



数据驱动鲁棒固定次迭代学习控制

王守勤 陈强 成云 何熊熊

Data-driven Robust Fixed-iteration Learning Control

WANG Shou-Qin, CHEN Qiang, CHENG Yun, HE Xiong-Xiong

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16383/j.aas.c250649>

您可能感兴趣的其他文章

基于改进扩展状态观测器的液压锚杆钻机滑模摆角控制

Sliding Mode Swing Angle Control for a Hydraulic Roofbolter Based on Improved Extended State Observer

自动化学报. 2023, 49(6): 1256–1271 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c220524>

基于扩张状态观测器的四旋翼吊挂飞行系统非线性控制

Nonlinear Control of Quadrotor Suspension System Based on Extended State Observer

自动化学报. 2023, 49(8): 1758–1770 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c210001>

基于改进ESO的星间激光通信精跟踪自适应自抗扰控制

Adaptive ADRC for the Fine Tracking System in Inter-satellite Laser Communication Based on Improved ESO

自动化学报. 2025, 51(12): 2633–2647 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c250102>

二自由度无人直升机的非线性自抗扰姿态控制

Nonlinear Active Disturbance Rejection Attitude Control of Two-DOF Unmanned Helicopter

自动化学报. 2021, 47(8): 1951–1962 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190521>

非重复受扰批次过程的自适应迭代学习经济模型预测控制

Adaptive Iterative Learning Economic Model Predictive Control for Batch Processes With Non-repetitive Disturbances

自动化学报. 2026, 52(3): 541–554 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c250447>

连续时间系统混合迭代鲁棒自适应评判控制

Robust Adaptive Critic Control With Hybrid Iteration for Continuous-time Systems

自动化学报. 2026, 52(1): 137–147 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c250327>

数据驱动鲁棒固定次迭代学习控制

王守勤^{1, 2, 3} 陈强^{1, 2, 3} 成云^{1, 2, 3} 何熊熊^{1, 2, 3}

摘 要 针对现有迭代学习控制方法中迭代次数依赖初始跟踪误差及系统不确定性影响控制精度等问题, 提出一种数据驱动鲁棒固定次迭代学习控制方法. 首先, 通过构造沿迭代轴的双曲正切型趋近律, 设计固定次迭代学习控制器, 推导出跟踪误差的稳态误差带并移除迭代次数上界依赖初始误差这一限制, 保证系统跟踪误差在固定迭代次数内收敛. 在此基础上, 基于系统输入输出数据设计沿迭代轴更新的参数自适应律与扩张状态观测器, 估计未知参数并补偿系统中未知干扰, 进而提高系统的鲁棒性与跟踪精度. 理论分析和仿真结果验证了所提方法的有效性.

关键词 固定次迭代学习控制; 参数自适应律; 扩张状态观测器; 趋近律

引用格式 王守勤, 陈强, 成云, 何熊熊. 数据驱动鲁棒固定次迭代学习控制. 自动化学报, 2026, 52(7): 1438–1448

DOI 10.16383/j.aas.c250649 **CSTR** 32138.14.j.aas.c250649

Data-driven Robust Fixed-iteration Learning Control

WANG Shou-Qin^{1, 2, 3} CHEN Qiang^{1, 2, 3} CHENG Yun^{1, 2, 3} HE Xiong-Xiong^{1, 2, 3}

Abstract A data-driven robust fixed-iteration learning control method is proposed to overcome the limitations in existing iterative learning control methods, such as the dependence of iteration number on initial tracking errors and reduced control accuracy due to system uncertainties. First, a fixed-iteration learning controller is designed using a hyperbolic tangent reaching law constructed along the iteration axis. The steady-state error band of the tracking error is derived and the restriction on the upper bound for the iteration number, dependent on the initial error, is removed to ensure the system tracking error converges within a fixed number of iterations. Furthermore, parameter adaptive laws and an extended state observer, updated iteratively using system input-output data, are developed to estimate unknown parameters and compensate for unknown disturbances in the system. This ensures the robustness and tracking accuracy of the system. Theoretical analysis and simulation results validate the effectiveness of the proposed method.

Keywords fixed-iteration learning control; parameter adaptive law; extended state observer; reaching law

Citation Wang Shou-Qin, Chen Qiang, Cheng Yun, He Xiong-Xiong. Data-driven robust fixed-iteration learning control. *Acta Automatica Sinica*, 2026, 52(7): 1438–1448

离散时间系统理论作为现代控制理论的重要分支, 广泛应用于机器人和半导体制造装备等具有重复运行特性的工业过程^[1]. 这类系统对轨迹跟踪精

度往往有较高的要求, 而迭代学习控制通过利用历史运行数据逐步优化控制输入, 能够显著提升跟踪性能, 已成为实现高精度跟踪的有效方法之一^[2–5]. 针对系统模型未知或难以精确建模的情形, 数据驱动迭代学习控制 (data-driven iterative learning control, DDILC) 直接基于输入输出数据设计控制器, 为此类问题提供有效解决方案^[6–7]. 例如, 文献^[6]利用邻近智能体动态线性化技术, 提出一种安全数据驱动迭代学习策略, 实现存在信道衰落与欺骗攻击的非线性多智能体系统的跟踪误差收敛; 文献^[8]针对列车自动停站控制问题, 提出一种数据驱动的空间自适应终端迭代学习预测控制策略, 在存在执行器饱和的情况下实现高精度停车控制; 文献^[9–10]分别针对异构多智能体协同及随机丢包等场景, 设计相应的数据驱动迭代学习控制方案, 提升了系统在复杂工况下的跟踪精度与鲁棒性. 尽管上述工作^[2–10]在迭代次数趋于无穷时能保证跟踪误差的高精度收敛, 然而在实际工业过程 (如机器

收稿日期 2025-11-15 录用日期 2026-03-19

Manuscript received November 15, 2025; accepted March 19, 2026

国家自然科学基金 (U25A20452, 62222315, 62233016, 62503427), 浙江省自然科学基金 (LZ26F030004), 浙江省属高校基本科研业务费专项资金 (RF-C2024001), 浙江省重点研发计划项目 (2026C02A1213) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (U25A20452, 62222315, 62233016, 62503427), Zhejiang Province Natural Science Foundation (LZ26F030004), Fundamental Research Funds for the Provincial Universities of Zhejiang (RF-C2024001), and the Key Research and Development Program of Zhejiang Province (2026C02A1213)

本文责任编辑 那靖

Recommended by Associate Editor NA Jing

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023 2. 浙江省复杂系统智能感知与控制重点实验室 杭州 310023 3. 绿色化学合成与转化技术全国重点实验室 杭州 310023

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023 2. Zhejiang Key Laboratory of Intelligent Perception and Control for Complex Systems, Hangzhou 310023 3. State Key Laboratory of Green Chemical Synthesis and Conversion, Hangzhou 310023

人焊接、半导体制造装备的周期性作业) 中, 除精度要求外, 系统还需在预先确定且较少的运行周期内达到预设跟踪精度, 以提升生产效率并降低调试成本. 因此, 有限次迭代学习控制 (finite-iteration learning control, FILC) 近年来受到广泛关注.

有限次迭代学习控制旨在使系统跟踪误差在预设的有限迭代次数内收敛到指定范围. 文献 [11] 首次给出有限次迭代跟踪的定义, 并基于压缩映射方法计算出误差收敛到指定精度所需迭代次数上界. 针对存在干扰的离散系统, 文献 [12] 在假设干扰与初始误差满足线性不等关系的条件下, 提出一种鲁棒有限次迭代跟踪策略, 确保误差在有限次迭代内达到指定精度. 在数据驱动框架下, 文献 [13] 引入误差分数次幂, 设计面向输出饱和和未知非线性系统的点到点有限次迭代学习控制方法; 文献 [14] 则通过求解线性矩阵不等式 (linear matrix inequalities, LMIs) 更新学习增益, 保证误差在有限批次内收敛. 此外, 有限次迭代学习控制方法已被拓展至执行器受限系统^[15]、参数不确定多变量系统^[16]及高阶连续非线性系统^[17], 拓展了该方法的适用场景.

在有限次迭代学习控制的基础上, 固定次迭代学习控制旨在进一步严格确定收敛所需的迭代次数上界, 且该上界与系统初始状态无关, 从而为重复作业提供确定性的学习周期与性能保证. 然而现有研究仍存在以下局限: 1) 同一跟踪精度下的有限次迭代学习控制方法所需迭代次数依赖初始误差; 基于 LMIs 的设计方法存在求解复杂度高、容易面临非凸可行性问题. 2) 鲁棒迭代学习控制在应对非重复干扰时, 往往需采用较高增益, 易导致稳态误差增大, 影响其控制性能. 受时间域固定时间控制理论的启发, 文献 [18] 利用反正切函数构造滑模控制器, 实现跟踪误差在固定时间内收敛至允许范围; 文献 [19–21] 等研究也为时域内实现误差快速收敛提供重要技术支撑. 然而现有成果多集中于时间维度, 如何在迭代学习控制框架下实现跟踪误差在固定迭代次数内收敛至允许范围, 目前相关研究相对较少. 固定次迭代学习控制能够确保系统在预先确定的迭代次数内进入指定跟踪精度范围, 从而增强学习过程的可靠性与生产调度的可预测性, 为高精度高确定性的重复任务控制提供性能保证.

基于上述讨论, 本文针对一类存在模型不确定和外部干扰的离散时间系统, 提出一种数据驱动鲁棒固定次迭代学习控制方法. 本文的主要贡献包括: 1) 为得到一个与初始误差无关的收敛次数上界, 利用双曲正切函数设计固定次迭代学习控制器, 实现系统跟踪误差在固定迭代次数内收敛至指定精度范

围内, 同时避免了 LMIs 求解方法的高计算复杂度; 2) 基于输入输出数据设计沿迭代轴的参数自适应律与扩张状态观测器, 实现对系统未知参数和外部干扰的估计与补偿, 保证跟踪误差在干扰情形下的固定次迭代收敛特性.

1 问题描述

考虑如下有限时间内重复运行的离散时变系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}(t)u_k(t) + \mathbf{q}_k(t) \\ y_k(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}_k(t) \\ \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $t \in \{0, 1, \dots, N\}$ 表示离散时间点; $k \in \mathbf{Z}^+$ 表示系统运行的迭代次数, $\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集合; $u_k(t) \in \mathbf{R}$ 和 $y_k(t) \in \mathbf{R}$ 分别是系统有界的输入和输出; $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态向量; $\mathbf{A}(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 、 $\mathbf{B}(t) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}(t) \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ 表示未知但有界的参数矩阵或向量, 满足 $\mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t) \neq 0$; $\mathbf{q}_k(t) \in \mathbf{R}^n$ 是有界的外部干扰; $\mathbf{x}_0$ 是任意但有界的初始状态.

将输入 $u_k(t)$ 与输出 $y_k(t)$ 表示为超向量形式

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= [u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(N-1)]^T \\ \mathbf{y}_k &= [y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(N)]^T \end{aligned}$$

则系统 (1) 重新表述为向量形式

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_0 + \mathbf{H}\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k \quad (2)$$

其中, $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{H}$ 是由 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 和 $\mathbf{C}(t)$ 构成的下三角参数矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}(1)\mathbf{A}(0) \\ \mathbf{C}(2)\mathbf{A}(1)\mathbf{A}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{C}(N) \prod_{l=0}^{N-1} \mathbf{A}(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{F}^1)^T \\ (\mathbf{F}^2)^T \\ \vdots \\ (\mathbf{F}^N)^T \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} h^{11} & 0 & \dots & 0 \\ h^{21} & h^{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{N1} & h^{N2} & \dots & h^{NN} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中,

$$h^{ij} = \mathbf{C}(i) \prod_{l=j}^{i-1} \mathbf{A}(l) \mathbf{B}(j-1), \quad i \geq j$$

$$\prod_{l=j}^{i-1} \mathbf{A}(l) = \begin{cases} \mathbf{I}, & i = j \\ \mathbf{A}(i-1)\mathbf{A}(i-2)\dots\mathbf{A}(j), & i > j \end{cases}$$

总干扰 $\mathbf{d}_k = [d_k(1), d_k(2), \dots, d_k(N)]^T$, 其中 $d_k(i)$ 的表达式为

$$d_k(i) = \mathbf{C}(i) \sum_{j=0}^{i-1} \left(\prod_{l=j+1}^{i-1} \mathbf{A}(l) \right) \mathbf{e}_k(j)$$

令 $y_d(t)$ 为给定的期望轨迹, 则第 k 次迭代时的跟踪误差为 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$. 根据离散时间域文献 [18], 跟踪误差 $e_k(t)$ 的性能可通过稳态误差带和收敛迭代次数两个指标进行评估, 其定义如下:

定义 1. 若存在正整数 $K \in \mathbf{Z}^+$, 使得对所有 $t \in \{0, 1, \dots, N\}$, 当 $k \geq K$ 时, 若 $|e_k(t)| \leq \Delta_{ss}$, 有

$$|e_{k+1}(t)| \leq \Delta_{ss} \quad (3)$$

则称跟踪误差 $e_k(t)$ 收敛至稳态误差带, 且该误差在未来所有迭代中均保持在此区域内, 其中 $\Delta_{ss} \geq 0$ 表示稳态误差带的边界. 因此, 稳态误差带表征了跟踪误差 $e_k(t)$ 收敛的指定稳态范围.

定义 2. 若存在正整数 $k_{ss} \in \mathbf{Z}^+$, 使得对任意 $t \in \{0, 1, \dots, N\}$, 当 $k \geq k_{ss}$ 时, 有

$$|e_k(t)| \leq \Delta_{ss} \quad (4)$$

则称 k_{ss} 为 $e_k(t)$ 首次进入 Δ_{ss} 所需的收敛迭代次数. 若 $e_k(t)$ 在 k_{ss} 次迭代内收敛至 Δ_{ss} , 且 k_{ss} 与初始误差无关, 则称 $e_k(t)$ 实现了固定次迭代收敛.

本文的目标是在参数信息未知且存在外部干扰的情形下, 设计迭代学习控制器驱动系统 (1)(或系统 (2)), 使系统的跟踪误差 $e_k(t)$ 在固定迭代次数内收敛到指定的稳态误差带内.

2 固定次迭代学习控制器设计

本节首先设计参数自适应律以实现对系统未知参数的估计; 其次设计沿迭代轴的扩张状态观测器以实现对参数估计误差和总干扰的快速估计, 有效抑制其对系统性能的影响; 在此基础上, 设计固定次迭代学习控制器, 保证系统输出在固定迭代次数内实现对给定参考轨迹的高精度跟踪.

2.1 参数自适应律

考虑到系统参数矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 和 $\mathbf{C}(t)$ 信息未知, 为便于估计式 (2) 中的参数矩阵 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{H}$, 定义增广参数矩阵 $\mathbf{P} = [\mathbf{F}, \mathbf{H}] \in \mathbf{R}^{N \times (N+n)}$ 和增广向量 $\phi_k = [\mathbf{x}_0; \mathbf{u}_k] \in \mathbf{R}^{N+n}$. 基于此, 系统 (2) 可表示为输出分量形式

$$y_k(i) = (\mathbf{P}^i)^T \phi_k^i + d_k(i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

其中, $(\mathbf{P}^i)^T = [(\mathbf{F}^i)^T, (\mathbf{H}^i)^T] \in \mathbf{R}^{1 \times (n+i)}$, $(\mathbf{F}^i)^T \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ 是矩阵 $\mathbf{F}$ 第 i 行向量, $(\mathbf{H}^i)^T \in \mathbf{R}^{1 \times i}$ 是下三

角矩阵 $\mathbf{H}$ 第 i 行的前 i 个元素组成的向量; $\phi_k^i = [\mathbf{x}_0; \mathbf{u}_k^i] \in \mathbf{R}^{n+i}$, $\mathbf{u}_k^i \in \mathbf{R}^i$ 是 $\mathbf{u}_k$ 前 i 个元素组成的向量.

由式 (5) 可得第 $k-1$ 次迭代的输出表达式

$$y_{k-1}(i) = (\mathbf{P}^i)^T \phi_{k-1}^i + d_{k-1}(i) \quad (6)$$

式 (5) 和式 (6) 相减, 得到输出增量方程

$$\Delta y_k(i) = (\mathbf{P}^i)^T \Delta \phi_k^i + \Delta d_k(i) \quad (7)$$

其中, $\Delta y_k(i) = y_k(i) - y_{k-1}(i)$; $\Delta \phi_k^i = \phi_k^i - \phi_{k-1}^i$; $\Delta d_k(i) = d_k(i) - d_{k-1}(i)$.

针对式 (7) 中的未知参数向量 $(\mathbf{P}^i)^T$, 设计如下参数自适应律

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_k^i &= \eta_{k-1}(i) \Delta \phi_{k-1}^i \left(\Delta y_{k-1}(i) - \right. \\ &\quad \left. (\hat{\mathbf{P}}_{k-1}^i)^T \Delta \phi_{k-1}^i \right) + \hat{\mathbf{P}}_{k-1}^i \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $\hat{\mathbf{P}}_k^i = [\hat{\mathbf{F}}_k^i; \hat{\mathbf{H}}_k^i]$ 是 $\mathbf{P}^i$ 第 k 次迭代时的估计值, $\hat{\mathbf{F}}_k^i$ 是 $\mathbf{F}^i$ 第 k 次迭代时的估计值, $\hat{\mathbf{H}}_k^i = [\hat{h}_k^{i1}; \dots; \hat{h}_k^{ii}]$ 是 $\mathbf{H}^i$ 第 k 次迭代时的估计值; $\eta_{k-1}(i) = 1/(\mu + (\Delta \phi_{k-1}^i)^T \Delta \phi_{k-1}^i)$ 为自适应增益, $\mu > 0$ 为可调参数.

特别地, 对于任意小的常数 $\tau > 0$, 如果向量 $(\hat{\mathbf{P}}_{k-1}^i)^T$ 中的元素 $|\hat{h}_{k-1}^{ii}| \leq \tau$, 则有重置算法

$$\hat{\mathbf{P}}_k^i = \hat{\mathbf{P}}_1^i \quad (9)$$

定理 1. 将设计的参数自适应律 (8) 应用于被控系统 (7) 中, 可保证参数估计值 $\hat{\mathbf{P}}_k^i$ 和参数估计误差 $\tilde{\mathbf{P}}_k^i$ 的有界性.

证明. 定义参数估计误差

$$\tilde{\mathbf{P}}_k^i = \mathbf{P}^i - \hat{\mathbf{P}}_k^i$$

基于参数自适应律 (8), 参数估计误差的动态方程为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_k^i &= -\eta_{k-1}(i) \Delta \phi_{k-1}^i \left(\Delta y_{k-1}(i) - \right. \\ &\quad \left. (\hat{\mathbf{P}}_{k-1}^i)^T \Delta \phi_{k-1}^i \right) + \tilde{\mathbf{P}}_{k-1}^i \end{aligned} \quad (10)$$

根据式 (7), 有

$$\Delta y_k(i) - (\hat{\mathbf{P}}_k^i)^T \Delta \phi_k^i = (\tilde{\mathbf{P}}_k^i)^T \Delta \phi_k^i + \Delta d_k(i) \quad (11)$$

式 (11) 的结论代入式 (10), 取范数并应用三角不等式, 得

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{P}}_k^i\|_2 &\leq \|\eta_{k-1}(i) \Delta \phi_{k-1}^i \Delta d_{k-1}(i)\|_2 + \\ &\quad \|\mathbf{I} - \eta_{k-1}(i) \Delta \phi_{k-1}^i (\Delta \phi_{k-1}^i)^T\|_2 \|\tilde{\mathbf{P}}_{k-1}^i\|_2 \end{aligned} \quad (12)$$

对于不等式 (12) 右侧第一项, 由于 $\Delta \phi_{k-1}^i$ 有界, $\eta_{k-1}(i) \leq \frac{1}{\mu}$, 且 $|\Delta d_{k-1}(i)| \leq \bar{d}$ ($\bar{d}$ 为有界正常数),

故存在正常数 α , 使得

$$\|\eta_{k-1}(i)\Delta\phi_{k-1}^i\Delta d_{k-1}(i)\|_2 \leq \alpha \quad (13)$$

对于不等式 (12) 右侧第二项, 考虑其平方形式

$$\begin{aligned} & \left\| (I - \eta_{k-1}(i)\Delta\phi_{k-1}^i(\Delta\phi_{k-1}^i)^T) \tilde{P}_{k-1}^i \right\|_2^2 = \\ & (\tilde{P}_{k-1}^i)^T (I - \eta_{k-1}(i)\Delta\phi_{k-1}^i(\Delta\phi_{k-1}^i)^T)^T \cdot \\ & (I - \eta_{k-1}(i)\Delta\phi_{k-1}^i(\Delta\phi_{k-1}^i)^T) \tilde{P}_{k-1}^i = \\ & (\eta_{k-1}^2(i)(\Delta\phi_{k-1}^i)^T \Delta\phi_{k-1}^i - 2\eta_{k-1}(i)) \times \\ & \left((\Delta\phi_{k-1}^i)^T \tilde{P}_{k-1}^i \right)^2 + \left\| \tilde{P}_{k-1}^i \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (14)$$

由于 $\eta_{k-1}(i) = 1/(\mu + (\Delta\phi_{k-1}^i)^T \Delta\phi_{k-1}^i)$, 得

$$\begin{aligned} & \eta_{k-1}^2(i)(\Delta\phi_{k-1}^i)^T \Delta\phi_{k-1}^i - 2\eta_{k-1}(i) = \\ & \frac{-(\Delta\phi_{k-1}^i)^T \Delta\phi_{k-1}^i - 2\mu}{(\mu + (\Delta\phi_{k-1}^i)^T \Delta\phi_{k-1}^i)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

在参数条件 $\mu > 0$ 下, 有

$$-(\Delta\phi_{k-1}^i)^T \Delta\phi_{k-1}^i - 2\mu < 0 \quad (16)$$

因此, 在 $(\Delta\phi_{k-1}^i)^T \tilde{P}_{k-1}^i \neq 0$ 的情形下, 存在常数 $0 < \rho < 1$, 使得式 (14) 化简为

$$\begin{aligned} & \left\| (I - \eta_{k-1}(i)\Delta\phi_{k-1}^i(\Delta\phi_{k-1}^i)^T) \tilde{P}_{k-1}^i \right\|_2 \leq \\ & \rho \left\| \tilde{P}_{k-1}^i \right\|_2 \end{aligned} \quad (17)$$

将式 (13) 和 (17) 代入式 (12), 得

$$\left\| \tilde{P}_k^i \right\|_2 \leq \rho \left\| \tilde{P}_{k-1}^i \right\|_2 + \alpha \quad (18)$$

将式 (18) 沿迭代轴递推, 得

$$\left\| \tilde{P}_k^i \right\|_2 \leq \rho^{k-1} \left\| \tilde{P}_1^i \right\|_2 + \frac{\alpha(1 - \rho^{k-1})}{1 - \rho} \quad (19)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \tilde{P}_k^i \right\|_2 \leq \frac{\alpha}{1 - \rho} \quad (20)$$

这表明参数估计误差 $\tilde{P}_k^i$ 是一致最终有界的.

对于 $(\Delta\phi_{k-1}^i)^T \tilde{P}_{k-1}^i = 0$ 的情形, 保证了 $\tilde{P}_{k-1}^i$ 的有界性; 另一方面, 结合式 (12) ~ (14), 得

$$\left\| \tilde{P}_k^i \right\|_2 \leq \left\| \tilde{P}_{k-1}^i \right\|_2 + \alpha \quad (21)$$

进而 $\tilde{P}_k^i$ 是有界的.

因此, 参数估计误差 $\tilde{P}_k^i$ 是有界的. 又因参数 P^i 的有界性, 可保证参数估计值 $\hat{P}_k^i$ 是有界的. $\square$

2.2 迭代扩张状态观测器

基于参数估计算法 (8), 系统方程 (7) 可重新表述为

$$\Delta y_k(i) = (\hat{P}_k^i)^T \Delta\phi_k^i + w_k(i) \quad (22)$$

其中, $w_k(i) = (\tilde{P}_k^i)^T \Delta\phi_k^i + \Delta d_k(i)$ 为由参数估计误差项和总干扰增量构成的集总干扰.

为有效抑制 $w_k(i)$ 对系统性能的影响, 设计沿迭代轴的扩张状态观测器

$$\begin{cases} \hat{y}_k(i) = y_{k-1}(i) + (\hat{P}_k^i)^T \Delta\phi_k^i + \hat{w}_{k-1}(i) + \\ \quad \gamma_1(y_{k-1}(i) - \hat{y}_{k-1}(i)) \\ \hat{w}_k(i) = \hat{w}_{k-1}(i) + \gamma_2(y_{k-1}(i) - \hat{y}_{k-1}(i)) \end{cases} \quad (23)$$

其中, $\hat{y}_k(i)$ 为系统输出的估计值; $\hat{w}_k(i)$ 为集总干扰 $w_k(i)$ 的估计值; γ_1 和 γ_2 为观测器增益参数, 需满足一定的稳定性条件.

定理 2. 考虑由式 (23) 描述的扩张状态观测器, 其中集总干扰增量 $\Delta w_k(i)$ 有界. 若选择观测器增益 γ_1 、 γ_2 满足不等式

$$\begin{cases} |\gamma_2 - \gamma_1| < 1 \\ |\gamma_1 - 1| < 1 + (\gamma_2 - \gamma_1) \\ |\gamma_1 - 1| < 1 - (\gamma_2 - \gamma_1) \end{cases}$$

则误差动态矩阵 $G_1 = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & 1 \\ -\gamma_2 & 1 \end{bmatrix}$ 的谱半径 $\rho(G_1) < 1$. 从而输出估计误差 $\tilde{y}_k(i)$ 和干扰估计误差 $\tilde{w}_k(i)$ 是一致最终有界的.

证明. 定义输出和干扰的估计误差分别为

$$\tilde{y}_k(i) = y_k(i) - \hat{y}_k(i), \quad \tilde{w}_k(i) = w_k(i) - \hat{w}_k(i)$$

从系统方程 (22) 和观测器方程 (23) 可得

$$\begin{cases} y_k(i) = y_{k-1}(i) + (\hat{P}_k^i)^T \Delta\phi_k^i + w_k(i) \\ \hat{y}_k(i) = y_{k-1}(i) + (\hat{P}_k^i)^T \Delta\phi_k^i + \hat{w}_{k-1}(i) + \\ \quad \gamma_1(y_{k-1}(i) - \hat{y}_{k-1}(i)) \end{cases} \quad (24)$$

因此, 输出估计误差动力学为

$$\tilde{y}_k(i) = \Delta w_k(i) + \tilde{w}_{k-1}(i) - \gamma_1 \tilde{y}_{k-1}(i) \quad (25)$$

其中, $\Delta w_k(i) = w_k(i) - w_{k-1}(i)$ 表示干扰增量, 满足 $|\Delta w_k(i)| \leq \bar{w}$ ($\bar{w}$ 为有界正常数).

同样, 干扰估计误差动力学为

$$\begin{aligned} \tilde{w}_k(i) &= w_k(i) - (\hat{w}_{k-1}(i) + \gamma_2 \tilde{y}_{k-1}(i)) = \\ & \Delta w_k(i) + \tilde{w}_{k-1}(i) - \gamma_2 \tilde{y}_{k-1}(i) \end{aligned} \quad (26)$$

联立式 (25) 和 (26), 误差动力学可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_k(i) \\ \tilde{w}_k(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & 1 \\ -\gamma_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_{k-1}(i) \\ \tilde{w}_{k-1}(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta w_k(i)$$

令 $\lambda_k(i) = [\tilde{y}_k(i), \tilde{w}_k(i)]^T$, 则

$$\lambda_k(i) = \mathbf{G}_1 \lambda_{k-1}(i) + \mathbf{G}_2 \Delta w_k(i) \quad (27)$$

其中, $\mathbf{G}_2 = [1 \quad 1]^T$.

由于矩阵 $\mathbf{G}_1$ 的特征多项式 $g^2 + (\gamma_1 - 1)g + (\gamma_2 - \gamma_1) = 0$ 所对应的特征根为

$$g_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 - \gamma_1 \pm \sqrt{(\gamma_1 + 1)^2 - 4\gamma_2} \right)$$

根据离散系统稳定性判据, 若 γ_1, γ_2 满足如下不等式条件:

$$\begin{cases} |\gamma_2 - \gamma_1| < 1 \\ |\gamma_1 - 1| < 1 + (\gamma_2 - \gamma_1) \\ |\gamma_1 - 1| < 1 - (\gamma_2 - \gamma_1) \end{cases}$$

则 $\mathbf{G}_1$ 的特征根都位于单位圆内, 即谱半径小于 1. 故存在常数 $0 < \bar{g} < 1$, 使得 $\|\mathbf{G}_1\|_2 \leq \bar{g}$.

对式 (27) 两边同时取向量 2-范数, 得

$$\|\lambda_k(i)\|_2 \leq \|\mathbf{G}_1\|_2 \|\lambda_{k-1}(i)\|_2 + \|\mathbf{G}_2\|_2 |\Delta w_k(i)|$$

由于 $|\Delta w_k(i)| \leq \bar{w}$ 且 $\|\mathbf{G}_2\|_2 = \sqrt{2}$, 将上式沿迭代轴递推, 得

$$\begin{aligned} \|\lambda_k(i)\|_2 &\leq \|\mathbf{G}_1\|_2 \|\lambda_{k-1}(i)\|_2 + \sqrt{2}\bar{w} \leq \\ &\bar{g}^{k-1} \|\lambda_1(i)\|_2 + \frac{\sqrt{2}\bar{w}(1 - \bar{g}^{k-1})}{1 - \bar{g}} \end{aligned} \quad (28)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_k(i)\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}\bar{w}}{1 - \bar{g}} \quad (29)$$

因此, 误差向量 $\lambda_k(i)$ 是一致最终有界的, 输出估计误差 $\tilde{y}_k(i)$ 和干扰估计误差 $\tilde{w}_k(i)$ 也是一致最终有界的. $\square$

2.3 固定次迭代学习控制器设计

在基于参数自适应律 (8) 实现对系统未知参数估计, 以及通过沿迭代轴的扩张状态观测器 (23) 实现对参数估计误差和总干扰快速估计的基础上, 本节设计固定次迭代学习控制器, 以保证系统输出在固定迭代次数内实现对给定参考轨迹的高精度跟踪, 同时对外部干扰具有较强的鲁棒性.

为实现跟踪误差 $e_k(i)$ 固定次迭代收敛, 现设计一种迭代轴上的趋近律, 具体形式为

$$e_k(i) = \delta \operatorname{artanh}((1 - \sigma) \bar{e}_{k-1}(i)) - \tilde{w}_k(i) \quad (30)$$

其中, $\delta > 0$; $0 < \sigma < 1$ 是可调参数; $\operatorname{artanh}(\cdot)$ 是反双曲正切函数; $\bar{e}_{k-1}(i) = \tanh(e_{k-1}(i)/\delta)$, $\tanh(\cdot)$ 是双曲正切函数.

注 1. 趋近律 (30) 通过双曲正切函数及其反函数的非线性特性, 实现对跟踪误差的动态调节. 参数 δ 和 σ 的约束条件为固定次迭代收敛提供理论保

障, 提高控制器的工程实用性. 特别地, $\tanh(x)$ 函数可替换为其他函数 (如 $\arctan(x)$, $x/(|x| + a)$ 等), 同样能得到一个与初始误差无关的收敛次数上界, 使误差变量 $e_k(i)$ 实现固定次迭代收敛.

基于系统方程 (22), 跟踪误差的动态方程为

$$e_k(i) = e_{k-1}(i) - (\hat{\mathbf{P}}_k^i)^T \Delta \phi_k^i - w_k(i) \quad (31)$$

由于 $(\hat{\mathbf{P}}_k^i)^T = [(\hat{\mathbf{F}}_k^i)^T, (\hat{\mathbf{H}}_k^i)^T]$, 且 $\phi_k^i = [\mathbf{x}_0; \mathbf{u}_k^i]$, 因此

$$(\hat{\mathbf{P}}_k^i)^T \phi_k^i = (\hat{\mathbf{H}}_k^i)^T \mathbf{u}_k^i + (\hat{\mathbf{F}}_k^i)^T \mathbf{x}_0 \quad (32)$$

进一步, 有

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{P}}_k^i)^T \Delta \phi_k^i &= (\hat{\mathbf{H}}_k^i)^T \Delta \mathbf{u}_k^i = \\ &(\hat{\hat{\mathbf{H}}}_k^i)^T \Delta \mathbf{u}_k^{i-1} + \hat{h}_k^{ii} \Delta u_k(i-1) \end{aligned} \quad (33)$$

其中, $\hat{h}_k^{ii}$ 和 $\Delta u_k(i-1)$ 分别是 $(\hat{\mathbf{H}}_k^i)^T$ 和 $\Delta \mathbf{u}_k^i$ 的第 i 个元素; $(\hat{\hat{\mathbf{H}}}_k^i)^T$ 是 $(\hat{\mathbf{H}}_k^i)^T$ 的前 $i-1$ 个元素组成的向量; $(\hat{\hat{\mathbf{H}}}_k^i)^T \Delta \mathbf{u}_k^{i-1}$ 表示前 $i-1$ 个时间点的控制更新项.

将式 (33) 代入式 (31), 得

$$e_k(i) = e_{k-1}(i) - (\hat{\hat{\mathbf{H}}}_k^i)^T \Delta \mathbf{u}_k^{i-1} - w_k(i) - \hat{h}_k^{ii} \Delta u_k(i-1) \quad (34)$$

基于趋近律 (30) 与误差动态方程 (34), 设计如下固定次迭代学习控制器

$$\begin{aligned} u_k(i-1) &= u_{k-1}(i-1) + \frac{1}{\hat{h}_k^{ii}} \left(e_{k-1}(i) - \varphi_{k-1}(i) - \right. \\ &\quad \left. \hat{w}_k(i) - (\hat{\hat{\mathbf{H}}}_k^i)^T \Delta \mathbf{u}_k^{i-1} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

其中, $\varphi_{k-1}(i) = \delta \operatorname{artanh}((1 - \sigma) \bar{e}_{k-1}(i))$.

将控制器 (35) 代入误差动态方程 (34), 即可得到趋近律 (30).

因此, 整个数据驱动鲁棒固定次迭代学习控制方法可描述为

$$\begin{cases} \Delta y_k(i) = (\hat{\mathbf{P}}_k^i)^T \Delta \phi_k^i + w_k(i) \\ \hat{\mathbf{P}}_k^i = \eta_{k-1}(i) \Delta \phi_{k-1}^i \left(\Delta y_{k-1}(i) - \right. \\ \quad \left. (\hat{\mathbf{P}}_{k-1}^i)^T \Delta \phi_{k-1}^i \right) + \hat{\mathbf{P}}_{k-1}^i \\ \hat{y}_k(i) = y_{k-1}(i) + (\hat{\mathbf{P}}_k^i)^T \Delta \phi_k^i + \hat{w}_{k-1}(i) + \\ \quad \gamma_1 (y_{k-1}(i) - \hat{y}_{k-1}(i)) \\ \hat{w}_k(i) = \hat{w}_{k-1}(i) + \gamma_2 (y_{k-1}(i) - \hat{y}_{k-1}(i)) \\ u_k(i) = u_{k-1}(i) + \frac{1}{\hat{h}_k^{(i+1)(i+1)}} \left(e_{k-1}(i+1) - \right. \\ \quad \left. \hat{w}_k(i+1) - \varphi_{k-1}(i+1) - (\hat{\hat{\mathbf{H}}}_k^{i+1})^T \Delta \mathbf{u}_k^i \right) \end{cases} \quad (36)$$

本文所提数据驱动鲁棒固定次迭代学习控制的

流程图如图 1 所示. 在每一次迭代中, 系统利用上一批次的历史输入输出信息, 通过参数自适应律更新参数信息, 并结合扩张状态观测器进行扰动估计, 进而计算当前迭代的控制输入. 也即, 对于 $i = 0, 1, \dots, N-1$, 固定次迭代学习控制器 (35) 综合 $\hat{P}_k^{i+1}$ 、 $\hat{w}_k(i+1)$ 与 $e_{k-1}(i+1)$ 生成当前迭代的控制信号 $u_k(i)$, 完成一次迭代更新, 实现跟踪误差在迭代轴上的逐步收敛.

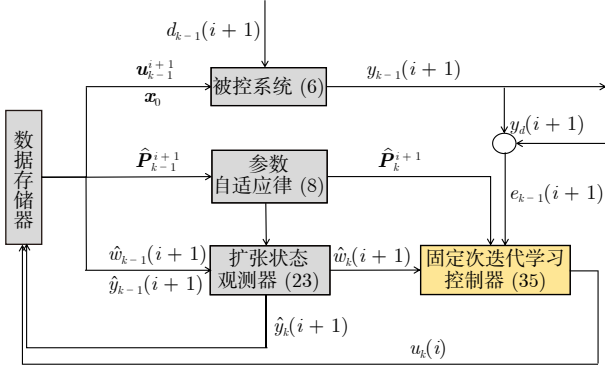


图 1 固定次迭代学习控制流程图

Fig.1 Flowchart of fixed-iteration learning control

3 收敛性分析

本节在干扰估计误差 $|\tilde{w}_k(i)| \leq \Delta$ ($\Delta > 0$ 是一个有界正数) 的前提下, 给出跟踪误差 $e_k(t)$ 的稳态误差带边界 Δ_{ss} . 接着, 给出跟踪误差 $e_k(t)$ 进入稳态误差带的固定迭代次数上界 k_{ss} 的具体表达式.

定理 3. 将设计的固定次迭代学习控制器 (35) 应用于系统方程 (22) 中, 可得到跟踪误差 $e_k(t)$ 的稳态误差带边界

$$\Delta_{ss} \geq \delta \operatorname{artanh} \left(\frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4(1-\sigma)\Delta_d^2}}{2\Delta_d(1-\sigma)} \right) \quad (37)$$

其中, $0 < \Delta_d = \tanh(\Delta/\delta) < 1$.

证明. 由于 $\bar{e}_k(i) = \tanh(e_k(i)/\delta)$ 且 $\delta > 0$, 有 $\operatorname{sgn}(e_k(i)) = \operatorname{sgn}(\bar{e}_k(i))$, 且 $|\bar{e}_k(i)| < 1$, 其中, $k = 1, 2, \dots$. 因此, 趋近律 (30) 可重写为

$$\tanh \left(\frac{e_k(i) + \tilde{w}_k(i)}{\delta} \right) = (1-\sigma) \bar{e}_{k-1}(i) \quad (38)$$

利用双曲正切函数的加法公式, 并令 $\tilde{w}_k(i) = \tanh(\tilde{w}_k(i)/\delta)$, 得

$$\tanh \left(\frac{e_k(i) + \tilde{w}_k(i)}{\delta} \right) = \frac{\bar{e}_k(i) + \tilde{w}_k(i)}{1 + \bar{e}_k(i)\tilde{w}_k(i)} \quad (39)$$

将式 (39) 代入式 (38) 中并解方程, 可得变换后的趋近律表达式

$$\bar{e}_k(i) = \frac{(1-\sigma)\bar{e}_{k-1}(i) - \tilde{w}_k(i)}{1 - \tilde{w}_k(i)(1-\sigma)\bar{e}_{k-1}(i)} \quad (40)$$

根据定理 2 的结论可知, 干扰估计误差 $|\tilde{w}_k(i)| \leq \Delta$, 又已知 $0 < \Delta_d = \tanh(\Delta/\delta) < 1$ 、 $0 < \sigma < 1$ 且 $|\bar{e}_k(i)| < 1$, 因此

$$|\tilde{w}_k(i)| = \left| \tanh \left(\frac{\tilde{w}_k(i)}{\delta} \right) \right| \leq \left| \tanh \left(\frac{\Delta}{\delta} \right) \right| < 1$$

$$|(1-\sigma)\bar{e}_{k-1}(i)| < 1$$

由此可得, 趋近律 (40) 右侧的分母恒大于零.

令 Δ_{ss} 和 $\bar{\Delta}_{ss}$ 分别表示误差 $e_k(i)$ 和 $\bar{e}_k(i)$ 的稳态误差带边界, 则有

$$\Delta_{ss} = \delta \operatorname{artanh} \bar{\Delta}_{ss} \quad (41)$$

首先考虑 $\bar{e}_k(i) \geq 0$ 的情况. 根据趋近律 (40), 当 $0 \leq \bar{e}_k(i) \leq \bar{\Delta}_{ss}$ 时, 可得

$$\begin{cases} \frac{(1-\sigma)\bar{e}_{k-1}(i) + \Delta_d}{1 + \Delta_d((1-\sigma)\bar{e}_{k-1}(i))} \leq \bar{\Delta}_{ss} \\ \frac{(1-\sigma)\bar{e}_{k-1}(i) - \Delta_d}{1 - \Delta_d((1-\sigma)\bar{e}_{k-1}(i))} \geq -\bar{\Delta}_{ss} \end{cases} \quad (42)$$

考虑到不等式 (42) 左侧的分母均大于零, 将其移项化简, 得

$$\begin{cases} \bar{e}_{k-1}(i) \leq \frac{\bar{\Delta}_{ss} - \Delta_d}{(1-\sigma)(1 - \Delta_d \bar{\Delta}_{ss})} \\ \bar{e}_{k-1}(i) \geq \frac{-\bar{\Delta}_{ss} + \Delta_d}{(1-\sigma)(1 - \Delta_d \bar{\Delta}_{ss})} \end{cases} \quad (43)$$

基于稳态误差带定义和式 (43), 得以下不等式

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{ss} \leq \frac{\bar{\Delta}_{ss} - \Delta_d}{(1-\sigma)(1 - \Delta_d \bar{\Delta}_{ss})} \\ 0 \geq \frac{-\bar{\Delta}_{ss} + \Delta_d}{(1-\sigma)(1 - \Delta_d \bar{\Delta}_{ss})} \end{cases} \quad (44)$$

解上述不等式, 得

$$\begin{cases} (1-\sigma)\Delta_d \bar{\Delta}_{ss}^2 + \sigma \bar{\Delta}_{ss} - \Delta_d \geq 0 \\ \bar{\Delta}_{ss} - \Delta_d \geq 0 \end{cases} \quad (45)$$

由此推得

$$\begin{cases} \bar{\Delta}_{ss} \geq \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4(1-\sigma)\Delta_d^2}}{2\Delta_d(1-\sigma)} \\ \bar{\Delta}_{ss} \geq \Delta_d \end{cases} \quad (46)$$

对于 $0 < \Delta_d < 1$ 和 $0 < \sigma < 1$, 能够证明

$$\frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4(1-\sigma)\Delta_d^2}}{2\Delta_d(1-\sigma)} > \Delta_d$$

恒成立, 因此稳态误差带边界

$$\bar{\Delta}_{ss} \geq \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4(1-\sigma)\Delta_d^2}}{2\Delta_d(1-\sigma)} \quad (47)$$

当 $\bar{e}_k(i) < 0$ 时, 可得相同结论.

因此, 结合式 (46) 和 (41), 可得误差 $e_k(i)$ 的稳

态误差带边界为

$$\Delta_{ss} \geq \delta \operatorname{artanh} \left(\frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4(1-\sigma)\Delta_d^2}}{2\Delta_d(1-\sigma)} \right) \quad (48)$$

□

定理 4. 当系统方程 (22) 满足 $2\Delta_d/(1+\Delta_d) < \sigma < 1$ 时, 设计的固定次迭代学习控制器 (35) 能够保证跟踪误差 $e_k(i)$ 的固定次迭代收敛性, 且实现 $|e_k(i)| \leq \Delta_{ss}$ 所需的迭代次数上界 k_{ss} 为

$$k_{ss} = \left\lceil 1 + \log_{(1-\sigma)(1+\Delta_d)} \frac{\theta_1}{\theta_2} \right\rceil \quad (49)$$

其中, 参数 $\theta_1 = \bar{\Delta}_{ss}(\sigma(1+\Delta_d) - \Delta_d)$; 参数 $\theta_2 = \sigma(1+\Delta_d) - 2\Delta_d$; $\bar{\Delta}_{ss} > \Delta_d/(\sigma(1+\Delta_d) - \Delta_d)$; $\lceil \cdot \rceil$ 为向上取整函数.

证明. 令 k_{ss} 和 $\bar{k}_{ss}$ 分别表示跟踪误差 $e_k(i)$ 和 $\bar{e}_k(i)$ 进入稳态误差带所需迭代次数. 由于 $\bar{e}_k(i)$ 是 $e_k(i)$ 的单调连续函数, 且稳态误差带存在对应关系, 因此 $k_{ss} = \bar{k}_{ss}$.

基于 $|\bar{e}_k(i)| < 1$ 和 $|\bar{w}_k(i)| < \Delta_d < 1$ 的结论, 令 $z_k = 1 + \bar{e}_k(i)\bar{w}_k(i)$, 得

$$0 < 1 - \Delta_d \leq z_k \leq 1 + \Delta_d < 2 \quad (50)$$

且式 (38) 可转化为

$$\bar{e}_k(i) = (1-\sigma)\bar{e}_{k-1}(i)z_k - \bar{w}_k(i) \quad (51)$$

进一步, 利用式 (50) 的结论, 令 $\vartheta = (1-\sigma) \times (1+\Delta_d)$, 误差动态方程 (51) 可递推为

$$|\bar{e}_k(i)| \leq (1-\sigma)|\bar{e}_{k-1}(i)|(1+\Delta_d) + \Delta_d \leq \vartheta^{k-1}|\bar{e}_1(i)| + \Delta_d \frac{1-\vartheta^{k-1}}{1-\vartheta} \quad (52)$$

由于 $|\bar{e}_1(i)| < 1$, 为实现 $|\bar{e}_k(i)| \leq \bar{\Delta}_{ss}$, 式 (52) 转化为

$$\vartheta^{k-1} + \Delta_d \frac{1-\vartheta^{k-1}}{1-\vartheta} \leq \bar{\Delta}_{ss}$$

整理得

$$(1-\vartheta-\Delta_d)\vartheta^{k-1} \leq \bar{\Delta}_{ss}(1-\vartheta) - \Delta_d \quad (53)$$

根据 ϑ 的定义得 $1-\vartheta = \sigma(1+\Delta_d) - \Delta_d$. 在条件 $2\Delta_d/(1+\Delta_d) < \sigma < 1$ 下, 得

$$1-\vartheta-\Delta_d = \sigma(1+\Delta_d) - 2\Delta_d > 0$$

根据定理条件 $\bar{\Delta}_{ss} > \Delta_d/(\sigma(1+\Delta_d) - \Delta_d)$ 得 $\theta_1 > 0$, 且式 (53) 转化为

$$\vartheta^{k-1} \leq \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (54)$$

由于 $0 < \vartheta < 1$, 取对数后, 有

$$k-1 \geq \log_{\vartheta} \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

解得实现 $|\bar{e}_k(i)| \leq \bar{\Delta}_{ss}$ 所需的迭代次数上界

$$\bar{k}_{ss} = \left\lceil 1 + \log_{\vartheta} \frac{\theta_1}{\theta_2} \right\rceil \quad (55)$$

将 ϑ 、 θ_1 和 θ_2 的值代入式 (55), 得

$$\bar{k}_{ss} = \left\lceil 1 + \log_{(1-\sigma)(1+\Delta_d)} \frac{\bar{\Delta}_{ss}(\sigma(1+\Delta_d) - \Delta_d) - \Delta_d}{\sigma(1+\Delta_d) - 2\Delta_d} \right\rceil \quad (56)$$

□

注 2. 对于 $\bar{\Delta}_{ss} \leq \Delta_d/(\sigma(1+\Delta_d) - \Delta_d)$ 的情况, 误差从初始状态实现 $|e_k(i)| \leq \Delta_{ss} + \varepsilon$ (其中 $\varepsilon > 0$) 所需的迭代次数 $k_{ss, \varepsilon}$ 是固定的, 且

$$k_{ss, \varepsilon} = \left\lceil 1 + \log_{(1-\sigma)(1+\Delta_d)} \frac{\theta_3}{\theta_2} \right\rceil$$

其中, $\theta_3 = (\bar{\Delta}_{ss} + \varepsilon)(\sigma(1+\Delta_d) - \Delta_d) - \Delta_d$.

特别地, 与同一跟踪精度下所需迭代次数依赖初始误差的有限次迭代学习控制方法^[11-17]相比, 本文所设计方法得到一个与初始误差无关的收敛迭代次数上界 k_{ss} , 同时避免了 LMI 求解方法的高计算复杂度.

注 3. 稳态误差带边界 Δ_{ss} 的设计为跟踪误差的变化提供了可接受的边界. 定理 3 中的稳态误差带 Δ_{ss} 和定理 4 中的收敛步数上界 k_{ss} 由控制器参数 σ 、 δ 以及干扰估计误差上界 Δ (体现为 $\Delta_d = \tanh(\Delta/\delta)$) 共同决定. 其中 σ 的取值影响误差的收敛速度. 在满足定理 4 的条件 $2\Delta_d/(1+\Delta_d) < \sigma < 1$ 的前提下, 增大 σ 可减少跟踪误差收敛步数上界 k_{ss} , 从而加快误差收敛速度, 但会增大稳态误差带 Δ_{ss} . δ 的取值影响稳态误差带的大小. 增大 δ 将加快进入稳态误差带的过程, 但会降低稳态精度; 减小 δ 则会缩小稳态误差带范围, 提升稳态精度. Δ 的取值表明干扰估计水平. 减小 Δ 将提升收敛速度与稳态精度. Δ 的值越小, 扩张状态观测器对干扰估计的能力越强, 同时, k_{ss} 与 Δ_{ss} 的值也将减少.

4 数值仿真

为验证控制方法的有效性, 考虑被控系统 (1) 的参数矩阵^[14]

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -0.24 & 0.01 \\ 0.2 \sin(0.1t) + 0.04 & -0.35 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0.0027t + 0.1 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(t) = [0.45 \quad -0.001t]$$

系统状态维度 $n = 2$, 时间步长总数 $N = 100$, 最大迭代次数 $k_{\max} = 50$, 外部干扰选取为

$$\mathbf{e}_k(t) = \begin{bmatrix} 0.5 \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right) + 0.3 \cos\left(\frac{\pi t}{10k}\right) \\ 0.5 \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right) + 0.3 \cos\left(\frac{\pi t}{10k}\right) \end{bmatrix}$$

期望轨迹设计为

$$y_d(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{50}\right) + \cos\left(\frac{2\pi t}{25}\right)$$

为评估本文设计控制方法的性能, 采用三种控制方法进行对比分析:

1) DDRFxILC: 本文所设计的数据驱动鲁棒固定次迭代学习控制方法 (36).

2) DDRILC^[7]: 数据驱动鲁棒迭代学习控制方法. 参数更新律和迭代扩张状态观测器同 DDRFxILC 方法, 控制器为

$$u_k(t) = u_{k-1}(t) + \frac{m_k(t+1)}{\hat{h}_k^{(t+1)(t+1)}} \left(e_{k-1}(t+1) - \hat{w}_k(t+1) - (\hat{\mathbf{H}}_k^{t+1})^T \Delta \mathbf{u}_k^t \right) \quad (57)$$

其中, $m_k(t) = (\hat{h}_k^{tt})^2 / (0.1 + (\hat{h}_k^{tt})^2)$ 是学习增益.

3) PILC: 传统 P 型迭代学习控制器, 不包含参数更新律和迭代扩张状态观测器, 控制器为

$$u_k(t) = u_{k-1}(t) + 1.2e_{k-1}(t+1) \quad (58)$$

三种方法采用统一参数设置: 初始状态 $\mathbf{x}_0 = 5\mathbf{f}_k$, 其中 $\mathbf{f}_k = [\text{randn}(1), \text{randn}(1)]^T$; 初始控制输入 $\mathbf{u}_1 = [1, 1, \dots, 1]^T$; 参数更新律参数 $\mu = 0.1$, 控制器参数 $\sigma = 0.4$, $\delta = 2$; 观测器初始条件 $\hat{w}_1(t) = 0$, $\hat{y}_1(t) = y_1(t)$, 增益系数 $\gamma_1 = 0.28$, $\gamma_2 = 0.40$; 初始参数矩阵估计值

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.002 & 0.100 & 0 & \cdots & 0 \\ 0.002 & 0.002 & 0.002 & 0.100 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.002 & 0.002 & 0.002 & 0.002 & \cdots & 0.100 \end{bmatrix}$$

选取干扰估计误差上界 $\Delta = 0.04$, 计算得 $\Delta_d = 0.02$. 基于定理 3 和定理 4 的条件, 得稳态误差带边界 $\Delta_{ss} = 0.12$, 迭代次数上界 $k_{ss} = 11$.

仿真结果如图 2 ~ 图 6 和表 1 所示. 图 2 展示了三种控制方法在不同迭代次数下的输出跟踪性能; 图 3 比较了三种控制方法在不同迭代次数下的跟踪误差变化情况; 图 4 描述了三种方法的最大跟踪误差

差 $\max |e_k(t)|$ ($t = 1, 2, \dots, 100$) 的迭代变化趋势; 图 5 则对比了本文所提 DDRFxILC 方法和文献 [7] 中 DDRILC 方法的干扰估计误差 $\max |w_k(t)|$ 的变化过程; 图 6 展示了所提 DDRFxILC 方法的最大跟踪误差 $\max |e_k(t)|$ 在不同初始状态下的变化情况. 表 1 展示了本文所提 DDRFxILC 方法在不同初始误差下的性能对比.

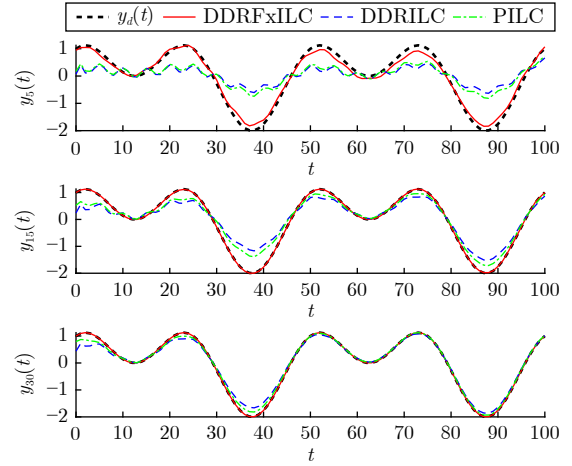


图 2 输出跟踪性能对比

Fig.2 Comparison of output tracking performance

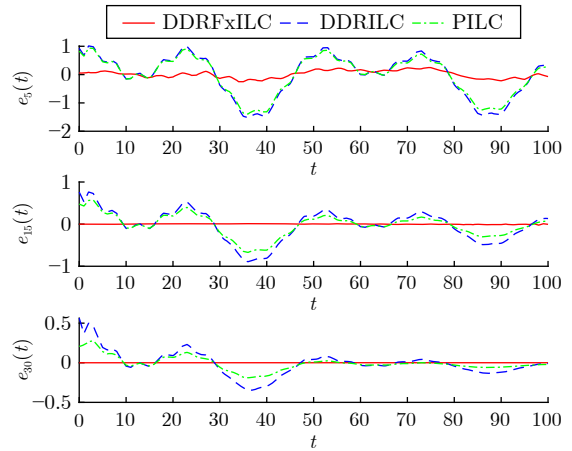


图 3 跟踪误差变化曲线

Fig.3 Variation curve of the tracking error

由图 2 可以看出, 在系统存在未知参数与外部干扰的情况下, 三种方法均能随迭代次数增加实现对期望轨迹的有效跟踪. 与文献 [7] 的 DDRILC 方法和传统 PILC 方法相比, 本文所设计的 DDRFxILC 方法具有更快的收敛速度和更好的跟踪性能. 由图 3 可知, 本文所设计的 DDRFxILC 方法的跟踪误差递减速度更快, 在第 5 次迭代时已收敛至零附近. 图 4 表明, 三种方法的最大跟踪误差均随迭代次数增加而逐步下降, 其中本文方法在第 9 次迭

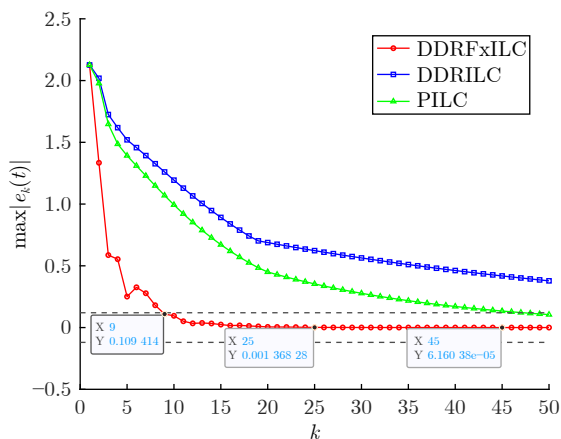
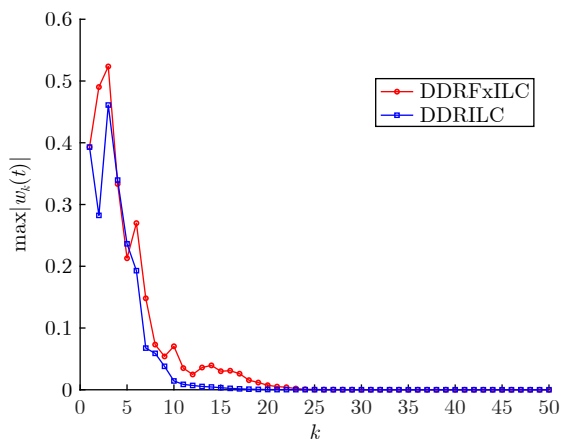
图 4 最大跟踪误差 $\max |e_k(t)|$ 变化曲线Fig.4 Variation curve of the maximum tracking error $\max |e_k(t)|$ 

图 5 干扰估计误差的变化曲线

Fig.5 Variation curve of the disturbance estimation error

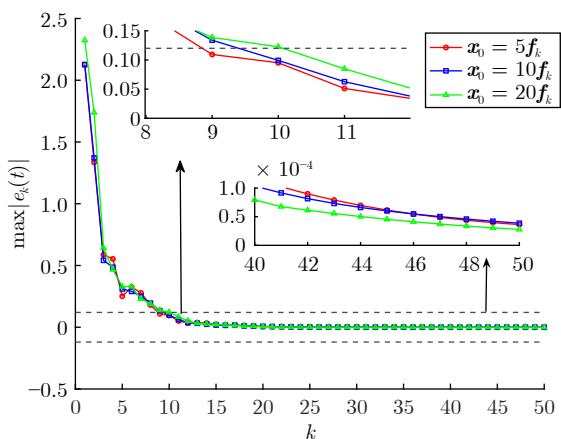
图 6 不同初始状态下 $\max |e_k(t)|$ 的变化曲线Fig.6 Variation curve of $\max |e_k(t)|$ in different initial states

表 1 不同初始条件下 DDRFxILC 方法的性能对比

Table 1 Performance comparison of the DDRFxILC method under different initial conditions

初始状态	进入稳态所需迭代次数	稳态误差均值	稳态误差标准差	第 30 次迭代误差
$x_0 = 5f_k$	9	3.00×10^{-3}	5.80×10^{-3}	5.07×10^{-4}
$x_0 = 10f_k$	10	2.70×10^{-3}	4.90×10^{-3}	3.75×10^{-4}
$x_0 = 20f_k$	11	2.70×10^{-3}	5.50×10^{-3}	3.08×10^{-4}

代时进入稳态误差带, 小于理论上界 11 次。

图 5 结果显示, DDRFxILC 与 DDRILC 方法的干扰估计误差均随迭代次数递增而降低, 验证了本文所构造干扰估计策略的有效性。图 6 表明, 即使在不同初始状态下, 最大跟踪误差 $\max |e_k(t)|$ 都能在 11 次迭代内进入稳态误差带。从表 1 可以看出, 系统进入稳态误差带所需迭代次数 k_{ss} 均小于或等于定理 4 给出的理论上界, 且波动范围小, 证实了收敛次数与初始误差无关的固定次特性。此外, 收敛后的稳态误差均值与标准差均维持在相似的低水平, 证明了方法对初始状态的鲁棒性和输出性能的一致性。

为进一步展示控制方案有效性, 在初始状态 $x_0 = 10f_k$, 期望轨迹

$$y_d(t) = \begin{cases} 3 \times (-1)^{\text{round}(\frac{t}{10})} + 0.2, & t \leq 30 \\ 3 \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) + 0.2, & 30 < t \leq 70 \\ 3 \times (-1)^{\text{round}(\frac{t}{10})} + 0.2, & t > 70 \end{cases}$$

其余参数不变的情形下, 分别对本文所提 DDRFxILC 方法、DDRILC 方法^[7]和传统 PILC 方法进行对比, 仿真结果如图 7 和图 8 所示。

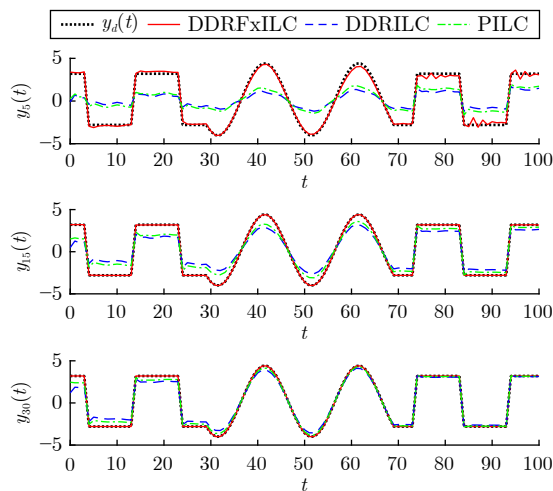


图 7 输出跟踪性能对比

Fig.7 Comparison of output tracking performance

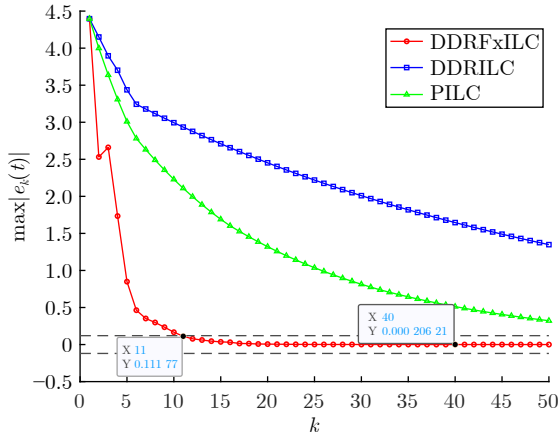
图 8 最大跟踪误差 $\max |e_k(t)|$ 的变化曲线Fig.8 Variation curve of the maximum tracking error $\max |e_k(t)|$

图 7 展示了三种控制方法在不同迭代次数下的输出跟踪性能, 其中本文方法在第 5 次迭代时已经基本实现对期望轨迹的跟踪. 图 8 给出了三种方法的最大跟踪误差 $\max |e_k(t)|$ 的变化趋势, 对比可知, 相较于 DDRILC 方法和 PILC 方法, 本文方法具有更快的收敛速度. 由上述对比结果可知, 本文所提出的 DDRFxILC 方法能够在固定迭代次数内收敛到稳态误差带内, 同时在收敛速度和稳态精度方面均优于对比方法, 具有较强的工程适用性.

5 结论

针对一类存在未知参数及外部干扰的离散时变系统, 提出一种具有固定次迭代收敛特性的迭代学习控制方法. 利用双曲正切函数构造迭代轴上的趋近律, 设计了具有干扰补偿的固定次迭代学习控制器, 通过理论分析严格推导出跟踪误差收敛的稳态误差带边界并得到一个与初始误差无关的收敛次数上界. 仿真结果表明, 与现有数据驱动迭代学习方法相比, 本文方法在保持不依赖系统模型优势的同时, 跟踪误差在固定次迭代内即可进入稳态误差带.

参考文献

- Cheng Y, Chen Q, Hu S Y, Ren X M, Yang M Y, He X X. Error-based model-free adaptive performance tuning control with disturbance rejection for discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2025, **72**(12): 14356–14365
- Meng D Y, Zhang J Y. Distributed learning control for heterogeneous linear multi-agent networks. *Automatica*, 2024, **169**: Article No. 111838
- Geng Y, Ruan X E, Yang X, Zhou Q H. Data-based iterative learning control for multiphase batch processes. *Asian Journal of Control*, 2023, **25**(2): 1392–1406
- Shi H H, Chen Q, Hong Y H, Ou X H, He X X. Adaptive fuzzy iterative learning control of constrained systems with arbitrary initial state errors and unknown control gain. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, **22**: 6439–6450
- Chen Qiang, Chen Kai-Jie, Shi Hui-Hui, Sun Ming-Xuan. Error-tracking iterative learning control for robot manipulators with iteration varying lengths. *Acta Automatica Sinica*, 2023, **49**(12): 2594–2604 (陈强, 陈凯杰, 施卉辉, 孙明轩. 机械臂变长度误差跟踪迭代学习控制. *自动化学报*, 2023, **49**(12): 2594–2604)
- Liang M D, Li J M. Data-driven iterative learning security consensus for nonlinear multiagent systems with fading channels and deception attacks. *IEEE Internet of Things Journal*, 2025, **12**(12): 19384–19396
- Wang S Q, Chen Q, Shi H H, Chen P, He X X. Event-triggered data-driven error-tracking learning control: Theory and experiments. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2026, **36**(3): 1167–1180
- Zheng J M, Hou Z S. Data-driven spatial adaptive terminal iterative learning predictive control for automatic stop control of subway train with actuator saturation. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2023, **24**(10): 11453–11465
- Hui Y, Chi R H, Huang B, Hou Z S. Data-driven adaptive iterative learning bipartite consensus for heterogeneous nonlinear cooperation-antagonism networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2022, **34**(11): 8262–8270
- Li S Y, Yang G H. Robust data-driven compensation iterative learning consensus tracking control for MIMO multiagent systems with random packet dropouts. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2024, **54**(11): 6776–6788
- Xiong W J, Xu L, Huang T W, Yu X H, Liu Y H. Finite-iteration tracking of singular coupled systems based on learning control with packet losses. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, **50**(1): 245–255
- Yang R N, Gong Y J, Liu G P. Robust finite-iteration tracking of discrete-time systems in repetitive process setting via ILC scheme. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, **32**(5): 2585–2602
- Bu X H, Yang C H, Lv L L, Liang J Q, Hou Z S. Data-driven point-to-point finite-iteration learning control for a class of nonlinear systems with output saturation. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, **55**(11): 5492–5502
- Chi R H, Liu Z Q, Lin N, Hou Z S, Huang B. Data-driven finite-iteration learning control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2024, **54**(9): 5296–5306
- Yu Qiong-Xia, Hou Yi-Teng, Sun Jun-Jie, Hou Zhong-Sheng. Constrained adaptive finite-iteration learning fault-tolerant control for high-speed train. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2024, **24**(3): 140–150 (余琼霞, 侯怡腾, 孙俊杰, 侯忠生. 高速列车受限自适应有限次迭代学习容错控制. *交通运输系统工程与信息*, 2024, **24**(3): 140–150)
- Liu Z Q, Chi R H, Liu Y, Huang B. Data-driven robust finite-iteration learning control for MIMO nonrepetitive uncertain systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2024, **54**(11): 6307–6318
- Li Z H, Shen D. Finite-iteration learning control for nonlinear systems with parameter uncertainties. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2025, **55**(9): 6409–6422
- Zhu Z Y, Sun M X, He X X. A guaranteed fixed-step convergence approach to discrete sliding mode control of linear disturbed systems. *Information Sciences*, 2024, **678**: Article No. 120978
- Hu S Y, Chen Q, Ren X M, Wang S B. Adaptive predefined-time synchronization and tracking control for multimotor driving servo systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2025, **30**(1): 494–504
- Yuan Yang, Duan Hai-Bin, Wei Chen. Heterogeneous cooperat-

ive fixed-time prescribed performance evolution control for unmanned aerial/surface vehicle. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(5): 1052–1066
(袁洋, 段海滨, 魏晨. 无人机/无人艇异构协同固定时间预设性能演化控制. *自动化学报*, 2025, **51**(5): 1052–1066)

- 21 Liu Z, Zhao Y, Zhang O Y, Chen W L, Wang J H, Gao Y B, et al. A novel faster fixed-time adaptive control for robotic systems with input saturation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2024, **71**(5): 5215–5223



王守勤 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为自适应控制与学习控制.

E-mail: w2609881675@163.com

(**WANG Shou-Qin** Ph.D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of

Technology. Her research interests include adaptive control and learning control.)



陈强 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为自适应控制与学习控制. 本文通信作者.

E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn

(**CHEN Qiang** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology.

His research interests include adaptive control and learning control. Corresponding author of this paper.)



成云 浙江工业大学信息工程学院博士后. 主要研究方向为无模型自适应控制.

E-mail: yuncheng5@zjut.edu.cn

(**CHENG Yun** Postdoctor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology.

His main research interest is model-free adaptive control.)



何熊熊 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为自适应控制与学习控制.

E-mail: hxx@zjut.edu.cn

(**HE Xiong-Xiong** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology.

His research interests include adaptive control and learning control.)