artificial Intelligence, Shenzhen University of Advanced Technology, Shenzhen 518107

赢者通吃 (winner-take-all, WTA) 现象广泛存在于有限资源竞争系统之中, 其典型特征是少数个体在动态竞争后占据更多的资源份额, 而其余个体则处于被压制、边缘化或仅维持最低生存份额的状态. 该现象在平台流量分配、注意力竞争、生态位争夺以及算力与通信资源协调等问题中均可观察到. 与合作型一致性模型强调“趋同”不同, 资源竞争动力学更关注总资源受限条件下资源份额如何沿网络边重分配, 以及局部优势如何被放大并演化为结构性集聚. 围绕这一现象的早期研究, 主要从竞争动力学与复杂系统演化出发建立解释框架. 例如, Lotka^[1] 和 Volterra^[2] 的经典竞争模型揭示有限资源条件下物种之间的排斥、共存与优势演化机制. Grossberg^[3] 从竞争-决策角度刻画抑制性交互下的选择行为. Hirsch^[4] 则从微分方程理论层面对竞争/合作系统的极限集与渐近行为进行系统分析. 进入神经计算与平台经济阶段后, Maass^[5] 说明 WTA 结构在神经计算中的基本计算能力, Maurer 等^[6] 和 Noe 等^[7] 进一步揭示互联网平台和市场竞中由网络效应放大导致的收益集中和结构偏斜现象. 然而, 上述研究总体上仍以现象解释、系统性质分析、集中式赢家识别为主, 尚未形成面向受约束连续资源竞争问题的分布式动力学建模闭环.

为提升 WTA 模型的可计算性和工程可实现性, 后续研究逐步将“赢家识别”问题转化为优化求解与神经动力学设计问题. Liu 和 Wang^[8] 将 k -WTA 结构与二次规划联系起来并构造神经网络求解器, 随后讨论带不连续激活的两类 k -WTA 网络^[9]. Li 等^[10] 进一步给出有限时间二次规划求解网络及其 k -WTA 应用. 与此相呼应, 杨涛等^[11] 对分布式协同优化的建模框架、算法机理与应用场景进行系统总结, 指出通信约束、收敛速度和可扩展性是该方向持续关注的关键问题. 在此基础上, Li 等^[12] 将 WTA 机制推广到动态网络中的分布式实现, 而陈刚等^[13] 则在集合约束下研究多智能体系统的分布式固定时间优化控制, 说明局部约束处理与连续时间收敛分析可以在统一框架下实现. 随后, Zhang 等^[14] 系统分析分布式 k -WTA 模型的设计与稳定性. 面向高阶动力学情形, 时侠圣等^[15] 进一步给出有界扰动下二阶智能体的固定时间分布式优化算法. 近年来, 关于分布式 WTA 的优化解释进一步得到完善^[16], 而吴庆涛等^[17] 针对信息受限场景研究基于条件梯度的加速分布式在线学习算法, 表明分布式优化研究正在进一步向复杂信息结构和动态环境扩展. 在更贴近资源协调的方向上, 时侠圣等^[18] 继续讨论受扰线性多智能体系统的分布式资源分配问题.

这些工作表明, 连续时间多智能体动力学、资源协调和分布式优化之间已经形成较为清晰的理论联系. 虽然关于非凸约束的协同控制问题在多智能体系统中有诸多研究, 如非凸输入约束群集控制问题^[19] 与非凸状态和输入约束、时变时滞、切换拓扑包含控制问题^[20]. 然而, 协同控制问题与资源竞争问题有着本质的区别, 因此相关研究方法和理论很难借鉴应用. 总体而言, 现有研究大多面向凸优化、集合约束或一般线性资源分配模型, 其核心目标仍是“使系统收敛到某类最优分配”, 尚未直接研究当非凸效用、总量守恒与箱体约束同时存在时, 如何构造既具有资源竞争解释又具备严格闭环分析的二阶连续时间资源竞争模型.

近期, Chen^[21] 提出一类固定总资源条件下的一阶连续时间竞争模型, 将赢者通吃解释为零和资源掠夺过程中的动态分化结果, 并揭示该模型在反时间意义下与一致性动力学之间的联系. 这一工作的重要价值在于, 它不再将 WTA 仅仅理解为“输入最大者胜出”的静态选择器, 而是将 WTA 提升为一种可连续演化、可进行系统分析的资源竞争动力学. 在此基础上, Cao 等^[22] 又从动态竞争模型与优化机理的关系出发, 进一步讨论连续时间 WTA 动力学的求解行为与结构特征. 但从本文关注的受约束分布式资源优化角度看, 现有这类模型仍存在三点不足: 其一, 模型本质上仍是一阶动力学, 难以表达现实资源竞争中的惯性、滞后和边流累积效应; 其二, 模型通常只保持总量守恒或非负性, 尚未同时纳入个体容量上、下界所带来的内点可行性要求; 其三, 平衡点与约束优化问题 KKT 条件之间尚未建立严格的闭环对应, 因而难以将“竞争结果”直接解释为“约束优化解”.

基于上述分析, 本文旨在研究总量守恒与箱体约束共同作用下形成的有界优势资源集聚. 也就是说, 竞争结果表现为少数高能力节点占据显著更大的资源份额, 而弱势节点仍可能保有正资源或下边界份额. 这与传统意义上研究的“赢者通吃”形成资源寡头现象存在本质上的不同. 因而, 若仅对现有一阶模型进行机械式双积分扩展, 往往会破坏资源守恒结构, 或导致“模型具有二阶形式, 但可行性保持与收敛分析无法闭环”的问题. 此外, 本文采用的 Hill 效用函数对应非凸目标, 这意味着模型设计不仅要体现二阶惯性特征和分布式实现形式, 还必须保证轨迹始终停留在可行内点集内, 并使动力学平衡结构与正则化优化问题之间形成严格、可证明的对应关系.

围绕上述难点, 本文从优化目标而非从已有一

阶动力学形式出发重新设计竞争模型. 具体而言, 首先对原始箱体约束非凸资源分配问题引入对数障碍, 构造内点正则化目标. 然后以图边流动量为中间状态设计二阶惯性边流资源竞争模型, 使系统在状态层面呈现显式二阶结构, 在实现层面保持资源总量严格守恒. 在此基础上, 本文证明可行内点集的正不变性、总能量函数的单调耗散性以及系统到平衡点集合的收敛性; 同时, 进一步建立动力学平衡点与正则化优化问题 KKT 条件之间的精确对应, 并在障碍参数趋于零时恢复原始箱体约束问题的 KKT 结构. 最后, 结合 Hill 效用的饱和特性给出赢家稳态排序性质. 与现有 WTA/ k -WTA 相关研究相比, 本文关注的不是离散赢家选择, 而是受约束连续资源份额的动态重分配. 与现有一阶竞争模型相比, 本文进一步构建二阶惯性竞争模型、内点可行性机制以及优化闭环解释.

本文的主要贡献总结如下:

1) 本文面向有限资源、个体容量约束和惯性效应共存的竞争场景, 提出一类新的受约束二阶资源竞争模型, 该模型通过边流动量刻画资源交换惯性, 从结构上同时保持局部竞争、总量守恒和箱体约束可行性.

2) 本文从优化目标出发构造正则化边际效用, 并证明所提动力学具有资源总量守恒、可行内点正不变、能量单调耗散、轨迹收敛到平衡点集合等性质; 同时, 建立动力学平衡点与正则化 KKT 条件之间的对应关系, 并讨论障碍参数趋于零时对原始箱体约束问题 KKT 结构的恢复.

3) 与现有绝对赢家通吃主题研究不同, 现实中的平台流量、注意力、算力调度和生态资源竞争往往表现为强者占优、弱者保留最低份额、资源受容量边界限制的集聚格局, 本文模型能够解释这种受总量守恒、容量约束、能力异质性、局部交互和惯性暂态共同影响形成的稳定竞争平衡, 并进一步揭示惯性、拓扑、总资源规模和 Hill 参数变化对竞争格局的影响, 为受约束资源竞争系统的建模与调控提供理论依据.

1 问题描述与内点正则化

本文采用无向连通图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 描述智能体之间的资源交换关系, 其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$, n 为智能体个数, $\mathcal{E}$ 为边集, $m = |\mathcal{E}|$, 智能体 i 的邻居集合为 $\mathcal{N}_i$. 与经典的凸优化问题不同, 使用 S 型 Hill 函数来建模智能体 i 的效用 (或收益), 该函数能够捕捉到在经济学和生物学中广泛观察到的“阈值效应”和“饱和效应”. 假设 Hill 参数 $h > 0$, 资源边界满足 $0 \leq x_{\min} < x_{\max}$. 对每个智能体 i , 定义资源效用函数

$$U_i(x_i, c_i) := c_i S(x_i), \quad S(s) := \frac{s^2}{h^2 + s^2} \quad (1)$$

其中, $x_i \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ 表示智能体 i 的资源量; $c_i > 0$ 为智能体 i 的能力参数 (或效率系数), 较高的 c_i 意味着智能体 i 可以从相同数量的资源中创造更多的价值; $S: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ 为 Hill 效用函数.

值得注意的是, 本文考虑的效用函数面临的一个关键挑战是信息隐私, 即能力参数 c_i 为智能体 i 的私有信息, 它反映了智能体的内在技术或才能, 无需公开. 智能体只能与它们的邻居 $j \in \mathcal{N}_i$ 交换状态相关的信息 (如当前的资源持有量或边际效用).

本文的目标是刻画受约束条件下的资源竞争平衡与优势集聚结构, 使得系统资源产生的效应 (个人效用的总和) 在动力学平衡处具有明确的 KKT 解释, 同时遵守资源总量守恒和资源边界约束. 在数学上, 将其描述为以下受约束资源分配问题:

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbf{R}^n} \quad & J(x) = \sum_{i=1}^n U_i(x_i, c_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = C_{\text{total}} \\ & x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max}, \quad i \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2)$$

假设

$$nx_{\min} < C_{\text{total}} < nx_{\max} \quad (3)$$

其中, $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ 表示全体节点的资源状态向量; C_{total} 为系统资源总量. 则约束优化问题 (2) 的可行集及其相对内点分别为: $\forall i \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = C_{\text{total}}, x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max} \right\} \\ \mathring{\mathcal{X}} &:= \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = C_{\text{total}}, x_{\min} < x_i < x_{\max} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

为了获得可证明的内点不变性与耗散结构, 对原始目标引入障碍参数 $\mu > 0$, 定义内点正则化目标

$$\Phi_{\mu}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_{i, \mu}(x_i) \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi_{i, \mu}(x_i) &= U_i(x_i, c_i) + \mu \ln(x_i - x_{\min}) + \\ &\quad \mu \ln(x_{\max} - x_i) \end{aligned} \quad (6)$$

由此得到正则化优化问题

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbf{R}^n} \quad & \Phi_{\mu}(x) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_i = C_{\text{total}}, \quad x \in \mathring{\mathcal{X}} \end{aligned} \quad (7)$$

定义

$$h_{i,\mu}(x_i) := \frac{\partial \phi_{i,\mu}(x_i)}{\partial x_i} = \frac{2c_i h^2 x_i}{(h^2 + x_i^2)^2} + \frac{\mu}{x_i - x_{\min}} - \frac{\mu}{x_{\max} - x_i} \quad (8)$$

表示智能体 i 在当前状态下的正则化边际效用, 即资源增加一个单位时正则化目标函数所产生的局部增益. 在所提竞争动力学中, 相邻智能体之间正是通过该边际效用差驱动资源沿网络边流动. 因而, $h_{i,\mu}(x_i)$ 更适合解释为局部边际价值信号或竞争驱动力, 而不是资源总量本身. 对于未加箱体约束和障碍项的 Hill 函数 $S(s) = s^2/(h^2 + s^2)$, 其原始边际效用为 $S'(s) = 2h^2 s/(h^2 + s^2)^2$, 则有 $S'(0) = 0$. 然而, 本文动力学始终在可行内点 $x_i \in (x_{\min}, x_{\max})$ 内演化. 因此, 当 $x_{\min} > 0$ 时, 资源状态不会到达 0. 即使取 $x_{\min} = 0$, 对数障碍项也使 $x_i = 0$ 成为不可达边界. 由此可见, 式 (8) 中的 $h_{i,\mu}(x_i)$ 同时包含原始边际收益和边界约束反作用的正则化边际价值. 它在内部可取正、负或零, 其中 $h_{i,\mu}(x_i) = 0$ 仅表示原始边际收益与两侧边界项在该点相互抵消, 并不意味着资源为零或竞争能力消失. 在系统进行信息交互前, 智能体 i 利用其私有信息 c_i 和私有效用函数 $S(x_i)$, 本地计算出 $h_{i,\mu}(x_i) = \frac{\partial \phi_{i,\mu}(x_i)}{\partial x_i}$ 的值. 智能体 i 仅向其邻居广播标量值 $h_{i,\mu}(x_i)$, 代表其当前的局部边际价值或资源竞争驱动力. 从经济角度来看, $h_{i,\mu}(x_i)$ 可视为价格信号, 虽然它源自 c_i , 但它将静态的私有能力与动态状态耦合为一个标量信号. 此外, 即使不同智能体的饱和度曲线存在异质性及邻居未知, 仅从 $h_{i,\mu}(x_i)$ 单独反推 c_i 在数学上通常是不充分的, 从而在一定程度上保护了隐私.

注 1. 本文提出的分布式非凸资源优化问题 (2) 具有以下几个核心挑战: 首先, 由于 Hill 函数导致目标函数 $J(x)$ 一般是非凸的, 因而可能存在多个驻点或局部极大点, 从而使系统最终平衡结果对初值和参数具有依赖性, 这增加了全局最优分析与算法设计的难度; 其次, 全局等式约束 $\sum_{i=1}^n x_i = C_{\text{total}}$ 将所有智能体耦合在一起, 在没有全局领导者的情况下以分布式方式满足这一约束具备一定的挑战性; 最后, 该算法必须在无法获取效用能力参数 c_i 的情况下对约束优化问题 (2) 进行求解.

2 二阶惯性边流资源竞争模型

对图 $\mathcal{G}$ 任意选取一个方向, 记对应关联矩阵为 $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$. 对于第 k 条边 $e_k = (i, j)$, 若方向从 j 指向 i , 则第 k 列满足 $B_{ik} = 1$, $B_{jk} = -1$, 其余元素为 0. 再设边权矩阵为 $D = \text{diag}\{a_1, \dots, a_m\}$, 其中

$a_k > 0$ 为边 e_k 的权重.

引入边流动量状态 $\xi \in \mathbf{R}^m$, 本文提出如下竞争模型:

$$\dot{x} = BD\xi \quad (9)$$

$$\dot{\xi} = -\alpha\xi + B^T h_\mu(x) \quad (10)$$

其中

$$h_\mu(x) = [h_{1,\mu}(x_1), \dots, h_{n,\mu}(x_n)]^T$$

其中, $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_m]^T \in \mathbf{R}^m$ 表示边流动量状态向量, ξ_k 表示第 k 条有向边上的资源流动量; $\alpha > 0$ 为惯性阻尼系数; 矩阵 D 用于刻画各边竞争强度, 定义为

$$L_a := BDB^T$$

是对应于边权 D 的加权拉普拉斯矩阵.

因此, 本文提出的模型竞争机制由稀缺总量约束与图上边流耦合共同构成, 即智能体之间并非通过显式交叉效用竞争, 而是通过边际效用差驱动的资源重分配在可行域内争夺有限总资源.

注 2. 由于 $x \in \mathring{\mathcal{X}}$ 时函数 $h_\mu(x)$ 关于 x 是光滑的, 系统 (9) ~ (10) 在状态空间 $\mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m$ 上是局部 Lipschitz 的. 因而对任意初值 $(x(0), \xi(0)) \in \mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m$, 系统存在唯一的极大解. 后续定理 1 将进一步证明该极大解实际上在 $[0, +\infty)$ 上全局存在.

模型 (9) ~ (10) 在状态 x 上等价于

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = L_a h_\mu(x) \quad (11)$$

可以看出, 本文提出的模型是一个真正意义上的二阶型竞争系统. 与直接采用双积分器动力学不同, 这里的惯性作用施加在图边流层, 从而天然保持资源交换的零和结构.

注 3. 若忽略边流动量的瞬态, 即令 $\dot{\xi} = 0$, 则由式 (10) 得 $\xi = \alpha^{-1} B^T h_\mu(x)$, 进而

$$\dot{x} = \frac{1}{\alpha} L_a h_\mu(x)$$

可见, 所提模型在边流动量足够快衰减的准静态极限下, 可退化为由正则化边际效用差驱动的一阶资源交换流. 因此, 本文所提出的模型关键在于将惯性变量设置在图边流层, 使暂态动量、资源守恒和箱体约束保持能够在同一动力学框架下同时体现.

3 守恒性、KKT 平衡与有界优势集聚性质分析

本节分析所提二阶惯性边流资源竞争模型的基

本性质. 首先证明系统在总量约束下保持资源守恒, 且轨迹始终停留在可行内点集内; 其次建立平衡点与正则化优化问题 KKT 条件之间的对应关系; 最后给出系统收敛性、原始 KKT 极限恢复以及稳态排序性质.

3.1 守恒性、内点不变性与能量耗散

定理 1. 考虑系统 (9) ~ (10), 其中 $\mu > 0$ 、 $\alpha > 0$ 且 $D \succ 0$. 若初值满足 $(x(0), \xi(0)) \in \mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m$, 则该系统存在唯一的全局解. 并且对任意 $t \geq 0$, 资源总量守恒且箱体内部点约束保持, 即

$$\sum_{i=1}^n x_i(t) = C_{\text{total}} \quad (12)$$

以及

$$x_{\min} < x_i(t) < x_{\max}, i \in \mathcal{V}$$

进一步地, 存在与初值有关的常数 $\delta > 0$, 使得对所有 $t \geq 0$ 有

$$x_{\min} + \delta \leq x_i(t) \leq x_{\max} - \delta, i \in \mathcal{V}$$

且 $\xi(t)$ 有界.

证明. 由 $h_\mu(x)$ 在 $\mathring{\mathcal{X}}$ 上局部 Lipschitz 可知, 对任意初值 $(x(0), \xi(0)) \in \mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m$, 系统存在唯一极大解. 记其最大存在区间为 $[0, t_{\max})$. 首先, 由关联矩阵性质 $\mathbf{1}_n^T B = 0$ 可得

$$\frac{d}{dt} \mathbf{1}_n^T x(t) = \mathbf{1}_n^T B D \xi(t) = 0$$

结合初值满足 $\mathbf{1}_n^T x(0) = C_{\text{total}}$, 可得到式 (12).

下面证明内点不变性与有界性. 构造能量函数

$$V_\mu(x, \xi) = -\Phi_\mu(x) + \frac{1}{2} \xi^T D \xi \quad (13)$$

沿系统轨迹求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_\mu &= -h_\mu^T(x) \dot{x} + \xi^T D \dot{\xi} = \\ &= -h_\mu^T(x) B D \xi + \xi^T D (-\alpha \xi + B^T h_\mu(x)) = \\ &= -\alpha \xi^T D \xi \leq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

因此在 $[0, t_{\max})$ 上有

$$V_\mu(x(t), \xi(t)) \leq V_0 := V_\mu(x(0), \xi(0))$$

由于 $\frac{1}{2} \xi^T D \xi \geq 0$, 进一步推出

$$\Phi_\mu(x(t)) \geq -V_0, \quad t \in [0, t_{\max})$$

另一方面, 当任一分量 x_i 趋近 $x_{\min}$ 或 $x_{\max}$ 时, 由式 (6) 中的对数障碍项可知 $\Phi_\mu(x) \rightarrow -\infty$. 因此, 轨迹不可能趋近箱体边界. 则存在常数 $\delta \in (0, (x_{\max} - x_{\min})/2)$, 使得对所有 $t \in [0, t_{\max})$ 和所有 $i \in \mathcal{V}$,

$$x_{\min} + \delta \leq x_i(t) \leq x_{\max} - \delta$$

在上述闭区间上, $\Phi_\mu(x)$ 连续且有上界. 定义 $M_0 := \max\{\Phi_\mu(x) : \mathbf{1}_n^T x = C_{\text{total}}, x_{\min} + \delta \leq x_i \leq x_{\max} - \delta\}$. 于是

$$\frac{1}{2} \xi^T(t) D \xi(t) = V_\mu(x(t), \xi(t)) + \Phi_\mu(x(t)) \leq V_0 + M_0$$

从而 $\xi(t)$ 有界. 综上, 轨迹始终位于 $\mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m$ 中的某个紧致子集内.

最后证明全局存在性. 若 $t_{\max} < +\infty$, 则由常微分方程延拓定理, 极大解必须在有限时间内离开任意紧子集或趋近定义域边界. 但前述估计表明, 轨迹既与箱体边界保持统一正距离, 又使 $\xi(t)$ 保持有界, 因而始终留在某个紧子集内, 与有限时间不可延拓相矛盾. 故 $t_{\max} = +\infty$. 因此, 对任意 $t \geq 0$, 资源守恒关系和箱体内部点约束均成立. $\square$

注 4. 定理 1 表明, 约束不是通过额外投影或裁剪强制实现的, 而是通过内点障碍与耗散能量共同保证.

3.2 平衡点与 KKT 条件

定理 2. 若图 $\mathcal{G}$ 连通, 则对任意 $(x^*, \xi^*) \in \mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m$ 为系统 (9) ~ (10) 的平衡点, 当且仅当存在某个常数 $\lambda^* \in \mathbf{R}$, 使得

$$\xi^* = 0, h_{1,\mu}(x_1^*) = \cdots = h_{n,\mu}(x_n^*) = \lambda^* \quad (15)$$

成立. 等价地, x^* 是正则化问题 (7) 的 KKT 点, 且 $\xi^* = 0$.

证明. 先证明必要性. 若 $(x^*, \xi^*) \in \mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m$ 为平衡点, 则由 (9) ~ (10) 得

$$B D \xi^* = 0, -\alpha \xi^* + B^T h_\mu(x^*) = 0$$

将第二个等式左乘 $(\xi^*)^T D$, 并利用第一个等式, 有

$$\alpha (\xi^*)^T D \xi^* = (\xi^*)^T D B^T h_\mu(x^*) = h_\mu^T(x^*) B D \xi^* = 0$$

由于 $\alpha > 0$ 且 $D \succ 0$, 可得 $\xi^* = 0$. 代入第二个平衡方程即得

$$B^T h_\mu(x^*) = 0$$

由于图 $\mathcal{G}$ 连通, 其关联矩阵满足 $\text{rank}(B) = n - 1$, 因而

$$\text{null}(B^T) = \text{span}\{\mathbf{1}_n\}$$

于是由 $B^T h_\mu(x^*) = 0$ 可知存在常数 $\lambda^* \in \mathbf{R}$ 使得

$$h_\mu(x^*) = \lambda^* \mathbf{1}_n$$

即式 (15) 成立. 另一方面, 由于 $x^* \in \mathring{\mathcal{X}}$, 满足 $\mathbf{1}_n^T x^* = C_{\text{total}}$ 且位于箱体内部. 正则化问题 (7) 在开集 $\mathring{\mathcal{X}}$

上只含等式约束, 其 KKT 条件为存在乘子 λ^* 使

$$\nabla \Phi_\mu(x^*) = \lambda^* \mathbf{1}_n$$

而 $\nabla \Phi_\mu(x^*) = h_\mu(x^*)$, 故式 (15) 与正则化问题的 KKT 条件完全一致.

再证明充分性. 若 x^* 是正则化问题 (7) 的 KKT 点, 则 $x^* \in \mathring{\mathcal{X}}$ 且存在 $\lambda^* \in \mathbf{R}$ 使 $h_\mu(x^*) = \lambda^* \mathbf{1}_n$. 由 $B^T \mathbf{1}_n = 0$ 可得 $B^T h_\mu(x^*) = 0$. 令 $\xi^* = 0$, 则

$$BD\xi^* = 0, -\alpha\xi^* + B^T h_\mu(x^*) = 0$$

因此 $(x^*, 0)$ 是系统 (9) ~ (10) 的平衡点. $\square$

3.3 收敛性

定理 3. 对任意满足 $(x(0), \xi(0)) \in \mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m$ 的初值, 系统 (9) ~ (10) 的轨迹有界, 且其 ω -极限集包含于平衡点集合

$$\mathcal{M}_\mu = \left\{ (x, \xi) \in \mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m : \xi = 0, B^T h_\mu(x) = 0 \right\} \quad (16)$$

等价地, 对于 $t \rightarrow +\infty$, 有

$$\text{dist}((x(t), \xi(t)), \mathcal{M}_\mu) \rightarrow 0$$

若该轨迹所在紧致不变集内的平衡点均为孤立点, 则该轨迹收敛到其中某一个平衡点.

证明. 由定理 1 知, 系统轨迹始终与箱体边界保持正距离, 且 $\xi(t)$ 有界. 因而正半轨道被包含在 $\mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m$ 的某个紧致正不变子集内, 从而满足 LaSalle 不变性原理所需的预紧性条件. 再由式 (14) 可知

$$\dot{V}_\mu(x, \xi) = -\alpha\xi^T D\xi \leq 0$$

令

$$\mathcal{S} = \{(x, \xi) \in \mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m : \dot{V}_\mu(x, \xi) = 0\}$$

由于 $D \succ 0$ 且 $\alpha > 0$, 条件 $\dot{V}_\mu = 0$ 与 $\xi^T D\xi = 0$ 等价, 进一步等价于 $\xi = 0$. 在 $\xi = 0$ 上, 若某点还满足 $B^T h_\mu(x) \neq 0$, 则由系统 (10) 有

$$\dot{\xi} = B^T h_\mu(x) \neq 0$$

因而该点的轨迹将立即离开集合 $\{\xi = 0\}$, 所以它不是不变点. 反之, 若 $\xi = 0$ 且 $B^T h_\mu(x) = 0$, 则由系统 (9) ~ (10) 可得 $\dot{x} = 0$ 与 $\dot{\xi} = 0$, 因而该点本身就是平衡点. 故 $\mathcal{S}$ 中最大的正不变集恰为

$$\mathcal{M}_\mu = \{(x, \xi) \in \mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m : \xi = 0, B^T h_\mu(x) = 0\}$$

由 LaSalle 不变性原理, 该轨迹的 ω -极限集满足

$$\omega(x(0), \xi(0)) \subseteq \mathcal{M}_\mu$$

由于正半轨道预紧, ω -极限集非空紧致, 且 $\text{dist}((x(t), \xi(t)), \omega(x(0), \xi(0))) \rightarrow 0$. 因而

$$\text{dist}((x(t), \xi(t)), \mathcal{M}_\mu) \rightarrow 0$$

若该轨迹所在紧致不变集内的平衡点均为孤立点, 则该紧集内的 $\mathcal{M}_\mu$ 只能包含有限个平衡点. 又由于连续时间自治系统预紧轨迹的 ω -极限集是连通紧不变集, 它作为有限离散平衡点集合的子集只能退化为单点. 因此轨迹收敛到 $\mathcal{M}_\mu$ 中的某一个平衡点. $\square$

注 5. 定理 3 给出的收敛结论是“收敛到平衡点集合”, 而不是直接收敛到原优化问题的全局最优解. 这是因为原始目标函数是非凸的, 即使经过正则化, 也不一定能够保证存在唯一的全局极大点. 因此, 本文的研究结果是建立在动力学平衡结构、KKT 对应关系以及极限恢复性质上的.

3.4 从正则化 KKT 到原始 KKT 的极限恢复

原约束优化问题 (2) 的 KKT 条件为: 存在乘子 $\lambda, \mu_i^+ \geq 0$ 和 $\mu_i^- \geq 0$ 使得

$$\frac{\partial U_i(x_i^*, c_i)}{\partial x_i} = \lambda + \mu_i^+ - \mu_i^-, \quad i \in \mathcal{V} \quad (17)$$

$$\mu_i^+(x_i^* - x_{\max}) = 0, \quad \mu_i^-(x_{\min} - x_i^*) = 0 \quad (18)$$

推论 1. 设图 $\mathcal{G}$ 连通, $\{\mu_k\}$ 为一列正数且 $\mu_k \rightarrow 0$. 对每个 μ_k , 令 $(x^{\mu_k}, \xi^{\mu_k}) \in \mathring{\mathcal{X}} \times \mathbf{R}^m$ 为系统 (9) ~ (10) 在障碍参数 $\mu = \mu_k$ 下的一个平衡点. 由定理 2, 存在公共正则化边际效用乘子 $\lambda^{\mu_k} \in \mathbf{R}$ 使得

$$h_{\mu_k}(x^{\mu_k}) = \lambda^{\mu_k} \mathbf{1}_n$$

若存在子序列仍记为 $\{x^{\mu_k}\}$ 、向量 $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ 和标量 $\bar{\lambda} \in \mathbf{R}$, 使得

$$x^{\mu_k} \rightarrow \bar{x}, \quad \lambda^{\mu_k} \rightarrow \bar{\lambda}$$

并且由障碍项诱导的边界乘子序列

$$\mu_{i,+}^{\mu_k} := \frac{\mu_k}{x_{\max} - x_i^{\mu_k}}, \quad \mu_{i,-}^{\mu_k} := \frac{\mu_k}{x_i^{\mu_k} - x_{\min}}$$

对每个 $i \in \mathcal{V}$ 均存在有限极限

$$\mu_{i,+}^{\mu_k} \rightarrow \bar{\mu}_i^+, \quad \mu_{i,-}^{\mu_k} \rightarrow \bar{\mu}_i^-$$

则 $\bar{x}$ 是原约束优化问题 (2) 的 KKT 点. 具体而言, 乘子 $\bar{\lambda}, \{\bar{\mu}_i^+\}_{i \in \mathcal{V}}$ 和 $\{\bar{\mu}_i^-\}_{i \in \mathcal{V}}$ 满足式 (17) ~ (18).

证明. 先说明 $\bar{x}$ 是原优化问题的可行点. 由于 $x^{\mu_k} \in \mathring{\mathcal{X}}$, 对每个 k 都有

$$\mathbf{1}_n^T x^{\mu_k} = C_{\text{total}}, \quad x_{\min} < x_i^{\mu_k} < x_{\max}$$

令 $k \rightarrow \infty$ 即得

$$\mathbf{1}_n^T \bar{x} = C_{\text{total}}, \quad x_{\min} \leq \bar{x} \leq x_{\max}$$

故 $\bar{x}$ 属于原约束问题 (2) 的可行集.

由定理 2 以及 λ^{μ_k} 的定义, 对任意 k 有

$$\frac{\partial U_i(x_i^{\mu_k}, c_i)}{\partial x_i} + \frac{\mu_k}{x_i^{\mu_k} - x_{\min}} - \frac{\mu_k}{x_{\max} - x_i^{\mu_k}} = \lambda^{\mu_k}$$

由 $x_{\min} < x_i^{\mu_k} < x_{\max}$ 与 $\mu_k > 0$ 可知

$$\mu_{i,+}^{\mu_k} \geq 0, \quad \mu_{i,-}^{\mu_k} \geq 0$$

若极限存在, 则进一步有 $\bar{\mu}_i^+ \geq 0$ 与 $\bar{\mu}_i^- \geq 0$ 移项可得

$$\frac{\partial U_i(x_i^{\mu_k}, c_i)}{\partial x_i} = \lambda^{\mu_k} + \mu_{i,+}^{\mu_k} - \mu_{i,-}^{\mu_k}$$

又由于

$$\frac{\partial U_i(x_i, c_i)}{\partial x_i} = \frac{2c_i h^2 x_i}{(h^2 + x_i^2)^2}$$

在闭区间 $[x_{\min}, x_{\max}]$ 上连续, 因而上式可以逐项取极限. 令 $k \rightarrow \infty$ 并利用极限存在性, 即得式 (17). 同时

$$\mu_{i,+}^{\mu_k}(x_i^{\mu_k} - x_{\max}) = -\mu_k \rightarrow 0$$

$$\mu_{i,-}^{\mu_k}(x_{\min} - x_i^{\mu_k}) = -\mu_k \rightarrow 0$$

由乘法与极限运算的连续性可得

$$\bar{\mu}_i^+(x_i - x_{\max}) = 0, \quad \bar{\mu}_i^-(x_{\min} - x_i) = 0$$

即得互补松弛条件 (18). 结合前述已经得到的原问题可行性、乘子非负性和驻点条件 (17), 可知 $\bar{x}$ 满足原约束优化问题的 KKT 条件. $\square$

注 6. 推论 1 的含义是: 对于任意固定的 $\mu > 0$, 本文动力学的平衡点严格对应于正则化问题 (7) 的 KKT 结构. 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 若平衡点序列及其诱导的边界乘子具有有限极限, 则该极限可恢复为原箱体约束问题 (2) 的 KKT 点. 因此, 障碍参数 μ 同时刻画了“距离边界的安全裕度”和“逼近原约束优化问题”的精度之间的权衡.

注 7. 推论 1 中关于边界乘子有限极限的要求, 可以理解为对偶有界性条件. 具体而言, 当 $\mu_k \rightarrow 0$ 且平衡点可能逼近箱体边界时, 由障碍项诱导的边界乘子 $\mu_{i,+}^{\mu_k}$ 和 $\mu_{i,-}^{\mu_k}$ 仍需保持有限. 该条件保证可以提取有限的边界乘子极限, 从而将正则化平衡点的极限解释为原约束问题的 KKT 点. 若该条件不成立, 则沿该正则化平衡序列可能无法得到有限的 KKT 乘子结构. 在数值层面, 后文将通过 $\max(\mu_i^+, \mu_i^-)$ 随 $\mu \rightarrow 0$ 保持有界来为该条件提供支撑.

3.5 能力参数与稳态资源条件排序

定理 4. 设图 $\mathcal{G}$ 连通, 且 $(x^*, \xi^*) \in \mathcal{X}^* \times \mathbf{R}^m$ 为系统 (9) ~ (10) 的一个平衡点. 对于任意两个智能体 $i, j \in \mathcal{V}$, 若二者的稳态资源均位于 Hill 边际效用的单调递减区间, 即

$$x_i^*, x_j^* > \frac{h}{\sqrt{3}} \quad (19)$$

则

$$c_i > c_j \implies x_i^* > x_j^* \quad (20)$$

证明. 由于 $\mathcal{G}$ 连通, 由定理 2 可知, 存在标量 λ^* 使得对任意节点 $\ell \in \mathcal{V}$ 均有

$$h_{\ell, \mu}(x_{\ell}^*) = \lambda^*$$

特别地, 对于待比较的两个节点 i, j 有

$$h_{i, \mu}(x_i^*) = h_{j, \mu}(x_j^*) = \lambda^*$$

记标量自变量为 s , 以避免与状态向量 x 混淆. 对任意节点 $\ell \in \mathcal{V}$ 定义

$$r_{\ell}(s) := h_{\ell, \mu}(s) = c_{\ell} S'(s) + \frac{\mu}{s - x_{\min}} - \frac{\mu}{x_{\max} - s}$$

进一步计算可得

$$S''(s) = \frac{2h^2(h^2 - 3s^2)}{(h^2 + s^2)^3}$$

当 $s > h/\sqrt{3}$ 时, 有 $S''(s) < 0$. 又因能力参数满足 $c_{\ell} > 0$, 且

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\mu}{s - x_{\min}} - \frac{\mu}{x_{\max} - s} \right) = \\ - \frac{\mu}{(s - x_{\min})^2} - \frac{\mu}{(x_{\max} - s)^2} < 0 \end{aligned}$$

因此对固定的节点 ℓ , 函数 $r_{\ell}(s)$ 在区间 $(h/\sqrt{3}, x_{\max})$ 上严格递减.

由于 $(x^*, \xi^*) \in \mathcal{X}^* \times \mathbf{R}^m$, 有 $x_i^*, x_j^* < x_{\max}$. 结合假设 $x_i^* > h/\sqrt{3}$ 和 $x_j^* > h/\sqrt{3}$, 可知区间

$$[\min\{x_i^*, x_j^*\}, \max\{x_i^*, x_j^*\}]$$

包含于 $(h/\sqrt{3}, x_{\max})$, 故 $r_i(s)$ 在该区间上严格递减.

现反设 $c_i > c_j$ 但 $x_i^* \leq x_j^*$. 由于 $r_i(\cdot)$ 递减, 有

$$\lambda^* = r_i(x_i^*) \geq r_i(x_j^*)$$

另一方面, 因为 $x_j^* > h/\sqrt{3} > 0$, 故 $S'(x_j^*) > 0$. 由 $c_i > c_j$ 得

$$r_i(x_j^*) - r_j(x_j^*) = (c_i - c_j)S'(x_j^*) > 0$$

故

$$r_i(x_j^*) > r_j(x_j^*) = \lambda^*$$

与前式矛盾. 因此 $x_i^* > x_j^*$. $\square$

注 8. 定理 4 是条件排序结论, 并非无条件的全局排序规律. 它只适用于被比较节点均位于 Hill 边际效用单调递减区间 $s > h/\sqrt{3}$ 的情形. 若某些节点位于该区间之外, 则 $S'(s)$ 不再保持单调递减, 能

力参数与稳态资源之间未必满足上述排序关系. 因而, 该结论为饱和侧稳态资源分配的局部排序性质.

注 9. 本文的原创性更准确地体现在面向特定受约束竞争问题的模型结构创新和理论闭环创新. 首先, 现有 WTA 或 k -WTA 文献多关注输入排序或赢家选择, 其输出通常是 winner/loser 或 top- k 选择, 而本文研究的是连续资源份额在总量守恒和箱体约束下的动态重分配. 其次, 现有资源分配文献多面向凸优化、经济调度、一般成本最小化或高阶智能体协调控制, 而本文目标是 Hill 型非凸效用下的受约束优势资源集聚, 竞争解释更强. 再者, 本文设计的二阶结构不是将节点状态直接改写为双积分器, 而是将惯性放在图边流动量上, 即式 (9) 和式 (10), 其核心是使边流层惯性始终保持 $\mathbf{1}^T \dot{x} = 0$, 从而区别于一般二阶资源分配模型. 此外, 本文的内点障碍并非单独作为数值惩罚项使用, 而是嵌入正则化边际效用信号 $h_\mu(x)$, 并通过边流动力学实现分布式竞争. 最后, KKT 分析本身是标准工具, 但本文证明的是动力学平衡点、正则化问题 KKT 条件以及 $\mu \rightarrow 0$ 时原始箱体约束 KKT 结构之间的对应关系, 且该对应关系建立在非凸资源竞争解释之下, 并不是对已有一阶竞争动力学或标准主对偶优化流的直接应用.

注 10. 本文提出的模型主要刻画了有限资源、能力异质、局部交互、惯性效应和箱体约束共同作用下形成的稳定竞争平衡. 这类平衡在实际资源竞争场景中具有明确解释, 例如: 在平台流量分配、注意力竞争、边缘计算资源调度或生态资源竞争中, 最终资源格局往往并非全局最优配置, 而是受初始状态、竞争路径、局部反馈和容量边界共同影响后形成的稳定资源集聚状态. 因此, 本文证明的收敛到平衡点集合、KKT 对应关系和 KKT 极限恢复, 主要用于刻画这类受约束竞争稳态的结构性质, 而不是提供全局最优性保证. 同时, 本文的稳态排序条件可对应于实际竞争中资源投入已达到一定规模、优势个体进入相对成熟竞争阶段的情形. 在这一条件下, 能力更强的节点在共同边际效用平衡下获得更多资源份额, 因此排序结论可解释为受约束竞争中优势资源集聚的一种局部稳态规律.

4 数值算例

本节将对本文提出的竞争模型和相关理论进行仿真验证. 假设系统具有 8 个智能体, 其构成了无向环形扩展拓扑, 每个节点与其最近邻和次近邻相连, 对应关联矩阵为 B , 且边权统一为 $D = I$. 系统参数选择为

$$h = 0.35, \quad x_{\min} = 0.05, \quad x_{\max} = 0.85, \quad \alpha = 8$$

各智能体的私有能力参数为

$$[c_1, \dots, c_8] = [1.00, 1.20, 1.45, 1.70, 2.00, 2.35, 2.70, 3.10]$$

系统初值为

$$x(0) = [0.41, 0.38, 0.32, 0.29, 0.27, 0.25, 0.24, 0.24]^T$$

且 $\xi(0) = 0$, $C_{\text{total}} = 2.4$.

4.1 固定 μ 下的收敛与约束验证

取 $\mu = 0.020$, 仿真时间 $t \in [0, 30]$ s. 图 1 与图 2 分别给出动态过程与性能/稳定性指标, 稳态分配见表 1.

由图 1(a) 与表 1 可见, 系统从非均衡初值出发后, 资源并未简单地向初始资源较大的节点集中, 而是沿着“边际效用更高的节点获得更多资源”的方向重新分配. 这说明所提模型下的竞争结果主要由动态边际效用驱动, 而不是由初值大小直接决定, 从而能够将有限总资源逐步从低效节点转移到高效节点. 图 1(b) 表明, 资源总量守恒误差在整个仿真过程中始终保持在机器精度附近, 其最大值为 1.33×10^{-15} . 同时, 图 1(a) 中所有状态轨迹始终严格位于开区间 $(x_{\min}, x_{\max}) = (0.05, 0.85)$ 内, 未发生任何越界现象. 这一结果与定理 1 完全一致, 说明资源守恒并不是数值上的近似现象, 而是由模型结构保证的严格性质; 内点障碍项也确实在动态演化中发挥了约束保持作用, 使系统无需额外投影或裁剪即可维持可行性. 图 1(c) 进一步揭示了平衡形成的内在机制: 各节点的正则化边际效用 $h_{i, \mu}(x_i(t))$ 在暂态阶段存在明显差异, 并驱动了资源沿边持续流动; 随着时间推移, 所有 $h_{i, \mu}(x_i(t))$ 逐步汇聚到同一常数 $\bar{h} = 2.742\ 712$, 终点处 $\max |B^T h_\mu(x^*)| = 8.61 \times 10^{-9}$, $\max_i |h_{i, \mu}(x_i^*) - \bar{h}| = 8.61 \times 10^{-9}$. 这说明仿真终点不仅是“数值上不再变化”的静止状态, 而且满足定理 2 所刻画的平衡点一致边际效用结构, 即系统最终达到的是正则化优化问题的 KKT 平衡.

图 2(a) 显示了系统总效用 $J(x(t))$ 从初始值 5.974 958 持续提升并最终稳定在 7.447 979, 增幅约为 24.65%. 这表明所提竞争动力学虽然不是直接采用集中式最优化迭代, 但其闭环演化确实能够在保持约束的同时提升整体资源利用效率. 从资源配置角度看, 这种效用提升来源于“高能力节点获得更多资源、低能力节点保留正资源份额”的重分配结果, 从而体现出一种受容量边界限制的优势资源集聚机制. 图 2(c) 与图 2(d) 从系统动力学角度给出了收敛证据. 其中, 总能量 $V_\mu(t)$ 单调不减, 数值上

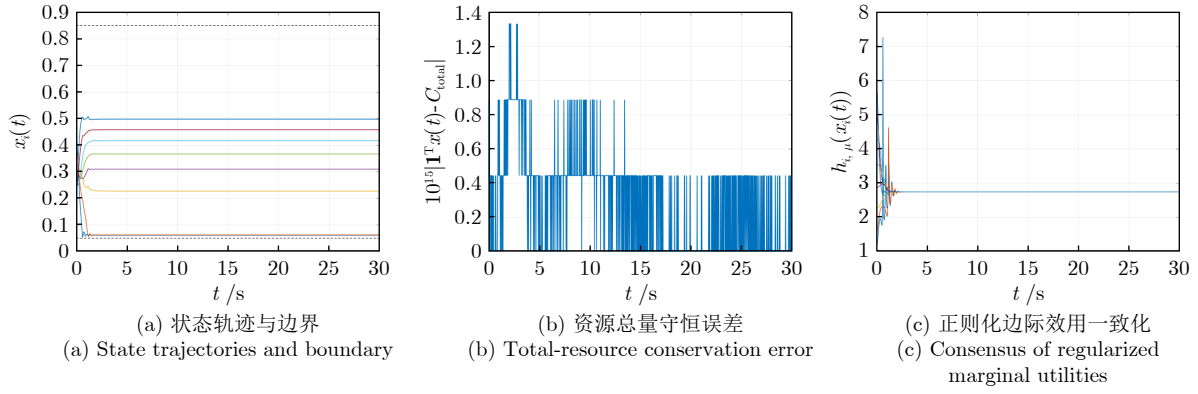


图 1 固定障碍参数下的状态演化与约束保持

Fig.1 State evolution and constraint preservation for a fixed barrier parameter

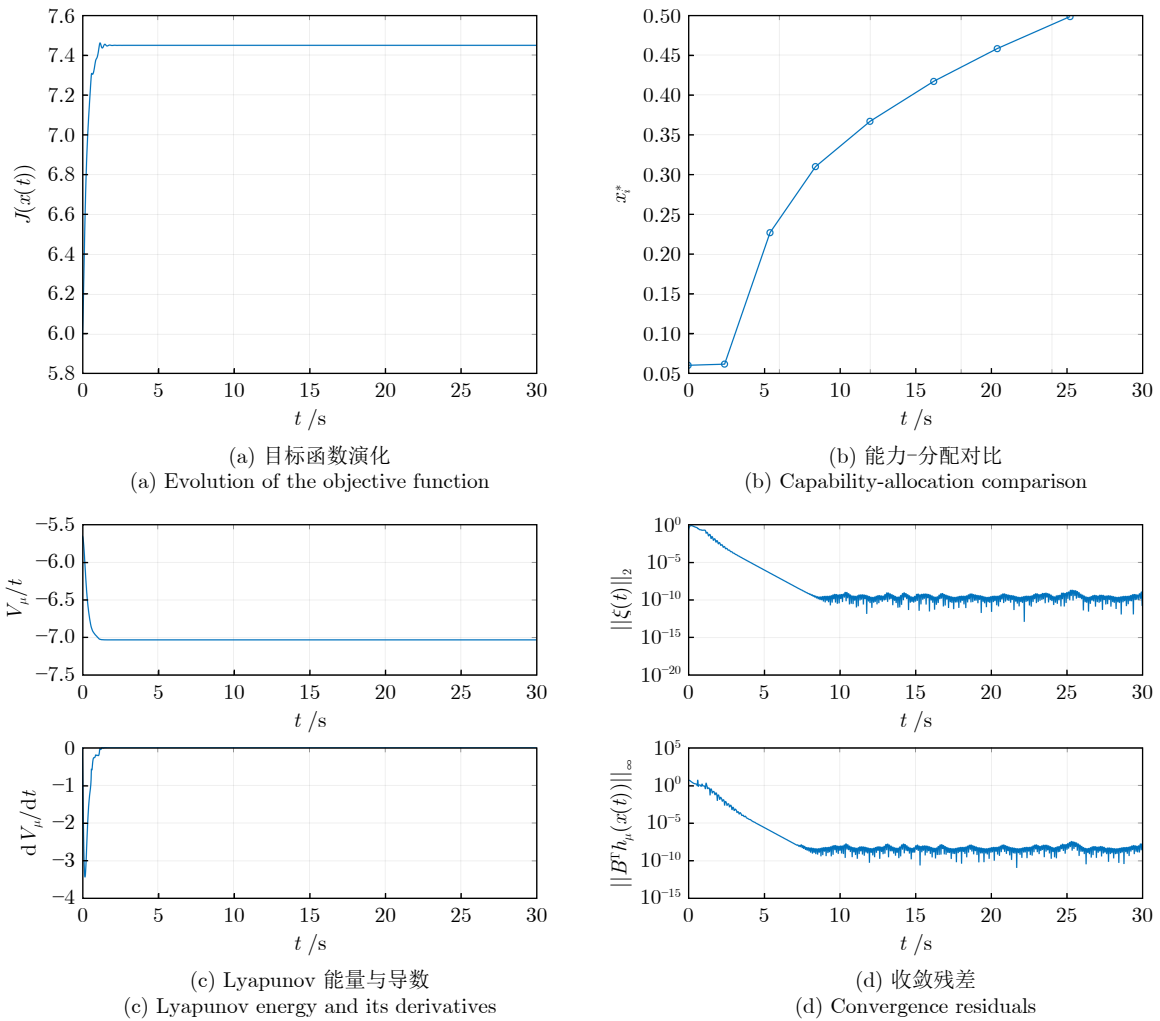


图 2 固定障碍参数下的性能指标与收敛行为

Fig.2 Performance metrics and convergence behavior for a fixed barrier parameter

满足 $\max_k (V_\mu(t_{k+1}) - V_\mu(t_k)) \leq 0$, 与理论上的耗散关系一致; 同时, 边流流量范数 $\|\xi(t)\|_2$ 和平衡残差均逐步衰减到零附近, 表明边流驱动在达到平衡后

完全消失, 系统轨迹收敛到平衡点集合. 因而, $\mu = 0.020$ 的收敛与约束验证算例不仅验证了定理 3 的收敛结论, 还说明“二阶惯性”并未破坏系统的

表 1 初值与稳态资源分配对比 ($\mu = 0.020$)

Table 1 Comparison of initial and steady-state resource allocations ($\mu = 0.020$)

智能体 i	能力参数 c_i	初始资源 $x_i(0)$	稳态资源 x_i^*
1	1.00	0.41	0.060 9
2	1.20	0.38	0.062 3
3	1.45	0.32	0.227 3
4	1.70	0.29	0.309 9
5	2.00	0.27	0.366 7
6	2.35	0.25	0.416 8
7	2.70	0.24	0.458 0
8	3.10	0.24	0.498 0

稳定性,而是通过边流暂态记忆影响收敛过程的快慢与过渡形态.

最后,从表 1 的稳态结果还可以看出明显的排序现象. 由于 $h/\sqrt{3} \approx 0.202\ 1$, 节点 3 至节点 8 的稳态资源均位于定理 4 所要求的 Hill 边际效用单调递减区间内,且这些节点的稳态分配随能力参数 c_i 严格增大. 这说明在赢家进入饱和区后,所提模型确实能够将“能力越强,稳态资源越多”的排序规律表现出来. 与绝对意义上的赢者通吃不同,该模型在箱体约束下形成的是一种有界寡头式资源集聚:高能力节点占据更大资源份额,但不会突破上界;低能力节点虽然处于劣势,仍保留正的资源份额,因而系统整体保持了受约束竞争下的结构平衡.

为进一步说明上述收敛与约束保持结论对初值和模型参数变化的稳定性,本文在固定 $\mu = 0.020$ 的基准设置下补充三类统计实验:随机生成满足 $x_i(0) \in (x_{\min}, x_{\max})$ 且 $\sum_i x_i(0) = C_{\text{total}}$ 的初值,将基准能力参数在 $\pm 15\%$ 范围内扰动形成多组能力参数,以及在区间 $[0.25, 0.55]$ 内随机选取 Hill 参数. 每类实验独立运行 20 次,数值积分采用自适应步长. 表 2 中的有效比例表示轨迹保持内点可行且终点满足 $\max |B^T h_\mu(x)| < 10^{-6}$ 的试验比例,排序一致率表示所有智能体对中能力参数与稳态资源分配顺序一致的比例.

表 2 表明,在所选统计范围内,三类扰动下的有效比例均为 1.00,终点边际失配和资源总量守恒误差均保持在 10^{-15} 量级. 其中,随机初值组的稳态

效用标准差仅为 0.010 11,说明基准参数附近的主要平衡分支对初值扰动较为稳定. 能力参数组和 Hill 参数组的稳态效用标准差分别增大到 0.256 18 和 1.653 11,收敛时间标准差也相应增大,表明能力异质性和非凸 Hill 曲线形状会影响局部平衡分支和收益水平.

4.2 $\mu \rightarrow 0$ 的 KKT 极限验证

取 $\mu \in \{0.080, 0.040, 0.020, 0.010, 0.005\}$, 仿真时间 $t \in [0, 40]$ s, 并以前一组 μ 的平衡点作为下一组初值. 图 3 与图 4 给出极限趋势,指标见表 3. 为便于说明图 4(a) 中的残差曲线,记 $r_{\text{stat}} := \max_{i \in \mathcal{V}} |h_{i,\mu}(x_i^*) - \lambda^*|$, $r_{\text{eq}} := \|B^T h_\mu(x^*)\|_\infty$. 其中, r_{stat} 表示正则化驻点一致性残差,对应表 3 中的 $\max |\text{stat}|$; r_{eq} 表示网络边际效用一致化残差,对应表 3 中的 $\max |B^T h_\mu|$. 因此,图 4(a) 的纵坐标 r_{KKT} 表示上述 KKT 相关残差的数值尺度.

本节主要考察当障碍参数逐步减小时,正则化平衡是否按照推论 1 所描述的方式逼近原始箱体约束问题的 KKT 点. 为此,本文选取 $\mu = 0.080, 0.040, 0.020, 0.010, 0.005$ 进行逐级扫描,并采用以前一组 μ 的平衡点作为下一组初值的方式减少不同参数之间的暂态差异,从而更清晰地观察平衡点的连续变化规律.

首先,由表 3 以及图 4(a) 可见,对所有扫描值,残差 $\max |\text{stat}|$ 与平衡残差 $\max |B^T h_\mu|$ 始终维持在 $10^{-9} \sim 10^{-8}$, 其中, $\text{stat}_i := h_{i,\mu}(x_i^*) - \lambda^*$ 表示第 i 个正则化驻点一致性残差. 这说明每个 μ 对应的数值终点都可以视为足够精确的平衡近似,因而后续关于极限趋势的讨论主要反映参数变化而非积分误差. 其次,图 3(a) 表明,当 μ 逐渐减小时,各节点的平衡资源分配呈现连续变化而非突变:高能力节点的资源份额继续缓慢增加,低能力节点的份额则进一步向下边界靠近,但在任意固定 $\mu > 0$ 时仍保持在可行内点内. 可见障碍参数的作用可以理解为“靠近边界的安全裕度”:较大的 μ 会增强对边界的排斥,使平衡点更偏向内点;较小的 μ 则允许平衡点更接近原始问题的边界 KKT 结构. 这说明障碍参数的作用可以理解为“距离边界的安全裕度”和“逼近原问题精度”之间的折中:在本组扫描中,较大的

表 2 随机初始条件和模型参数扰动下的统计结果

Table 2 Statistical results under random initial conditions and model-parameter perturbations

扰动类型	有效比例	$J(x^*)$	收敛时间 (s)	峰值边流	排序一致率
随机初值组	1.00	7.452 10 $\pm$ 0.010 11	1.97 $\pm$ 0.28	0.332 19 $\pm$ 0.080 14	1.000 $\pm$ 0
能力参数组	1.00	7.437 15 $\pm$ 0.256 18	2.78 $\pm$ 1.07	0.355 16 $\pm$ 0.034 15	1.000 $\pm$ 0
Hill 参数组	1.00	7.256 15 $\pm$ 1.653 11	2.87 $\pm$ 1.30	0.336 19 $\pm$ 0.035 19	1.000 $\pm$ 0

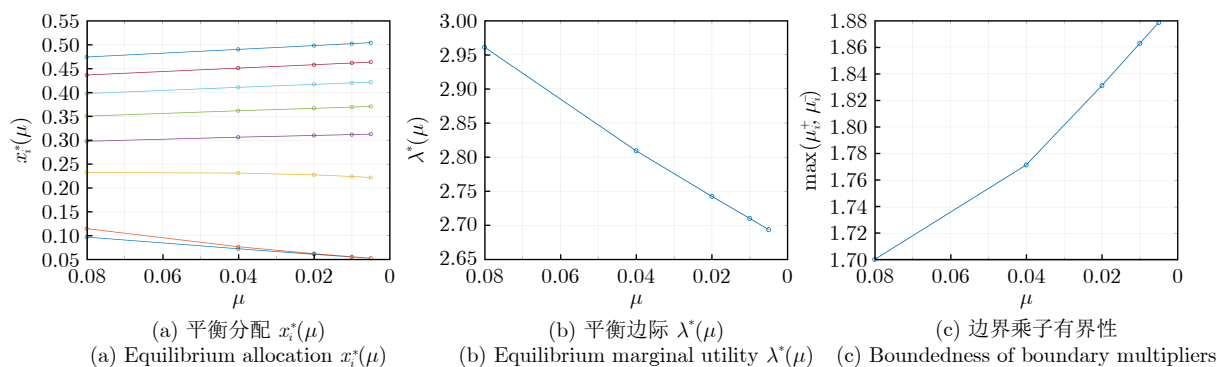


图 3 障碍参数扫描下的平衡分配与乘子趋势

Fig.3 Equilibrium allocations and multiplier trends under a barrier-parameter sweep

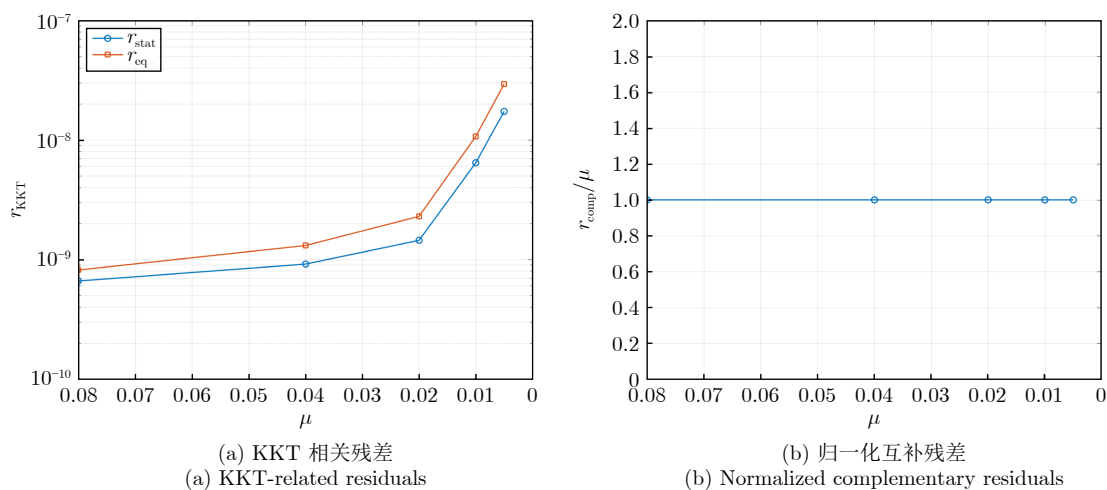


图 4 障碍参数趋于零时的 KKT 残差验证

Fig.4 Verification of KKT residuals as the barrier parameter approaches zero

表 3 μ 扫描下的平衡与残差指标Table 3 Equilibrium and residual metrics under the μ sweep

μ	$\lambda^*(\mu)$	$\max \text{stat} $	$\max \text{comp} $	$\max B^T h_\mu $	$\max(\mu_i^+, \mu_i^-)$
0.080	2.960625	6.61×10^{-10}	8.0×10^{-2}	8.17×10^{-10}	1.7007
0.040	2.809298	9.16×10^{-10}	4.0×10^{-2}	1.31×10^{-9}	1.7715
0.020	2.742712	1.45×10^{-9}	2.0×10^{-2}	2.29×10^{-9}	1.8310
0.010	2.710407	6.44×10^{-9}	1.0×10^{-2}	1.07×10^{-8}	1.8626
0.005	2.694130	1.73×10^{-8}	5.0×10^{-3}	2.94×10^{-8}	1.8783

μ 使平衡点保持更强的内点保护, 但正则化偏差也更明显; 较小的 μ 则使平衡点更接近原始问题的 KKT 结构, 同时障碍项在边界附近更加陡峭, 可能带来更强的数值刚性. 因此, 本文采用逐级减小 μ 并以前一组平衡点作为下一组初值的延续策略, 以在约束裕度、数值稳定性和极限精度之间取得平衡.

再次, 图 3(b) 显示公共边际效用 $\lambda^*(\mu)$ 随 μ 的减小而逐步下降, 这与正则化项影响减弱的趋势一致. 与此同时, 图 3(c) 和表 3 表明, 边界乘子指标

$\max(\mu_i^+, \mu_i^-)$ 始终保持在约 1.700 ~ 1.880 的有界区间内, 并未随着 $\mu \rightarrow 0$ 而发散. 这一点非常关键, 因为它正是推论 1 中“对偶有界”假设在数值层面的直接支撑, 说明障碍项消失过程中系统没有出现不受控的边界奇异行为. 最后, 图 4(b) 给出最直接的极限恢复现象. 可以看到, 互补残差 r_{comp} 满足 $\max |\text{comp}| \approx \mu$, 且归一化后的 $\max |\text{comp}|/\mu$ 基本稳定在 1 附近. 这说明互补残差与障碍参数之间近似呈一阶比例关系, 与推论 1 中由 $\mu_{i,+}^{\mu_k} (x_i^{\mu_k} - x_{\max}) = -\mu_k$,

$\mu_{i,-}^{\mu_k}(x_{\min} - x_i^{\mu_k}) = -\mu_k$ 所刻画的极限构造完全一致. 换言之, 当 μ 足够小时, 正则化平衡已经不是一般意义上的“近似最优点”, 而是在严格的 KKT 意义下逐步逼近原始问题的 KKT 平衡结构.

4.3 一阶/二阶与阻尼系数比较

由于经典 WTA/ k -WTA 模型通常输出离散赢家集合, 而一般分布式资源分配或主对偶动力学多面向凸优化、经济调度或不同约束结构, 与本文所研究的 Hill 型非凸效用、总量守恒和箱体约束下的连续资源竞争问题并不完全同构. 因此, 为保证比较对象具有相同目标函数、相同约束结构和相同图交互机制, 本文选取将边流动量瞬态忽略后得到的一阶约化模型 $\dot{x} = \frac{1}{\alpha} L_a h_{\mu}(x)$ 作为对比基准, 从而更直接地考察二阶边流惯性相对于一阶资源交换流所带来的暂态差异.

同时, 为比较二阶惯性结构相对于一阶边际效用竞争流的作用差异, 本文在相同初值、拓扑和障碍参数下, 比较一阶约化流与不同阻尼系数 α 下的二阶惯性流模型. 表 4 中的一阶约化流对应边流瞬态忽略后的准静态极限, 二阶惯性流则采用式 (9) ~ (10) 进行仿真.

由表 4 可知, 在当前参数下, 二阶惯性结构首先表现为对暂态过程的调节. 当 $\alpha = 8$ 时, 收敛时间约为 2.00 s, 短于一阶约化流的 3.06 s; 当阻尼继续增大至 $\alpha = 12$ 、20 时, 收敛时间反而增加. 同时, 峰值边流强度随阻尼增大而由 0.487 5 逐步下降至 0.192 7. 需要指出的是, 由于原问题具有非凸性, 低阻尼情形 $\alpha = 4$ 的暂态路径可能进入效用略高的局部平衡, 其终值效用为 7.475 509, 而 $\alpha = 8$ 、12、20 时终值效用基本一致. 因而, 二阶惯性流不仅提供收敛速度与瞬时边流强度之间的可调折中, 在非凸竞争场景中也可能通过暂态路径影响局部平衡分支选择.

4.4 拓扑敏感度分析

为考察拓扑结构对竞争结果的影响, 本文在相同初值和参数下选取链式图、环形图、加边环形图、完

全图和星形图进行对比. 对链式图与环形图采用更长仿真时间以保证暂态充分衰减. 结果如表 5 所示.

表 5 表明, 在当前参数与初值设置下, 五类连通拓扑最终收敛到几乎相同的稳态效用, 活跃子图均保持单连通分量, 边际失配保持在较小数量级. 因而, 此时拓扑结构的主要影响体现在边际效用一致化速度上: 完全图和加边环形图收敛最快, 星形图次之, 链式图由于信息传播路径较长而收敛最慢. 这一结果说明, 当活跃子图没有因边界饱和而断开时, 拓扑主要改变暂态传播效率, 而不显著改变极限平衡.

在此基础上, 本文进一步在加边环形图结构上进行随机边权统计实验, 令各边权随机取值于区间 [0.5, 1.5], 并独立运行 20 次. 结果显示, 稳态效用为 $7.447\ 979$, 收敛时间为 2.40 ± 0.59 s, 峰值边流为 $0.416\ 2 \pm 0.062\ 7$, 边际失配与资源总量守恒误差分别为 1.73×10^{-15} 和 4.33×10^{-15} . 这说明在图保持连通且优化目标不变时, 边权扰动主要改变边际效用传输速度和峰值边流强度等暂态指标, 而不显著改变最终的 KKT 平衡结构.

4.5 总资源灵敏度与大规模实验

为分析总资源变化如何影响竞争格局, 进一步选取 $C_{\text{total}} \in \{1.8, 2.4, 3.0, 3.6\}$ 进行仿真. 结果如表 6 所示.

表 5 不同网络拓扑和随机边权的平衡与敏感度分析
Table 5 Equilibrium and sensitivity analysis under different network topologies and random edge weights

拓扑	$J(x^*)$	收敛时间 (s)	活跃分量数	边际失配
链式图	7.447 979	35.04	1	2.19×10^{-10}
环形图	7.447 979	11.74	1	3.04×10^{-9}
加边环形图	7.447 979	2.00	1	1.16×10^{-9}
完全图	7.447 979	1.50	1	6.04×10^{-9}
星形图	7.447 979	6.32	1	6.46×10^{-9}
随机边权加边环	7.447 979	2.40 ± 0.59	1	1.73×10^{-15}

表 4 一阶/二阶模型与阻尼系数比较
Table 4 Comparison of the first-order and second-order models under different damping coefficients

模型	α	$J(x^*)$	收敛时间 (s)	峰值边流强度
一阶约化流	0	7.447 979	3.06	0
二阶惯性流	4	7.475 509	2.78	0.487 5
二阶惯性流	8	7.447 979	2.00	0.357 0
二阶惯性流	12	7.447 979	4.12	0.279 5
二阶惯性流	20	7.447 979	7.40	0.192 7

表 6 总资源变化对优势集聚结构的影响
Table 6 Effect of total-resource variation on the structure of dominant resource concentration

C_{total}	$J(x^*)$	下边界节点数	活跃节点数	前 3 节点资源占比
1.8	5.826 937	0	8	0.690 1
2.4	7.447 979	0	8	0.572 0
3.0	8.831 312	0	8	0.516 9
3.6	9.982 043	0	8	0.474 7

可以看到, 在当前参数范围内, 各节点在不同总资源水平下均未触及下边界, 系统始终保持 8 个活跃节点. 不过, 总资源仍显著影响优势集聚强度: 当 $C_{\text{total}} = 1.8$ 时, 前 3 个节点资源占比达到 69.01%; 随着总资源增加到 3.6, 该占比下降到 47.47%. 这说明即使未出现显式边界饱和, 资源总量的提升仍会削弱高能力节点的相对集中优势, 从而体现出受约束竞争格局对资源规模的连续敏感性.

为进一步验证所提模型在更大规模网络中的适用性, 本文考虑 20 个智能体构成的完全图, 能力参数在线性区间 $[1.000\ 0, 3.400\ 0]$ 上均匀分布, 总资源取 $C_{\text{total}} = 3.6$. 相应仿真结果显示, 系统总效用由 9.544 272 提升至 12.837 496, 收敛时间约为 1.52 s, 且全部 20 个节点均保持在内部可行区间内. 表 7 进一步给出了稳态资源份额最大的前 5 个节点恰好对应能力参数最大的前 5 个节点, 说明在节点规模增大后, 所提模型仍能保持资源总量守恒、箱体约束和能力排序主导下的优势资源集聚结构.

表 7 20 个智能体完全图稳态资源排序
Table 7 Steady-state resource ranking for complete graph of 20 agents

排名	节点 i	能力参数 c_i	稳态资源 x_i^*
1	20	3.400 0	0.389 7
2	19	3.273 7	0.377 6
3	18	3.147 4	0.364 8
4	17	3.021 1	0.351 1
5	16	2.894 7	0.336 3

5 结束语

本文针对受资源总量守恒和箱体约束限制的非凸资源分配问题, 提出了一种二阶惯性边流资源竞争模型. 通过引入对数障碍正则化和边流动量状态, 所提模型在保持分布式实现形式的同时, 实现了资源总量严格守恒, 并可写为资源状态上的显式二阶系统. 在理论分析方面, 本文证明了可行内点集的正不变性和总能量函数的单调耗散性, 进而基于 LaSalle 不变性原理证明系统轨迹收敛到平衡点集合. 此外, 本文建立了动力学平衡点与正则化优化问题 KKT 条件之间的精确对应关系, 并说明在障碍参数趋于零且相关对偶变量保持有界时, 平衡点极限可恢复原始箱体约束优化问题的 KKT 结构. 最后, 针对 Hill 效用饱和区给出了能力参数与稳态资源分配之间的一致排序性质. 数值实验表明, 所提模型能够在保持资源守恒和箱体约束的同时形成有界优势资源集聚, 二阶惯性结构主要提供收敛速

度与峰值边流强度之间的暂态调节自由度, 并在非凸情形下可能影响局部平衡分支的选择. 在当前参数下, 连通拓扑主要改变边际一致化速度而不显著改变极限效用, 随着总资源增加, 优势资源集聚程度逐步减弱, 但能力排序主导的资源集中结构仍保持稳定. 通信噪声、时延或拓扑扰动会改变能量耗散关系、边际效用一致化条件和图连通性假设, 因而不仅是简单数值扰动问题, 还需要新的鲁棒性理论分析. 后续工作可进一步考虑切换拓扑、通信时延、外部扰动以及异质障碍参数等情形下的受约束竞争动力学建模与分析.

参考文献

- Lotka A J. *Elements of Physical Biology*. Baltimore: Williams and Wilkins, 1925.
- Volterra V. *Variations and Fluctuations in the Number of Individuals in Animal Species Living Together*. New York: McGraw-Hill, 1927.
- Grossberg S. Competition, decision, and consensus. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1978, **66**(2): 470–493
- Hirsch M W. Systems of differential equations which are competitive or cooperative: I. Limit sets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1982, **13**(2): 167–179
- Maass W. On the computational power of winner-take-all. *Neural Computation*, 2000, **12**(11): 2519–2535
- Maurer S M, Huberman B A. Competitive dynamics of web sites. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2003, **27**(11–12): 2195–2206
- Noe T, Parker G. Winner take all: Competition, strategy, and the structure of returns in the internet economy. *Journal of Economics & Management Strategy*, 2005, **14**(1): 141–164
- Liu S B, Wang J. A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTa application. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006, **17**(6): 1500–1510
- Liu Q S, Wang J. Two k-winners-take-all networks with discontinuous activation functions. *Neural Networks*, 2008, **21**(2): 406–413
- Li S, Li Y M, Wang Z. A class of finite-time dual neural networks for solving quadratic programming problems and its k-winners-take-all application. *Neural Networks*, 2013, **39**: 27–39
- Yang Tao, Chai Tian-You. Research status and prospects of distributed collaborative optimization. *Science China Information Sciences*, 2020, **50**(11): 1414–1425
(杨涛, 柴天佑. 分布式协同优化的研究现状与展望. 中国科学: 技术科学, 2020, **50**(11): 1414–1425)
- Li S, Zhou M C, Luo X, You Z H. Distributed winner-take-all in dynamic networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(2): 577–589
- Chen Gang, Li Zhi-Yong. Distributed fixed-time optimization control for multi-agent systems with setconstraints. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(9): 2254–2264
(陈刚, 李志勇. 集合约束下多智能体系统分布式固定时间优化控制. 自动化学报, 2022, **48**(9): 2254–2264)
- Zhang Y Y, Li S, Xu B, Yang Y. Analysis and design of a distributed k-winners-take-all model. *Automatica*, 2020, **115**: Article No. 108868
- Shi Xia-Sheng, Lin Zhi-Yun. Fixed-time distributed convex algorithm over second-order multi-agent systems under bounded disturbances. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2023, **49**(11): 2951–2959
(时侠圣, 林志云. 基于固定时间的二阶智能体分布式优化算法. 北京航空航天大学学报, 2023, **49**(11): 2951–2959)
- Zhang Y, Li S, Weng J. Distributed k-winners-take-all network:

An optimization perspective. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, **53**(8): 5069–5081

- 17 Wu Qing-Tao, Zhu Jun-Long, Ge Quan-Bo, Zhang Ming-Chuan. An accelerated distributed online learning algorithm based on conditional gradient. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(2): 386–402
(吴庆涛, 朱军龙, 葛泉波, 张明川. 一种基于条件梯度的加速分布式在线学习算法. *自动化学报*, 2024, **50**(2): 386–402)
- 18 Shi Xia-Sheng, Sun Chang-Yin, Mu Chao-Xu. Distributed resource allocation algorithms for linear multi-agent systems with disturbances. *Science China Information Sciences*, 2024, **54**(4): 911–926
(时侠圣, 孙长银, 穆朝絮. 扰动线性多智能体系统的分布式资源分配算法. *中国科学: 信息科学*, 2024, **54**(4): 911–926)
- 19 Huang Y, Fang W T, Chen Z Y, Li Y G, Yang C H. Flocking of multiagent systems with nonuniform and nonconvex input constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(7): 4329–4335
- 20 Huang Y, Duan M M, Mo L P. Multiagent containment control with nonconvex states constraints, nonuniform time delays, and switching directed networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, **31**(11): 5021–5028
- 21 Chen Z Y. Winners take all: A reverse consensus model. arXiv preprint arXiv: 2409.12407, 2024.
- 22 Cao X W, Yang Y G, Li S, Stanimirović P S, Katsikis V N. A novel competition model for dynamic winner-take-all. *International Journal of Systems Science*, DOI: 10.1080/00207721.2025.2568717



黄 毅 湖南科技大学信息与电气工程学院特聘副教授. 主要研究方向为复杂系统建模, 控制与优化, 强化学习. 本文通信作者.

E-mail: yi.huang@hnust.edu.cn

(HUANG Yi Distinguished associate professor at the School of In-

formation and Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology. His research interests include complex systems modeling, control and optimization, and reinforcement learning. Corresponding author of this paper.)



朱扬威 湖南科技大学信息与电气工程学院硕士研究生. 主要研究方向为建模与控制, 强化学习.

E-mail: ywzhu2003@163.com

(ZHU Yang-Wei Master student at the School of Information and Electrical Engineering, Hunan Uni-

versity of Science and Technology. His research interests include modeling and control, and reinforcement learning.)

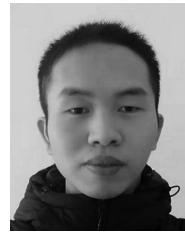


陈祖国 湖南科技大学信息与电气工程学院副教授. 主要研究方向为人工智能, 机器人控制技术和复杂工业过程智能决策.

E-mail: zg.chen@hnust.edu.cn

(CHEN Zu-Guo Associate professor at the School of Information and

Electrical Engineering, Hunan University of Science and Technology. His research interests include artificial intelligence, robot control technology, and intelligent decision-making for complex industrial processes.)



张志鑫 华东交通大学电气与自动化工程学院讲师. 主要研究方向为非线性系统控制, 容错控制, 多智能体系统和瞬态性能约束控制.

E-mail: zhixin.zhang@ecjtu.edu.cn

(ZHANG Zhi-Xin Lecturer at the School of Electrical and Automa-

tion Engineering, East China Jiaotong University. His research interests include nonlinear systems control, fault-tolerant control, multi-agent systems, and transient performance constrained control.)



黄廷文 深圳理工大学计算机科学与人工智能学院教授. 主要研究方向为神经网络, 复杂网络, 混沌与系统动力学, 算子半群理论及其应用.

E-mail: huangtingwen@suat-sz.edu.cn

(HUANG Ting-Wen Professor at

the Faculty of Computer Science and Artificial Intelligence, Shenzhen University of Advanced Technology. His research interests include neural networks, complex networks, chaos and dynamics of systems, and operator semigroups theory and its applications.)