

矩阵权重网络上混杂多智能体系统的随机一致性

妙锁霞^{1,2} 巩勇杰¹ 苏厚胜³

摘要 研究了混杂多智能体系统在矩阵权重网络上的随机一致性问题. 针对此类系统, 提出一种基于采样信息的分布式随机一致性协议, 该协议采用异步成对更新机制, 有效降低了通信与计算需求. 利用期望图理论和随机矩阵稳定性分析, 推出系统达到随机一致性的充分必要条件, 该条件与采样周期和期望拉普拉斯矩阵的零空间有关. 特别地, 当反馈增益相同时, 给出系统达到随机平均一致性的充要条件. 此外, 通过分析误差系统的二阶矩收敛性, 借助马尔科夫不等式, 导出其收敛速度的 ϵ -一致性时间的解析上界. 最后, 数值仿真验证了所提协议的可行性与理论结果的有效性.

关键词 随机一致性; 混杂多智能体系统; 矩阵权重; ϵ -一致性时间; 随机算法

引用格式 妙锁霞, 巩勇杰, 苏厚胜. 矩阵权重网络上混杂多智能体系统的随机一致性. 自动化学报, 2026, 52(6): 1201-1208

DOI 10.16383/j.aas.c250627 **CSTR** 32138.14.j.aas.c250627

Randomized Consensus of Hybrid Multiagent Systems on Matrix-Weighted Networks

MIAO Suo-Xia^{1,2} GONG Yong-Jie¹ SU Hou-Sheng³

Abstract This paper investigates the randomized consensus problem for hybrid multiagent systems on matrix-weighted networks. For such systems, this paper proposes a distributed randomized consensus protocol based on sampled information, which employs an asynchronous pairwise update mechanism to effectively reduce communication and computational demand. By leveraging expected graph theory and stochastic matrix stability analysis, necessary and sufficient conditions are derived for the system to achieve consensus in expectation, which are related to the sampling period and the null space of the expected Laplacian matrix. Specifically, when the feedback gains are identical, necessary and sufficient conditions are provided for achieving randomized average consensus. Furthermore, by analyzing the second-moment convergence of the error system and using Markov's inequality, an analytical upper bound for the ϵ -consensus time is derived to characterize its convergence speed. Finally, numerical simulations validate the feasibility of the proposed protocol and the effectiveness of the theoretical results.

Keywords randomized consensus; hybrid multiagent systems; matrix-weighted; ϵ -consensus time; randomized algorithms

Citation Miao Suo-Xia, Gong Yong-Jie, Su Hou-Sheng. Randomized consensus of hybrid multiagent systems on matrix-weighted networks. *Acta Automatica Sinica*, 2026, 52(6): 1201-1208

多智能体系统由多个具有自主性、协作性与竞

争性的智能体构成. 智能体通过相互交互与协调实现全局目标, 从而为求解复杂分布式问题提供了重要的理论与方法基础. 近几十年来, 多智能体系统的协同控制研究持续受到很多学者的关注^[1-3]. 其中, 一致性问题作为核心研究问题之一, 具有重要的理论意义与工程应用价值, 成为控制领域的研究热点. 目前, 分布式一致性策略已在传感器网络协同^[4]、无人系统编队与协同作战^[5]、分布式数据融合与计算^[6]等场景得到广泛应用.

多智能体系统的动态模型包括离散时间、连续时间、单积分与双积分等形式. 针对同质多智能体系统, 一致性问题已得到广泛研究, 并形成较为成熟的理论体系^[7-8]. 然而, 实际系统中智能体往往存在动态特性差异、参数不确定性与外部扰动, 异质性成为不可忽视的特征. 针对异质多智能体系统的一致性问题, 已有研究提出多种控制协议与算法,

收稿日期 2025-11-13 录用日期 2026-01-30

Manuscript received November 13, 2025; accepted January 30, 2026

国家自然科学基金 (62425602, 62263024, U25B2078, 62561160100), 江西省自然科学基金 (20252BAC240190), 湖北省自然科学基金创新群体项目 (2025AFA027), 江西水利电力大学科研启动基金 (2023kyqd021) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62425602, 62263024, U25B2078, 62561160100), Jiangxi Provincial Natural Science Foundation (20252BAC240190), Natural Science Foundation of Hubei Province of China (2025AFA027), and Scientific Research Startup Foundation Project of Jiangxi University of Water Resources and Electric Power (2023kyqd021)

本文责任编辑 罗彪

Recommended by Associate Editor LUO Biao

1. 江西水利电力大学理学院 南昌 330099 2. 江西水利电力工程大学数学与先进计算重点实验室 南昌 330099 3. 华中科技大学人工智能与自动化学院 武汉 430074

1. School of Science, Jiangxi University of Water Resources and Electric Power, Nanchang 330099 2. Key Laboratory of Engineering Mathematics and Advanced Computing, Jiangxi University of Water Resources and Electric Power, Nanchang 330099 3. School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074

Singh 等^[9] 针对异质高阶积分器, 设计一种基于分布式观测器和去中心化跟踪控制器的最小一致性协议. 混杂作为异质的特殊情况, 其一致性问题也得到一系列研究. Zheng 等^[10] 提出混杂一致性概念并分析单积分混杂多智能体系统的一致性. Su 等^[11] 将其拓展至双积分多智能体系统. 在通信资源受限场景下, 事件触发与自触发控制被提出以降低通信负担^[12-13]. 与此同时, 实际网络中普遍存在随机扰动与通信不确定性, 促使学者们研究随机混杂多智能体系统的协同控制. Teel 等^[14] 描述连续动态、离散跳变与随机扰动的耦合机制, 推动随机混杂多智能体系统控制理论的发展.

需要指出的是, 上述混杂系统的研究主要基于标量权重的网络. 然而, 在实际应用中, 智能体之间往往涉及多维度的状态交互, 标量权重已难以描述其状态耦合关系. 因此, 矩阵权重网络被提出用于刻画多维状态之间的依赖关系. Friedkin 等^[15] 和 Parsegov 等^[16] 将矩阵权重应用于社交网络中观点动力学的建模, 来描述多个观点的逻辑关联, 并分析其收敛行为. 随后, 有关矩阵权重一致性的理论不断发展^[17-18]. Trinh 等^[19] 分析单积分矩阵权重多智能体系统的一致性并给出其达到一致性的充要条件. Miao 等^[20-21] 研究结构平衡与非平衡符号网络上多智能体系统的二分一致性. Su 等^[22] 推出矩阵权重有向网络上多智能体系统的一致性条件. Miao 等^[23] 探讨二阶离散时间矩阵权重网络上多智能体系统一致性. 文献^[24-25] 分别进一步研究矩阵权重网络上的单积分与双积分混杂多智能体系统一致性问题. Le-Phan 等^[26] 研究矩阵权重网络上单积分多智能体系统的随机一致性.

综上, 矩阵权重网络上的多智能体系统取得一系列进展. 然而, 在现实的应用场景中, 如智能电网的分布式频率与电压调节、边缘协同学习以及无人机集群协同, 通信常呈现异步或随机, 多智能体之间的信息存在多维状态耦合, 且系统中往往同时存在连续时间动力学智能体和离散时间动力学智能体. 标量权重网络无法准确描述多维状态耦合关系, 而混杂系统的随机一致性分析在现有文献中主要基于标量权重网络. 基于上述分析, 并受相关文献^[24, 26] 启发, 围绕矩阵权重网络上混杂多智能体系统的随机一致性问题展开研究. 本文主要贡献如下:

1) 设计一种适用于矩阵权重网络上混杂多智能体系统的分布式随机一致性协议, 该协议采用基于采样的异步成对更新机制, 有效降低了通信成本与计算开销.

2) 基于期望图理论和随机矩阵稳定性分析, 推

出系统达到随机一致性的充分必要条件, 其条件不仅与采样周期有关, 而且与期望拉普拉斯矩阵的零空间有关. 并进一步通过二阶矩分析, 导出 ϵ -一致性时间的解析上界, 为量化收敛速度提供了依据.

3) 现有的标量权重和矩阵权重一阶连续时间、离散时间多智能体系统的随机一致性、一阶标量权重混杂多智能体系统的一致性可以视为本文研究内容的特殊情况, 因此更具有一般性.

1 预备知识与问题描述

本节首先介绍文中使用的符号、图论知识和随机分布式协议, 然后给出一阶混杂多智能体系统模型, 并明确所研究的混杂多智能体系统随机一致的定义.

1.1 符号说明

使用的主要符号如表 1 所示.

表 1 符号说明
Table 1 Notations

符号	含义
\mathbf{Z}^+	正整数集
\mathbf{R}^+	正实数集
\mathbf{R}^d	d 维实列向量的集合
I_d	$d \times d$ 单位矩阵
$\mathbf{1}_N$	元素全为 1 的 N 维列向量
$\mathbf{0}$	元素全为 0 的向量
$\mathbf{0}_{d \times d}$	元素全为 0 的矩阵
$\ \cdot\ $	欧几里得范数
\mathcal{I}_M	整数集合 $\{1, \dots, M\}$
$\mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M$	整数集合 $\{M+1, \dots, N\}$
$\mathcal{N}(Q)$	矩阵 Q 的零空间
$\text{range}(Q)$	矩阵 Q 的值域
$\text{diag}\{\cdot\}$	对角矩阵
$\text{blkdiag}\{\cdot\}$	分块对角矩阵
$\lambda_i(E)$	矩阵 E 的第 i 个特征值
\otimes	克罗内克积

1.2 矩阵权重图与期望图

一个有向矩阵权重图可表示为 $\mathcal{G} = (V, E, \mathcal{A})$, 其中, $V = \{1, 2, \dots, N\}$ 为节点集合, 代表 N 个智能体, $E \subseteq V \times V$ 为边集合, $\mathcal{A} = \{A_{ij} \in \mathbf{R}^{d \times d} \mid (i, j) \in E\}$ 为矩阵权重的集合.

$d \geq 1$ 表示每个智能体状态向量的维度, 当 $d = 1$ 时, \mathcal{G} 退化为标量权重图. 如果 $(i, j) \in E$, 表示节点 i 可以向 j 通信, 其权重 A_{ij} 为对称正定或

半正定矩阵. 如果 $(i, j) \notin E$, 则 A_{ij} 为零矩阵. 如果 A_{ij} 是正定 (半正定) 矩阵, 则称边 (i, j) 为正定 (半正定) 边. \mathcal{G} 的矩阵权重邻接矩阵定义为 $A = [A_{ij}]_{i, j=1, \dots, N}$. 令 $D_i = \sum_{j \in V} A_{ij}$ 为节点 i 的度矩阵, $D = \text{blkdiag}\{D_1, \dots, D_N\}$ 表示 \mathcal{G} 的度矩阵. 矩阵权重拉普拉斯矩阵则定义为 $L = D - A \in \mathbf{R}^{Nd \times Nd}$.

对于每个节点 $i \in V$, 关联一组概率 $\{P_{ij}\}_{j=1}^N$, 其中 $P_{ij} \in [0, 1]$ 表示节点 i 选择节点 j 进行信息更新的可能性, 且满足 $\sum_{j=1}^N P_{ij} = 1$. 基于此, 节点 i 和 j 之间的期望矩阵权重定义为 $H_{ij} = \frac{1}{N}(A_{ij}P_{ij} + A_{ji}P_{ji})$. 易知 $H_{ij} = H_{ji} = H_{ij}^T \geq 0$. 因此, 有向图 \mathcal{G} 导出一个对应的无向期望矩阵权重图, 简称为期望图, 记为 $\mathcal{G}^H = (V, E^H, \mathcal{A}^H)$, 其边集合 $E^H = \{(i, j) | H_{ij} \neq \mathbf{0}\}$, 矩阵权重集合 $\mathcal{A}^H = \{H_{ij}\}_{(i, j) \in E^H}$. 期望图 \mathcal{G}^H 的邻接矩阵、度矩阵和拉普拉斯矩阵分别定义为: $A^H = [H_{ij}]_{i, j=1, \dots, N}$, $D^H = \text{blkdiag}\{D_1^H, \dots, D_N^H\}$, 其中 $D_i^H = \sum_{j \in V} H_{ij}$, $L^H = D^H - A^H \in \mathbf{R}^{Nd \times Nd}$. 由于 $H_{ij} = H_{ji} = H_{ij}^T$, \mathcal{G}^H 是一个无向图, 且其邻接矩阵 A^H 和拉普拉斯矩阵 L^H 均为对称矩阵. 在期望图 \mathcal{G}^H 中, 若一条节点序列 $\mathcal{P} = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ 满足对任意 $k = 1, \dots, l-1$, 边 (i_k, i_{k+1}) 的矩阵权重 $H_{i_k i_{k+1}}$ 为正定, 即 $H_{i_k i_{k+1}} > \mathbf{0}$, 则称 \mathcal{P} 为一条正路径. 若一个连通无环子图 \mathcal{T}^H 包含 \mathcal{G}^H 的所有 N 个节点, 且其每条边的矩阵权重均为正定, 则称 \mathcal{T}^H 为 \mathcal{G}^H 的一棵正生成树.

1.3 随机分布式协议

本节定义所使用的随机协议. 混杂多智能体系统的随机性由随机过程 $\gamma(k) \in V$ 决定, 其中, $k \in \mathbf{Z}^+$ 称为时刻. 在时刻 k , $\gamma(k) = i$ 表示智能体 i 被唤醒, 随后它将以概率 P_{ij} 选择一个节点 j 进行通信, 并且两个智能体 i 和 j 同时更新它们的状态值. 假设 $\gamma(k)$ 是一个独立同分布过程, 且在 V 上服从均匀分布, 其概率分布为

$$P(\gamma(k) = i) = \frac{1}{N}, \quad \forall i \in V \quad (1)$$

1.4 问题描述

考虑一个由 N 个智能体所构成的一阶矩阵权重混杂多智能体系统, 该系统包含 M 个连续时间动态智能体与 $N - M$ 个离散时间动态智能体, 其中 M 满足 $0 \leq M \leq N$. 不失一般性, 将 M 个连续时间动态智能体标记为 1 至 M , 其余为离散时间动态智能体. 连续时间动态智能体与离散时间动态智能体分别表示为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_i(t) = \bar{\mathbf{u}}_i(t), & i \in \mathcal{I}_M \\ \bar{\mathbf{x}}_i(t_{k+1}) = \bar{\mathbf{x}}_i(t_k) + \bar{\mathbf{u}}_i(t_k), & i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M \end{cases} \quad (2)$$

其中, $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, \dots$, $\tau = t_{k+1} - t_k > 0$. $\bar{\mathbf{x}}_i(\cdot) \in \mathbf{R}^d$ 表示智能体 i 的状态向量, $\bar{\mathbf{u}}_i(\cdot) \in \mathbf{R}^d$ 表示智能体 i 的控制输入, 其中, “ \cdot ”表示 t (当 $i \in \mathcal{I}_M$) 或 t_k (当 $i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M$). 令 $\bar{\mathbf{x}}_i(0) = \bar{\mathbf{x}}_{i0}$ 为智能体 i 的初始状态, 该系统 (2) 的初始状态向量记为 $\bar{\mathbf{x}}(0) = [\bar{\mathbf{x}}_{10}^T, \bar{\mathbf{x}}_{20}^T, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{N0}^T]^T$.

定义 1. 若对于任意初始条件, 下列条件均成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)\|] = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_N \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_j(t)\|] = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_M \quad (4)$$

则称矩阵权重混杂多智能体系统 (2) 达到随机一致.

2 主要结果

首先推导出混杂多智能体系统的期望形式, 并给出期望系统达到随机一致与随机平均一致的充分必要条件, 然后分析期望系统的收敛速度, 通过引入 ϵ -一致性时间, 推出期望系统 ϵ -一致性时间的一个解析上界.

2.1 混杂随机一致性

首先, 为系统 (2) 设计混杂随机一致性协议, 该协议基于第 1.3 节的随机唤醒机制, 在任意时刻 t_k , 一个智能体 i 被唤醒并选择一个邻居 j 进行通信. 此时, i 和 j 为激活智能体, 其控制输入 $\bar{\mathbf{u}}(\cdot)$ 定义为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{u}}_i(t) = -k_i A_{ij}(\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)), & t \in (t_k, t_{k+1}], \\ & i \in \mathcal{I}_M \\ \bar{\mathbf{u}}_i(t_k) = -k_i \tau A_{ij}(\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)), & i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M \\ \bar{\mathbf{u}}_j(t) = -k_j A_{ij}(\bar{\mathbf{x}}_j(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_i(t_k)), & t \in (t_k, t_{k+1}], \\ & j \in \mathcal{I}_M \\ \bar{\mathbf{u}}_j(t_k) = -k_j \tau A_{ij}(\bar{\mathbf{x}}_j(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_i(t_k)), & j \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M \end{cases} \quad (5)$$

其中, $k_i > 0$ 为待设计的反馈增益. 所有未被激活的智能体 $l \notin \{i, j\}$, 其控制输入 $\bar{\mathbf{u}}_l(\cdot) = \mathbf{0}$.

将该控制律 (5) 代入系统 (2), 可得激活智能体 i 在该时刻内的状态演化:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_i(t) = \bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - k_i(t - t_k)A_{ij}(\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)), \\ & t \in (t_k, t_{k+1}], \quad i \in \mathcal{I}_M \\ \bar{\mathbf{x}}_i(t_{k+1}) = \bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - k_i \tau A_{ij}(\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)), \\ & i \in \mathcal{I}_N \setminus \mathcal{I}_M \end{cases} \quad (6)$$

$\bar{\mathbf{x}}_i(\cdot)$ 的演化同理.

为分析该系统在采样时刻的演化, 令 $t = t_{k+1}$, 代入式 (6) 得

$$\bar{\mathbf{x}}_i(t_{k+1}) = \bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - k_i\tau A_{ij}(\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)), \quad i \in \mathcal{I}_N$$

令 $\bar{\mathbf{x}}(t_k) = [\bar{\mathbf{x}}_1^T(t_k), \dots, \bar{\mathbf{x}}_N^T(t_k)]^T \in \mathbf{R}^{dN}$. 当智能体 i 唤醒并选择 j 时, 整个多智能体系统可以写为

$$\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1}) = W_{ij}\bar{\mathbf{x}}(t_k)$$

其中

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} I_d & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & I_d - k_i\tau A_{ij} & \cdots & k_i\tau A_{ij} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & k_j\tau A_{ij} & \cdots & I_d - k_j\tau A_{ij} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & \mathbf{0}_{d \times d} & \cdots & I_d \end{bmatrix}$$

因此, 在第 k 个随机时刻, 可以推出

$$\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1}) = W(k)\bar{\mathbf{x}}(t_k) \quad (7)$$

其中, $W(k)$ 是一个随机矩阵, 从集合 $\{W_{ij}|i, j \in V\}$ 中独立同分布地抽取. 根据式 (1), 智能体 i 被唤醒的概率为 $P(\gamma(k) = i) = 1/N$, 且 i 选择 j 的概率为 P_{ij} . 因此, $W(k)$ 取特定值 W_{ij} 的概率为 $P(W(k) = W_{ij}) = \frac{1}{N}P_{ij}$. $W(k)$ 的期望矩阵 \bar{W} 为

$$\bar{W} = \mathbb{E}[W(k)] = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \frac{1}{N} P_{ij} W_{ij}$$

\bar{W} 的分块项确定如下:

1) 若 $i = j$, 则

$$\bar{W}(i, i) = \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{j \in V} (P_{ij} + P_{ji})\right) I_d +$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j \in V} (P_{ij}(I_d - k_i\tau A_{ij}) +$$

$$P_{ji}(I_d - k_i\tau A_{ji})) =$$

$$I_d - k_i\tau \frac{1}{N} \sum_{j \in V} (P_{ij}A_{ij} + P_{ji}A_{ji}) =$$

$$I_d - k_i\tau \sum_{j \in V} H_{ij}$$

2) 若 $i \neq j$, 则

$$\bar{W}(i, j) = \frac{k_i\tau}{N} (P_{ij}A_{ij} + P_{ji}A_{ji}) = k_i\tau H_{ij}$$

因此, 期望系统 $\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1}) = \bar{W}\bar{\mathbf{x}}(t_k)$ 的状态转移矩阵 \bar{W} 等价于

$$\bar{W} = I_{Nd} - C(D^H - A^H) = I_{Nd} - CL^H$$

其中, $C = \text{blkdiag}\{k_1\tau I_d, \dots, k_N\tau I_d\}$.

在所设计的混杂随机一致性协议 (5) 下, 原混杂多智能体系统 (2) 被转换为期望系统. 为了研究期望系统的稳定性, 矩阵 \bar{W} 的性质被刻画如下.

引理 1^[24]. 假设采样周期 τ 满足 $0 < \tau < \min_{i \in V} (\|k_i \sum_{j \in V} H_{ij}\|^{-1})$, 那么矩阵 $\bar{W} = I_{Nd} - CL^H$ 满足以下性质:

1) 其谱半径满足 $\rho(\bar{W}) = 1$, 并且对任意 $\mathbf{p} \in \mathcal{N}(L^H)$, 均有 $\bar{W}\mathbf{p} = \mathbf{p}$.

2) 特征值 1 的几何重数等于其代数重数.

在引理 1 下, 给出主要结果.

定理 1. 假设采样周期 τ 满足 $0 < \tau < \min_{i \in V} (\|k_i \sum_{j \in V} H_{ij}\|^{-1})$, 对于任意初始状态向量 $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathbf{R}^{Nd}$, 系统 (2) 在随机一致协议 (5) 下达到混杂随机一致当且仅当 $\mathcal{N}(L^H) = \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$.

证明. 结合引理 1, 设 $Q = [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_{Nd}]$ 为 \bar{W} 的右特征向量矩阵, 设 Q^{-1} 的第 i 行为 \bar{W} 左特征向量 \mathbf{w}_i^T ($\mathbf{w}_i \in \mathbf{R}^{Nd}$), 即 $Q^{-1} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{Nd}]^T$. 不失一般性, 令 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{m_1}$ 和 $\mathbf{w}_1^T, \dots, \mathbf{w}_{m_1}^T$ 是对应 \bar{W} 特征值 1 的右、左特征向量, 其中 m_1 是特征值 1 的代数重数. 则 \bar{W} 的 Jordan 标准型可以写为

$$\bar{W} = QJQ^{-1}$$

其中, $J = \text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, J_{m_2}, \dots, J_{m_s}\} \in \mathbf{R}^{Nd \times Nd}$,

$J_{m_i} \in \mathbf{R}^{m_i \times m_i}$, $i = 2, \dots, s$, $\sum_{i=1}^s m_i = Nd$, 且 J_{m_i} 对应的特征值的模长均严格小于 1, 因此

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{W}^k &= \lim_{k \rightarrow \infty} (QJQ^{-1})^k = Q \left(\lim_{k \rightarrow \infty} J^k \right) Q^{-1} = \\ &= Q \text{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, 0, \dots, 0\} Q^{-1} = \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \mathbf{q}_i \mathbf{w}_i^T \end{aligned} \quad (8)$$

所以, 可以得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{\mathbf{x}}(t_k)] = \left(\sum_{i=1}^{m_1} \mathbf{q}_i \mathbf{w}_i^T \right) \bar{\mathbf{x}}(0) \quad (9)$$

1) 充分性. 因为 $\mathcal{N}(L^H) = \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$, 所以, $m_1 = d$. 不失一般性, 可以选择对应于特征值 1 的右特征向量为 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_d$, 使得 $[\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_d] = \mathbf{1}_N \otimes I_d$. 将此代入式 (9), 结合式 (8) 可得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{\mathbf{x}}(t_k)] \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{W}^k \bar{\mathbf{x}}(0) &= \\ \left(\sum_{i=1}^{m_1} \mathbf{q}_i \mathbf{w}_i^T \right) \bar{\mathbf{x}}(0) &= \\ \left(\sum_{i=1}^d \mathbf{q}_i \mathbf{w}_i^T \right) \bar{\mathbf{x}}(0) &= \\ (\mathbf{1}_N \otimes I_d) [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d]^T \bar{\mathbf{x}}(0) &= \\ (\mathbf{1}_N \otimes I_d) \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d]^T \bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathbf{R}^d$ 是一个常向量. 因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)\|] = 0$, 对所有 $i, j \in \mathcal{I}_N$ 都成立, 即式 (3) 成立.

接下来, 证明连续智能体达到随机一致. 结合式 (6) 得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_i(t_k)\|] &= \\ \mathbb{E}[\| -k_i(t-t_k) A_{ij} (\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)) \|] &\leq \\ \mathbb{E}[k_i \tau \|A_{ij}\| \|\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)\|] &\leq \\ k_i \tau \max_{(i,j)} \|A_{ij}\| \cdot \mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)\|] \end{aligned}$$

由于所有参数有界, 所以 $\mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_i(t_k)\|] = 0$. 又因为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_j(t)\|] &\leq \\ \mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_i(t_k)\|] &+ \\ \mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t_k)\|] &+ \\ \mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_j(t_k) - \bar{\mathbf{x}}_j(t)\|], \quad t \in (t_k, t_{k+1}] \end{aligned}$$

因此, 可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|\bar{\mathbf{x}}_i(t) - \bar{\mathbf{x}}_j(t)\|] = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_M$$

2) 必要性. 假设 $\mathcal{N}(L^H) \neq \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$. 由于 $\text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\} \subseteq \mathcal{N}(L^H)$, 这必然意味着 $m_1 > d$. 既然 $m_1 > d$, 可以从 $\mathcal{N}(L^H)$ 的基 $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{m_1}\}$ 中选择至少一个向量, 不妨设为 \mathbf{q}_{d+1} , 使得 $\mathbf{q}_{d+1} \notin \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$. 现在, 考虑选择初始状态为 $\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{q}_{d+1}$. 根据式 (9) 和特征向量的双正交性, 期望系统的极限期望状态为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\bar{\mathbf{x}}(t_k)] = \left(\sum_{i=1}^{m_1} \mathbf{q}_i \mathbf{w}_i^T \right) \mathbf{q}_{d+1} = \mathbf{q}_{d+1}$$

然而, 选择的 \mathbf{q}_{d+1} 并不属于 $\text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$. 这与系统达到混杂随机一致的条件即极限期望状态必须在 $\text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$ 内相矛盾. 所以 $\mathcal{N}(L^H) = \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$. \square

注 1. 在连续时间子系统分析中采用采样数据控制方法来研究该矩阵权重混杂系统 (2), 此方法

易于实现, 并可以节省通信与计算资源.

注 2. 采样周期 τ 与期望矩阵权重以及反馈增益 k_i 相关, 是一个重要参数. 当期望矩阵权重确定时, 可通过调整 k_i 来控制 τ 的范围. 从定理 1 的推导过程可知, 在满足 $0 < \tau < \min_{i \in V} (\|k_i \sum_{j \in V} H_{ij}\|^{-1})$ 的前提下, 较大的采样周期 τ 可能有助于加速系统 (2) 的收敛. 然而, 若采样周期 τ 超出此阈值, 则期望系统可能不稳定.

注 3. 若期望图 \mathcal{G}^H 的拓扑结构满足 $\mathcal{N}(L^H) = \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$, 那么不论反馈增益 k_i 如何, 只要采样周期 τ 取得足够小, 该矩阵权重混杂系统 (2) 就能达到混杂随机一致.

注 4. 由于反馈增益 k_i 可能不同, 即使系统 (2) 达到混杂随机一致, 也不一定达到混杂随机平均一致.

推论 1. 假设采样周期 $0 < \tau < \min_{i \in V} (\|k_i \times \sum_{j \in V} H_{ij}\|^{-1})$. 若期望图 \mathcal{G}^H 包含一个正生成树, 则对于任意初始状态向量 $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathbf{R}^{Nd}$, 在随机一致性协议 (5) 作用下, 系统 (2) 达到混杂随机一致.

注 5. 与定理 1 相比, 推论 1 为系统 (2) 达到混杂随机一致提供了一个相对直观的充分条件.

特别地, 假设所有智能体的反馈增益相同, 即 $k_i = k$ 对所有 $i \in V$ 成立. 此时, 期望矩阵 \bar{W} 可重写为

$$\bar{W} = I_{Nd} - k\tau L^H$$

由于 L^H 是对称的, 此时 \bar{W} 也是对称矩阵. 并且, $\frac{1}{\sqrt{N}}(\mathbf{1}_N \otimes I_d)$ 的每一列都可以选作 \bar{W} 对应于特征值 1 的左特征向量. 因此, 可得如下定理.

定理 2. 假设所有智能体使用相同的反馈增益 $k_i = k > 0$, 且采样周期 τ 满足 $0 < \tau < \min_{i \in V} \|k_i \times \sum_{j \in V} H_{ij}\|^{-1}$. 对于任意初始状态向量 $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathbf{R}^{Nd}$, 在随机一致性协议 (5) 作用下, 系统 (2) 达到混杂随机平均一致, 一致值为 $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{N}(\mathbf{1}_N^T \otimes I_d) \bar{\mathbf{x}}(0)$ 当且仅当 $\mathcal{N}(L^H) = \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$.

由于其证明过程与定理 1 的证明类似, 故此处略.

2.2 ϵ -一致性时间

第 2.1 节分析了混杂多智能体系统达到一致的条件. 然而, 仅有定性的收敛性结论在工程应用中是不够的, 收敛速度是衡量算法性能的另一个关键指标. 为定量刻画该混杂多智能体系统的收敛快慢, 本节引入 ϵ -一致性时间的概念.

定义 2 (ϵ -一致性时间). 对于任意 $0 < \epsilon < 1$, ϵ -一致性时间定义为

$$T(\epsilon) = \sup_{\bar{\mathbf{x}}(0)} \inf \left\{ \geq 0 : P \left(\frac{\|\bar{\mathbf{x}}(\cdot) - \mathbf{1}_N \otimes \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\bar{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{1}_N \otimes \hat{\mathbf{x}}\|} \geq \epsilon \right) \leq \epsilon \right\}$$

直观而言, $T(\epsilon)$ 表示 $\bar{\mathbf{x}}(\cdot)$ 以高概率收敛到一致值所需的时间. 值得注意的是, ϵ 同时度量系统 (2) 达到混杂随机一致的精度和概率.

定义误差向量 $\bar{\mathbf{y}}_i(t_k) = \bar{\mathbf{x}}_i(t_k) - \hat{\mathbf{x}}$, 则 $\bar{\mathbf{y}}(t_k) = \bar{\mathbf{x}}(t_k) - \mathbf{1}_N \otimes \hat{\mathbf{x}}$, 可得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}(t_{k+1}) &= \bar{\mathbf{x}}(t_{k+1}) - \mathbf{1}_N \otimes \hat{\mathbf{x}} = \\ &= W(k)\bar{\mathbf{x}}(t_k) - W(k)(\mathbf{1}_N \otimes I_d)\hat{\mathbf{x}} = \\ &= W(k)(\bar{\mathbf{x}}(t_k) - (\mathbf{1}_N \otimes I_d)\hat{\mathbf{x}}) = \\ &= W(k)\bar{\mathbf{y}}(t_k) \end{aligned} \quad (10)$$

因此, 误差向量 $\bar{\mathbf{y}}(t_k)$ 与状态向量 $\bar{\mathbf{x}}(t_k)$ 具有相同的线性系统. 从式 (10), 可得

$$\mathbf{E}[\bar{\mathbf{y}}^T(t_{k+1})\bar{\mathbf{y}}(t_{k+1})] = \bar{\mathbf{y}}^T(t_k)\mathbf{E}[W^T(k)W(k)]\bar{\mathbf{y}}(t_k) \quad (11)$$

与 $W(k)$ 类似, 可将 $W^T(k)W(k)$ 视为一个随机变量, 其从集合 $\{W_{ij}^T W_{ij}\}$ 上的某个分布中独立同分布地抽取.

下面给出随机平均一致性算法的 ϵ -一致性时间的上界公式. 首先, 需要说明一致性误差向量的二阶矩的收敛性.

引理 2^[26]. 假设所有智能体采用相同的反馈增益 $k_i = k > 0$,

$$\tau k < \min \left(\frac{1}{\max_{i \in V} \lambda_{\max}(D_i^H)}, \frac{1}{\max_{i, j \in V} \lambda_{\max}(A_{ij})} \right)$$

则以下结论成立:

1) 特征值均在 $[0, 1]$ 区间内的所有实对称矩阵构成的集合是凸集. 每个可能的矩阵 $W_{ij}^T W_{ij}$ 均属于此集合.

2) $\mathbf{E}[W^T(k)W(k)]$ 的谱半径为 1, 且其对应于谱半径 1 的特征值的几何重数等于代数重数.

3) $\mathbf{1}_N \otimes I_d$ 的列向量构成 $\mathbf{E}[W^T(k)W(k)]$ 对应于特征值 $\lambda = 1$ 的 d 个正交右特征向量当且仅当 $\mathcal{N}(L^H) = \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$.

根据引理 2 的结论 3), 当 $\mathcal{N}(L^H) = \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$ 时, $\mathbf{E}[W^T(k)W(k)]$ 对应于特征值 1 的特征空间恰好由 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\} = \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$ 张成. 由于 $\bar{\mathbf{y}}(t_k) = \bar{\mathbf{x}}(t_k) - \mathbf{1}_N \otimes \hat{\mathbf{x}}$, 易知 $\bar{\mathbf{y}}(t_k)$ 与该特征空间正交, 即 $\bar{\mathbf{y}}(t_k) \perp \text{range}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$. 运用 Rayleigh-Ritz 定理得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}^T(t_k)\mathbf{E}[W^T(k)W(k)]\bar{\mathbf{y}}(t_k) &\leq \\ \lambda_{d+1}(\mathbf{E}[W^T(k)W(k)])\bar{\mathbf{y}}^T(t_k)\bar{\mathbf{y}}(t_k) \end{aligned}$$

其中, λ_{d+1} 是 $\mathbf{E}[W^T(k)W(k)]$ 的第二大特征值. 结合式 (11) 有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\bar{\mathbf{y}}^T(t_k)\bar{\mathbf{y}}(t_k)] &\leq \\ \lambda_{d+1}^k(\mathbf{E}[W^T(k)W(k)])\bar{\mathbf{y}}^T(0)\bar{\mathbf{y}}(0) \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) 保证误差二阶矩的收敛性. 下面给出关于混杂随机平均一致性及其收敛速度 ϵ -一致性时间的定理.

定理 3. 假设所有智能体采用相同的反馈增益 $k_i = k > 0$, 且等效更新步长 τk 满足

$$\tau k < \min \left(\frac{1}{\max_{i \in V} \lambda_{\max}(D_i^H)}, \frac{1}{\max_{i, j \in V} \lambda_{\max}(A_{ij})} \right)$$

对于任意初始状态向量 $\bar{\mathbf{x}}(0)$, 系统 (7) 的解 $\bar{\mathbf{x}}(\cdot)$ 依概率收敛至 $\bar{\mathbf{x}}^* = \frac{1}{N}(\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \otimes I_d)\bar{\mathbf{x}}(0)$ 当且仅当 $\mathcal{N}(L^H) = \text{range}\{\mathbf{1}_N \otimes I_d\}$. 另外 ϵ -一致性时间 $T(\epsilon)$ 满足如下上界:

$$T(\epsilon) \leq T_{\text{up}}(\epsilon) = \frac{\tau(3 \log(\epsilon^{-1}) + 2 \log(K_c))}{\log(\lambda_{d+1}^{-1})}$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_{d+1} &= \lambda_{d+1}(\mathbf{E}[W^T(k)W(k)]) \\ K_c &= 1 + 2\tau k \max_{(i, j)}(\|A_{ij}\|) \end{aligned}$$

证明. 首先分析连续时间 $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 上的收敛时间, 然后分析离散时刻 t_k 的收敛时间, 最后比较两者大小.

目标约束混杂轨迹在任意时刻 $t \geq 0$ 的概率 $P(\frac{\|\bar{\mathbf{y}}(t)\|}{\|\bar{\mathbf{y}}(0)\|} \geq \epsilon)$. 当 $t \in (t_k, t_{k+1}]$, 对于任意 $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $\bar{\mathbf{y}}(t)$ 满足

$$\|\bar{\mathbf{y}}(t)\| \leq \|\bar{\mathbf{y}}(t_k)\| + \|\bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t_k)\|$$

通过分析协议 (5) 下连续动态在 τ 时间内的最大偏离量, 可约束为

$$\|\bar{\mathbf{y}}(t)\| \leq K_c \|\bar{\mathbf{y}}(t_k)\|$$

其中, $K_c = 1 + 2\tau k \max_{(i, j)}(\|A_{ij}\|)$ 是一个大于 1 的常数.

应用马尔科夫不等式, 可得

$$\begin{aligned} P \left(\frac{\|\bar{\mathbf{y}}(t)\|}{\|\bar{\mathbf{y}}(0)\|} \geq \epsilon \right) &\leq P(K_c \|\bar{\mathbf{y}}(t_k)\| \geq \epsilon \|\bar{\mathbf{y}}(0)\|) = \\ &P \left(\|\bar{\mathbf{y}}(t_k)\|^2 \geq \left(\frac{\epsilon}{K_c} \right)^2 \|\bar{\mathbf{y}}(0)\|^2 \right) \leq \\ &\frac{\mathbf{E}[\|\bar{\mathbf{y}}(t_k)\|^2]}{\left(\frac{\epsilon}{K_c} \right)^2 \|\bar{\mathbf{y}}(0)\|^2} \leq \\ &\frac{\lambda_{d+1}^k \|\bar{\mathbf{y}}(0)\|^2}{\left(\frac{\epsilon}{K_c} \right)^2 \|\bar{\mathbf{y}}(0)\|^2} = \frac{K_c^2}{\epsilon^2} \lambda_{d+1}^k \end{aligned}$$

要求 $P(\frac{\|\bar{y}(t)\|}{\|\bar{y}(0)\|} \geq \epsilon) < \epsilon$ 的上界小于 ϵ , 得

$$k \geq \frac{3 \log(\epsilon^{-1}) + 2 \log(K_c)}{\log(\lambda_{d+1}^{-1})}$$

所得 k 对应的时间上界 $T_{\text{up}}(\epsilon)$ 即为定理 3 中的一致性时间上界.

同理, 仅分析系统在采样时刻 t_k 达到收敛所需的迭代次数 k 的上界. 这等价于在上述推导中令 $K_c = 1$, 可得最小迭代次数 k 满足

$$k \geq \frac{3 \log(\epsilon^{-1})}{\log(\lambda_{d+1}^{-1})}$$

因此, 离散时间子系统的 ϵ -一致性时间上界 $T_{\text{up, dis}}(\epsilon)$ 为

$$T_{\text{up, dis}}(\epsilon) = \frac{\tau (3 \log(\epsilon^{-1}))}{\log(\lambda_{d+1}^{-1})}$$

ϵ -一致性时间的定义 (2) 要求上界对所有时刻 $t \geq 0$ 均成立. 显然 $T_{\text{up}}(\epsilon) \geq T_{\text{up, dis}}(\epsilon)$. 因此, ϵ -一致性时间上界由 $T_{\text{up}}(\epsilon)$ 给出. \square

3 数值仿真

本节考虑一个由 6 个智能体构成的矩阵权重上的混杂多智能体系统, 其状态维度 $d = 2$. 该系统中智能体 1 至 3 为连续时间动态智能体, 智能体 4 至 6 为离散时间动态智能体.

6 个智能体的初始状态和矩阵权重分别给定为

$$\bar{x}_1(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_2(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_3(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_4(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_5(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_6(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = A_{56} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{15} = A_{24} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{45} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{46} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其他未列出的 A_{ij} 均为零矩阵.

可以计算出 $\mathcal{N}(L^H) = \text{range}\{\mathbf{1}_6 \otimes I_2\}$. 令反馈增益 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1/2$ 以及 $k_5 = k_6 = 1/3$. 选取采样周期 $\tau = 0.35$. 此参数满足定理 1 所要求的稳定性条件 $0 < \tau < \min_{i \in V} (\|k_i \sum_{j \in V} H_{ij}\|^{-1})$. 仿真结果如图 1 所示, 6 个智能体成功实现随机混杂一致性. 所有参数保持不变, 取 $\tau = 0.85$. 此时, 稳定性条件已不再满足. 仿真结果如图 2 所示, 所有智能体的状态轨迹均未收敛. 这与定理 1 的理论结论相符.

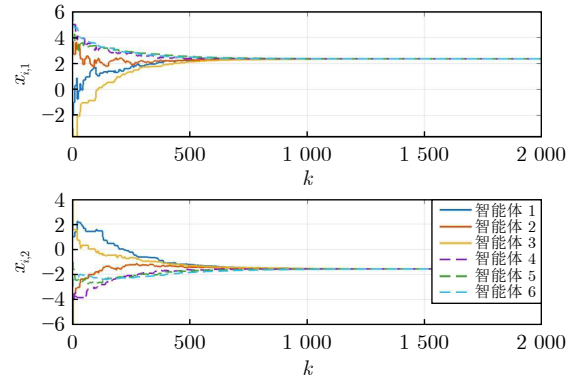


图 1 采样周期 $\tau = 0.35$ 下的状态轨迹

Fig. 1 State trajectory under sampling period $\tau = 0.35$

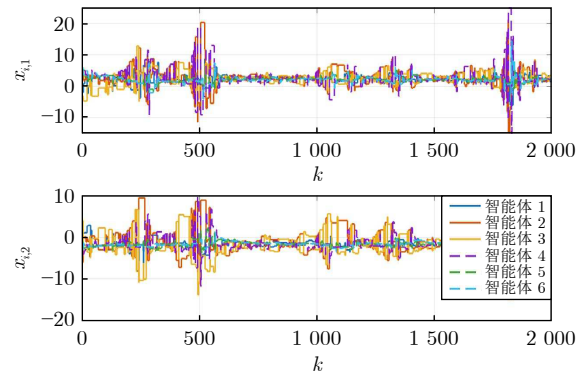


图 2 采样周期 $\tau = 0.85$ 下的状态轨迹

Fig. 2 State trajectory under sampling period $\tau = 0.85$

4 结束语

本文针对矩阵权重网络上混杂多智能体系统的随机一致性问题展开研究, 设计一种基于异步成对更新机制的分布式随机一致性协议, 有效降低了系统在多维度耦合、混杂动态和随机通信下的通信与计算负担. 基于期望图理论和随机矩阵稳定性分析, 严格推出了系统达到混杂随机一致性的充分必要条件, 并在此基础上, 给出系统的 ϵ -一致性时间的解析上界, 为量化算法的收敛速度提供理论依据. 最后, 通过实验仿真验证了所获理论结果的正确性. 未来, 可考虑将研究成果推广至二阶或高阶混杂多智能体系统. 此外, 在当前矩阵权重网络上, 进一步研究非周期采样、通信时滞、数据丢包以及信道噪声等非理想因素对一致性和一致性时间的影响.

参考文献

- 1 Mu B, Zhang K, Xiao F, Shi Y. Event-based rendezvous control for a group of robots with asynchronous periodic detection and communication time delays. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(7): 2642-2651
- 2 Duan Zhi-Sheng, Lv Yue-Zu, Duan Pei-Hu, Yang Ying, Wang Jin-Zhi, Wen Guang-Hui. Integrated framework for cooperative mutual estimation and control in multi-agent systems. *Acta*

- Automatica Sinica*, 2025, **51**(10): 2359–2370
(段志生, 吕跃祖, 段培虎, 杨莹, 王金枝, 温光辉. 多智能体系统协同估计与控制一体化框架. *自动化学报*, 2025, **51**(10): 2359–2370)
- 3 Ju Kai, Mao Ze-Hui, Jiang Bin, Ma Ya-Jie. Task allocation and reallocation for heterogeneous multi-agent systems based on potential game. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(10): 2416–2428 (鞠锴, 冒泽慧, 姜斌, 马亚杰. 基于势博弈的异构多智能体系统任务分配和重分配. *自动化学报*, 2022, **48**(10): 2416–2428)
 - 4 You Xiu, Zhang Hong, Liang Ji-Ye. Leader-following consensus for high-order unmatched nonlinear multi-agent systems with communication link faults. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(6): 1320–1328 (游秀, 张红, 梁吉业. 通信链路故障下高阶非匹配非线性 MAS 领导跟随一致性. *自动化学报*, 2025, **51**(6): 1320–1328)
 - 5 Yuan Yang, Duan Hai-Bin, Wei Chen. Heterogeneous cooperative fixed-time prescribed performance evolution control for unmanned aerial/surface vehicles. *Acta Automatica Sinica*, 2025, **51**(5): 1052–1066 (袁洋, 段海滨, 魏晨. 无人机/无人艇异构协同固定时间预设性能演化控制. *自动化学报*, 2025, **51**(5): 1052–1066)
 - 6 Lai Xuan, Qu Yan-Yun, Xie Yuan, Pei Yu-Long. Topology-guided adversarial deep mutual learning for knowledge distillation. *Acta Automatica Sinica*, 2023, **49**(1): 102–110 (赖轩, 曲延云, 谢源, 裴玉龙. 基于拓扑一致性对抗互学习的知识蒸馏. *自动化学报*, 2023, **49**(1): 102–110)
 - 7 Tian Y, Liu C. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(9): 2122–2128
 - 8 Zhu W, Cheng D. Leader-following consensus of second-order agents with multiple time-varying delays. *Automatica*, 2010, **46**(12): 1994–1999
 - 9 Singh B, Sen A, Sahoo S R. Min-consensus for heterogeneous higher-order integrators under switching digraph. *IEEE Control Systems Letters*, 2020, **4**(3): 560–565
 - 10 Zheng Y, Ma J, Wang L. Consensus of hybrid multi-agent systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, **29**(4): 1359–1365
 - 11 Su H, Wang X, Chen X, Zeng Z. Second-order consensus of hybrid multiagent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, **51**(10): 6503–6512
 - 12 Wang X, Su H. Consensus of hybrid multi-agent systems by event-triggered/self-triggered strategy. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, **359**: 490–501
 - 13 Su H, Wang X, Zeng Z. Consensus of second-order hybrid multiagent systems by event-triggered strategy. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, **50**(11): 4648–4657
 - 14 Teel A R, Subbaraman A, Sferlazza A. Stability analysis for stochastic hybrid systems: A survey. *Automatica*, 2014, **50**(10): 2435–2456
 - 15 Friedkin N E, Proskurnikov A V, Tempo R, Parsegov S E. Network science on belief system dynamics under logic constraints. *Science*, 2016, **354**(6310): 321–326
 - 16 Parsegov S E, Proskurnikov A V, Tempo R, Friedkin N E. Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(5): 2270–2285
 - 17 Miao S, Su H. Consensus of different-order switched multi-agent systems on matrix-weighted networks. *Applied Mathematics and Computation*, 2026, **508**: Article No.129610
 - 18 Su H, Chen J, Yang Y, Rong Z. The bipartite consensus for multi-agent systems with matrix-weight-based signed network. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, **67**(10): 2019–2023
 - 19 Trinh M H, van Nguyen C, Lim Y H, Ahn H S. Matrix-weighted consensus and its applications. *Automatica*, 2018, **89**: 415–419
 - 20 Miao S, Su H. Bipartite consensus for second-order multiagent

systems with matrix-weighted signed network. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(12): 13038–13047

- 21 Miao S, Su H. Behaviors of matrix-weighted networks with antagonistic interactions. *Applied Mathematics and Computation*, 2024, **467**: Article No. 128490
- 22 Su H, Miao S. Consensus on directed matrix-weighted networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(4): 2529–2535
- 23 Miao S, Su H, Chen S. Matrix-weighted consensus of second-order discrete-time multi-agent systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2024, **35**(3): 3539–3548
- 24 Miao S, Su H. Consensus of matrix-weighted hybrid multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, **53**(1): 668–678
- 25 Miao S, Su H. Second-order hybrid consensus of multi-agent systems with matrix-weighted networks. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, **9**(6): 4338–4348
- 26 Le-Phan N M, Trinh M H, Nguyen P D. Randomized matrix weighted consensus. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2024, **11**(4): 3536–3549

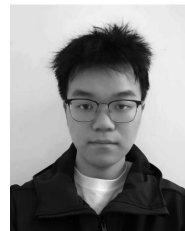


妙锁霞 江西水利电力大学理学院副教授. 主要研究方向为网络化系统一致性控制和优化控制.

E-mail: 2013994439@juwp.edu.cn

(**MIAO Suo-Xia** Associate professor at the School of Science, Jiangxi University of Water Resources and

Electric Power. Her research interests include consensus control and optimal control of networked systems.)



巩勇杰 江西水利电力大学理学院硕士研究生. 主要研究方向为多智能体系统的随机控制.

E-mail: 2024320002@juwp.edu.cn

(**GONG Yong-Jie** Master student at the School of Science, Jiangxi University of Water Resources and

Electric Power. His main research interest is stochastic control of multiagent systems.)



苏厚胜 华中科技大学人工智能与自动化学院教授. 主要研究方向为多智能体系统的协调控制和无人艇集群协同控制. 本文通信作者.

E-mail: shs@hust.edu.cn

(**SU Hou-Sheng** Professor at the School of Artificial Intelligence and

Automation, Huazhong University of Science and Technology. His research interests include coordinated control of multiagent systems and cooperative control of unmanned surface vehicle swarms. Corresponding author of this paper.)