第3卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 3, No. 4
1965年10月 ACTA AUTOMATICA SINICA Oct., 1965

关于常参数綫性系統初始条件的一些注記*

張 洪 鉞

在研究自动调节系统时，通常假定系统在 $t=0$ 时受到一个突然加上的外作用，而系统在 $t=0^-$ 时的初始条件则是给定的．由于外作用函数在 $t=0$ 时发生间断，系统在 $t=0^+$ 和 $t=0^-$ 时的初始条件一般是不相同的．在理论计算和模拟计算时，如果需要决定 $t=0^+$ 时的初始条件可用本文中给出的计算公式，这比[1]、[2]等所用的方法更为普遍和适用．此外，对 0^- 型和 0^+ 型拉氏变换式中的初始条件项也进行了讨论，并指出了[3]中的不确切处．

一、$t=0^+$时初始条件的計算

设系统的微分方程是

$$a_n x^{(n)}(t)+a_{n-1}x^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1x^{(1)}(t)+a_0x(t)=b_mf^{(m)}(t)+ \\ +b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1f^{(1)}(t)+b_0f(t), \tag{1}$$

式中 a_i、b_i 是常数，$a_n\neq 0$，$n\geqslant m$，$f(t)$ 是外作用函数，$f^{(i)}(t)=\dfrac{d^if(t)}{dt^i}$，$x(t)$是系统输出量，$x^{(i)}(t)=\dfrac{d^ix(t)}{dt^i}$.

此外，设 $x(t)$及其头 $n-1$ 个导数在 $t=0^-$ 时的值，即 $x(0^-)$、$x^{(1)}(0^-)$、$\cdots$、$x^{(n-1)}(0^-)$为已知，并令 $x(0^-)=x^{(1)}(0^-)=\cdots x^{(n-1)}(0^-)=0$ 的情况称作"常态初始条件"．我们先讨论 $f(t)=\delta(t)$ 时，系统在 $t=0^+$ 时初始条件的计算，进而讨论更复杂的情况．

1. $f(t)=\delta(t)$ 时

(1) $n>m$: 如所周知，这时式(1)在常态初始条件下的解(脉冲过渡函数)可记作

$$k(t)=x_1(t)\delta^{(-1)}(t), \tag{2}$$

这里，$x_1(t)$ 是 (1) 的齐次方程在满足一组初始条件 $x_1(0)$、$x_1^{(1)}(0)$、$\cdots$、$x_1^{(n-1)}(0)$ 下的解(自由解)，$\delta^{(-1)}(t)$ 则是单位阶跃函数．逐次求出 $k(t)$ 的各阶导数，并注意 $x_1(t)$ 及其任意阶导数的连续性，即有

$$\left.\begin{aligned} &x_1(0^-)=x_1(0)=x_1(0^+)=k(0^+),\\ &x_1^{(1)}(0^-)=x_1^{(1)}(0)=x_1^{(1)}(0^+)=k^{(1)}(0^+),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &x_1^{(n-1)}(0^-)=x_1^{(n-1)}(0)=x_1^{(n-1)}(0^+)=k^{(n-1)}(0^+).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

就可得到如下的求解 $k(t)$ 的非齐次方程

$$a_nk^{(n)}(t)+a_{n-1}k^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1k^{(1)}(t)+a_0k(t)= \\ =a_nk(0^+)\delta^{(n-1)}(t)+[a_nk^{(1)}(0^+)+a_{n-1}k(0^+)]\delta^{(n-2)}(t)+\cdots+ \\ +[a_nk^{(n-1)}(0^+)+a_{n-1}k^{(n-2)}(0^+)+\cdots+a_1k(0^+)]\delta(t). \tag{4}$$

---

* 本文于1964年2月22日收到．1965年5月8日收到修改稿．

相反地，如给定常态初始条件下的解 $k(t)$ 满足下面的非齐次方程

$$a_nk^{(n)}(t) + a_{n-1}k^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1k^{(1)}(t) + a_0k(t) = b_{n-1}\delta^{(n-1)}(t) + \\ + b_{n-2}\delta^{(n-2)}(t) + \cdots + b_1\delta^{(1)}(t) + b_0\delta(t), \tag{5}$$

并令其右端与式(4)右端相同阶脉冲 $\delta^{(i)}(t)$ 前的系数相等，则可得

$$\left.\begin{aligned} a_nk^{(n-1)}(0^+) + a_{n-1}k^{(n-2)}(0^+) + a_{n-2}k^{(n-3)}(0^+) + \cdots + a_2k^{(1)}(0^+) + a_1k(0^+) &= b_0, \\ a_nk^{(n-2)}(0^+) + a_{n-1}k^{(n-3)}(0^+) + \cdots + a_3k^{(1)}(0^+) + a_2k(0^+) &= b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_nk^{(1)}(0^+) + a_{n-1}k(0^+) &= b_{n-2}, \\ a_nk(0^+) &= b_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由于 $\Delta = (a_n)^n \neq 0$，故由式(6)可得出唯一的一组解：$k(0^+)$、$k_1(0^+)$、$\cdots$、$k_{n-1}(0^+)$.

(2) $n = m$：这时式(1)在常态初始条件下的解应写成

$$k(t) = x_1(t)\delta^{(-1)}(t) + c\delta(t), \tag{7}$$

式中 c 是待定常数. 按与前相同步骤，可得出

$$c = \frac{b_n}{a_n}, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} a_nk^{(n-1)}(0^+) + a_{n-1}k^{(n-2)}(0^+) + a_{n-2}k^{(n-3)}(0^+) + \cdots + a_2k^{(1)}(0^+) + a_1k(0^+) &= b_0 - a_0\frac{b_n}{a_n}, \\ a_nk^{(n-2)}(0^+) + a_{n-1}k^{(n-3)}(0^+) + \cdots + a_3k^{(1)}(0^+) + a_2k(0^+) &= b_1 - a_1\frac{b_n}{a_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_nk^{(1)}(0^+) + a_{n-1}k(0^+) &= b_{n-2} - a_{n-2}\frac{b_n}{a_n}, \\ a_nk(0^+) &= b_{n-1} - a_{n-1}\frac{b_n}{a_n}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

当 $m > n$ 时，如 $m = n + i$，可将解 $k(t)$ 写成

$$k(t) = x_1(t)\delta^{(-1)}(t) + c_1\delta(t) + c_2\delta^{(1)}(t) + \cdots + c_{i+1}\delta^{(i)}(t), \tag{10}$$

式中 c_1、c_2、$\cdots$、c_{i+1} 是待定常数，这里不再作讨论.

$$2.\ f^{(i)}(t) = \left[f_c^{(i)}(t) + \sum_{K=1}^{M_i}\Delta_{iK}\delta^{(-1)}(t - t_{iK}) + \sum_{K=1}^{M_{i-1}}\Delta_{i-1,K}\delta(t - t_{i-1,K}) + \right. \\ \left. + \cdots + \sum_{K=1}^{M_0}\Delta_{0K}\delta^{(i-1)}(t - t_{0K})\right]\delta^{(-1)}(t).\quad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{11}$$

这里 $f_c^{(i)}(t)$ 是连续函数，Δ_{iK} 是 $f^{(i)}(t)$ 第一类间断点的跃度，M_i 是正整数（可为零），$i = 0, 1, 2, \cdots, n$. 显然，这里 $f(t)$ 是不包含脉冲函数的.

这时，式(1)在常态初始条件下的解可写成

$$x(t) = \int_{0^-}^{t} k(t - \tau)f(\tau)d\tau. \tag{12}$$

因当 $t < \tau$，$k(t - \tau) = 0$；$\tau < 0$，$f(\tau) = 0$，于是将积分区间扩充后，可得

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t - \tau)f(\tau)d\tau \tag{13}$$

$$x^{(i)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{(i)}k(t-\tau)}{\partial t^{i}}f(\tau)d\tau.\quad(i=1,\cdots,n)\tag{14}$$

为求出系统在 $t=0^+$ 时的初始条件，先证明下面的极限成立

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \eta\to 0}}\underbrace{\int_{\lambda}^{\eta}\cdots\int_{\lambda}^{\eta}}_{q}f(t)(dt)^{q}=\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\cdots\int_{0^-}^{0^+}}_{q}f(t)(dt)^{q}=0,\\ \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \eta\to 0}}\underbrace{\int_{\lambda}^{\eta}\cdots\int_{\lambda}^{\eta}}_{q}x(t)(dt)^{q}=\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\cdots\int_{0^-}^{0^+}}_{q}x(t)(dt)^{q}=0,\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

式中 $\lambda<0$, $\eta>0$, q 为任意正整数.

$f(t)$ 在 $[0,t]$ 区间的有界性可直接从式(11)看出，设在区间 $[0,t]$, $|f(\tau)|\leqslant M_1$, (M_1 是常数)，并令 $\lambda=t-\tau$, 则由式(12)可得

$$|x(t)|\leqslant\int_{0^-}^{t}|f(\tau)k(t-\tau)|d\tau\leqslant M_1\int_{0^-}^{t}|k(\lambda)|d\lambda.\tag{16}$$

注意到 $n\geqslant m$ 时，$k(\lambda)$ 是由式(2)和式(7)所确定，它在有限区间的积分是一个有限值，即

$$\int_{0^-}^{t}|k(\lambda)|d\lambda\leqslant M_2,\ M_2\ \text{是常数}\tag{17}$$

故可得到在 $[0,t]$ 区间

$$|x(t)|\leqslant M,\quad M=M_1M_2.\tag{18}$$

又因

$$\left|\underbrace{\int_{\lambda}^{\eta}\cdots\int_{\lambda}^{\eta}}_{q}x(t)(dt)^{q}\right|\leqslant M(\eta-\lambda)^{q}\tag{19}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 总可找到一个 $\delta>0$, 例如 $\delta=\frac{1}{M}\varepsilon^{\frac{1}{q}}$, 使当 $(\eta-\lambda)<\delta$ 时，有

$$\left|\underbrace{\int_{\lambda}^{\eta}\cdots\int_{\lambda}^{\eta}}_{q}x(t)(dt)^{q}\right|<\varepsilon$$

故至此证毕. 同理，也可证明式(15)中第一式成立.

现对方程(1)左右两端从 $t=0^-$ 到 $t=0^+$ 进行积分. 为方便起见，将式(1)右端写到 n 阶. 对式(1)积分一次，并考虑到 $x(t)$、$f(t)$ 和它们的各阶导数在有限区间的积分是存在的，于是可得

$$a_n[x^{(n-1)}(t)]_{0^-}^{0^+}+a_{n-1}[x^{(n-2)}(t)]_{0^-}^{0^+}+\cdots+a_1[x(t)]_{0^-}^{0^+}+a_0\int_{0^-}^{0^+}x(t)dt=$$
$$=b_n[f^{(n-1)}(t)]_{0^-}^{0^+}+b_{n-1}[f^{(n-2)}(t)]_{0^-}^{0^+}+\cdots+b_1[f(t)]_{0^-}^{0^+}+b_0\int_{0^-}^{0^+}f(t)dt,$$

注意到式(15)和 $t<0$ 时 $f(t)\equiv 0$, 并设系统在常态初始条件下，则上式就可化成

$$a_nx^{(n-1)}(0^+)+a_{n-1}x^{(n-2)}(0^+)+\cdots+a_1x(0^+)=b_nf^{(n-1)}(0^+)+\cdots+b_1f(0^+).$$

用类似方法积分式(1)由 1 至 n 次，可得

$$\left.\begin{aligned}a_nx^{(n-1)}(0^+)+a_{n-1}x^{(n-2)}(0^+)+\cdots+a_1x(0^+)&=b_nf^{(n-1)}(0^+)+\cdots+b_1f(0^+),\\ a_nx^{(n-2)}(0^+)+\cdots+a_2x(0^+)&=b_nf^{(n-2)}(0^+)+\cdots+b_2f(0^+),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_nx^{(1)}(0^+)+a_{n-1}x(0^+)&=b_nf^{(1)}(0^+)+b_{n-1}f(0^+),\\ a_nx(0^+)&=b_nf(0^+).\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

由式(20)即可解出 $x(0^+)$、$x^{(1)}(0^+)$、$\cdots$、$x^{(n-1)}(0^+)$.

二、微分方程拉氏变换式中初始条件项的討論

下面采用两种拉氏变换：

$$0^+\text{ 型拉氏变换——}F_+(S)=\int_{0^+}^{\infty}f(t)e^{-St}dt, \tag{21}$$

$$0^-\text{ 型拉氏变换——}F_-(S)=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-St}dt, \tag{22}$$

而

$$F_-(S)=F_+(S)+\int_{0^-}^{0^+}f(t)e^{-St}dt. \tag{23}$$

从上式可见 $F_-(S)$ 与 $F_+(S)$ 的差别仅在 $\int_{0^-}^{0^+}f(t)e^{-St}dt$ 这一项. 现分二种情况讨论如下：

1. $f(t)$由式(11)确定

这时 $f(t)e^{-St}$在 $(0^-,0^+)$ 区间有界，同式(15)所证，可得

故

$$\left.\begin{aligned}\int_{0^-}^{0^+}f(t)e^{-St}\,dt&=0,\\ F_-(S)&=F_+(S).\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

2. $f(t)=c_0\delta(t)+c_1\delta^{(1)}(t)+\cdots+c_\nu\delta^{(\nu)}(t)$

可得

故

$$\left.\begin{aligned}&\int_{0^-}^{0^+}f(t)e^{-St}dt=\int_{0^-}^{\infty}[c_0\delta(t)+c_1\delta^{(1)}(t)+\cdots+\\ &\quad+c_\nu\delta^{(\nu)}(t)]e^{-St}dt=c_0+c_1S+\cdots+c_\nu S^\nu,\\ &F_-(S)=F_+(S)+\sum_{i=0}^{\nu}c_iS^i.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

由于 0^+ 型变换不能反映 $(0^-,0^+)$ 区间的脉冲函数，即

$$\int_{0^+}^{\infty}\delta^{(i)}(t)e^{-St}dt=0,\quad (i=0,1,\cdots,\nu) \tag{26}$$

故在 $F_+(S)$中不可能有 S 的多项式项，而只能是 S 的眞分式. 从式(25)的第二式可看出，从 $F_-(S)$中括出 $\sum_{i=0}^{\nu}c_iS^i$ 这样的项后，剩下的 S 眞分式就是 $F_+(S)$.

现将式(1)的拉氏变换式简记为

$$D(S)X(S)=M(S)F(S)+M_H(S), \tag{27}$$

式中：

$$D(S)=a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0, \tag{28}$$

$$M(S)=b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_1S+b_0, \tag{29}$$

$$M_H(S)=M_{HX}(S)-M_{Hf}(S), \tag{30}$$

而

$$\begin{aligned}M_{HX}(S)&=a_nx(\xi)S^{n-1}+[a_nx^{(1)}(\xi)+a_{n-1}x(\xi)]S^{n-2}+\cdots+\\ &\quad+[a_nx^{(n-1)}(\xi)+a_{n-1}x^{(n-2)}(\xi)+\cdots+a_2x^{(1)}(\xi)+a_1x(\xi)],\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}M_{Hf}(S)&=b_mf(\xi)S^{m-1}+[b_mf^{(1)}(\xi)+b_{m-1}f(\xi)]S^{m-2}+\cdots+\\ &\quad+[b_mf^{(m-1)}(\xi)+b_{m-1}f^{(m-2)}(\xi)+\cdots+b_2f^{(1)}(\xi)+b_1f(\xi)].\end{aligned} \tag{32}$$

为区分起见,对 0^+ 型变换,上面的符号分别换为: $X_+(S)$、$F_+(S)$、$M_H^+(S)$、$M_{HX}^+(S)$、$M_{Hf}^+(S)$, 又 $\xi = 0^+$; 而对 0^- 型变换, 则分别换为: $X_-(S)$、$F_-(S)$、$M_H^-(S)$、$M_{HX}^-(S)$、$M_{Hf}^-(S)$, 又 $\xi = 0^-$. 由式(27)可得出:

$$X_+(S) = \frac{M(S)}{D(S)} F_+(S) + \frac{M_H^+(S)}{D(S)}, \tag{33}$$

$$X_-(S) = \frac{M(S)}{D(S)} F_-(S) + \frac{M_H^-(S)}{D(S)}. \tag{34}$$

在用 0^+ 型变换时,需计算被 $t = 0^+$ 初始条件决定的 $M_H^+(S)$,现分二种情况讨论如何确定它.

(1) $f(t) = \delta(t)$ $\quad (F_-(S) = 1, F_+(S) = 0)$ 时

当 $n > m$, 由式(2)可知 $x(t)$ 不含脉冲函数,

故

$$X_-(S) = X_+(S), \tag{35}$$

比较式(33)和(34),并注意 $M_{Hf}^-(S) = M_{Hf}^+(S) = 0$, 可得

$$M_{HX}^+(S) = M(S) + M_{HX}^-(S). \tag{36}$$

在常态初始条件下,因 $M_{HX}^-(S)$ 等于零,故

$$M_{HX}^+(S) = M(S). \tag{37}$$

当 $n = m$, $x(t)$ 包含脉冲函数,由式(7)、(8)可得

$$X_-(S) = X_+(S) + \frac{b_n}{a_n}, \tag{38}$$

比较式(33)、(34)可得

$$M_{HX}^+(S) = M_{HX}^-(S) + M(S) - D(S)\frac{b_n}{a_n}. \tag{39}$$

在常态初始条件下,有

$$M_{HX}^+(S) = M(S) - D(S)\frac{b_n}{a_n}. \tag{40}$$

(2) $f(t)$ 由式(11)确定时

这时 $f(t)$ 不含脉冲函数. 此外,对 $n \geqslant m$, 从式(18)可知 $x(t)$ 在有限区间上有界,即也不包含脉冲函数, 故 $F_+(S) = F_-(S)$, $X_+(S) = X_-(S)$, 并注意 $M_{Hf}^-(S) = 0$. 比较式(33)、(34)可得

$$M_{HX}^+(S) = M_{HX}^-(S) + M_{Hf}^+(S). \tag{41}$$

在常态初始条件下,有

$$M_{HX}^+(S) = M_{Hf}^+(S), \tag{42}$$

而

$$M_H^+(S) = M_{HX}^+(S) - M_{Hf}^+(S) = 0. \tag{43}$$

这样, $M_{HX}^+(S)$ 和 $M_{Hf}^+(S)$ 虽分别地不为零,但在变换式的初始条件项中相互对消了,由此也就省去了计算 $t = 0^+$ 时初始条件的麻烦. 在[3]中并未清楚地区分 $t = 0^+$ 和 $t = 0^-$ 时初始条件项的不同处, 而只笼统地说: "$M_{HX}(S)$ 完全决定于初始条件, 当初始条件为零时,它也等于零",因而是不确切的. 此外, 应指出直接将式(6)、(9)和(20)代入式(31)也可得出式(37)、(40)和(42).

由上面讨论可知，0^+ 型拉氏变换可以"自动地"考虑系统在 $t=0^+$ 时的初始条件，而不必各别地计算它们；在用 0^- 型拉氏变换时，则可直接采用 $t=0^-$ 时的初始条件．这二种变换所得的解在$(0^+,\infty)$区间是相同的．

本文在撰写过程中，曾得到钟士模、郑大钟、文传源诸先生指正，深表感谢．

参　考　文　献

[1] Pfeiffer, P. E., Linear System Analysis, McGraw-Hill, New York, 1961.

[2] Toro, V. D. and Parker, S. R., Priciples of Control Systems Engineering, McGraw-Hill, New York, 1960.

[3] Солодовников, В. В. (ред), Основы автоматического регулирования, Машгиз, Москва, 1954, p.129 (B. B. 索洛多夫尼柯夫主编，自动调整原理，王众託译，水利电力出版社，北京，1959，第一分册，p.131).

SOME NOTES ON THE INITIAL CONDITIONS OF TIME-INVARINT LINEAR SYSTEMS

Chang Hung-yueh