

脉冲继电器控制系统中的分频振荡*

王新民 龔文第 白拜尔

摘 要

本文討論了脉冲继电器系统中的分频振荡问题，列出了存在分频振荡的必要条件，并采用脉冲继电器系统特性的概念，用图解法确定是否满足存在分频振荡的必要条件。分析证明，在脉冲继电器系统中，即使继电器特性是对称的，在系统中仍可存在奇数的与偶数的分频振荡，也可以存在对称的与不对称的分频振荡。这是不同于继电器系统中的情况的。一般说来，奇数的分频振荡比偶数的分频振荡比较容易存在，分频比值较小的比其较大的容易存在，对称的比不对称的容易存在。

一、前 言

在非线性系统中，有可能存在分频振荡的周期性状态，也就是说，在一定的条件下，非线性系统中周期性状态的频率是输入信号频率的 $1/n$ 倍 (n 是正整数)。在文献[1]中，曾对非线性控制系统中的分频振荡问题作了一般性的论述；而在文献[2—5]中，则对继电器控制系统中的分频振荡作了专门的探讨。本文拟对脉冲继电器控制系统中的分频振荡进行讨论。

假设脉冲继电器系统的方块图如图1所示。图中 K 是采样开关，它按采样周期 T 动作着。为了确定起见，假定继电器的特性是对称的（如图1所示），它的输出信号的幅值是 $\pm K_p$ ，滞环宽度是 $2a$ 。系统对象可以是稳定的，也可以在原点具有一阶极点，其传递函数分别可以是

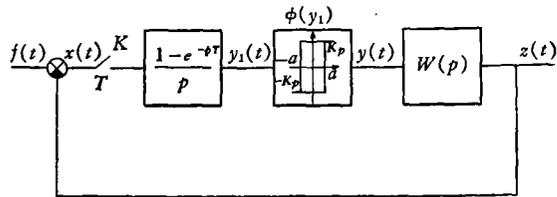


图 1.

或

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

$$W(p) = \frac{P(p)}{pQ_1(p)}.$$

系统输入信号 $f(t) = A\tilde{f}_0\left(\frac{2\pi}{M_0T}t - \phi\right)$ ，其中 M_0T 是 $\tilde{f}(t)$ 的周期， M_0 可以是奇数，也可以是偶数¹⁾。当它是偶数时，我们有时采用 $N_0 = M_0/2$ 。

在假定的继电器特性下，在继电器系统中只能存在奇数的对称分频振荡^[3,4]，这是由于

* 本文于1963年9月11日收到。

1) 此处假设 $\tilde{f}(t)$ 的周期是 T 的整数倍。显然只要周期与 T 之比是有理分数时， $f(t)$ 可以等价于另一个 $\tilde{f}_1(t)$ ，后者的周期是 T 的整数倍。

系统对称性所致。但在脉冲继电器系统中,采样开关可破坏系统的对称性。因此,在讨论中既要考虑奇数的分频振荡,也要考虑偶数的分频振荡;既要考虑对称的分频振荡,也要考虑不对称的分频振荡。至于本文讨论的分频振荡,它一定是稳定的,证明可见附录。

二、对称的分频振荡

首先考虑最简单的对称的分频振荡问题。此时,对象输入信号 $\tilde{y}(t)$ 是正负相间、宽度相同而周期为 $2NT$ 的函数(参见图 2)。

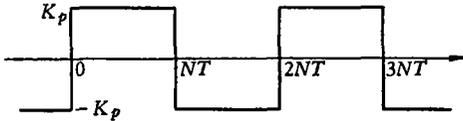


图 2.

系统输出信号 $\tilde{z}(t)$ 可以用下列公式表示^[3], 即当对象是稳定的而其传递函数各极点互不相等时,

$$\tilde{z}(t) = K_p \left[C_{00} + \sum_{i=1}^n C_{i0} \frac{2e^{p_i t}}{1 + e^{p_i NT}} \right] = -\tilde{z}(t + NT), \quad (0 < t \leq NT)$$

$$C_{00} = \frac{P(0)}{Q(0)}, \quad C_{i0} = \frac{P(p_i)}{p_i Q'(p_i)}; \quad (1)$$

而当对象在原点具有一阶极点和其余各极点互不相同,

$$\tilde{z}(t) = K_p \left[C_{00} + C_{01} \left(t - \frac{NT}{2} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2C_{i0}}{1 + e^{p_i NT}} e^{p_i t} \right] = -\tilde{z}(t + NT), \quad (0 < t \leq NT)$$

$$C_{00} = \frac{d}{dp} \left[\frac{P(p)}{Q_1(p)} \right]_{p=0}, \quad C_{01} = \frac{P(0)}{Q_1(0)},$$

$$C_{i0} = \frac{P(p_i)}{p_i Q_1'(p_i)}. \quad (2)$$

显然,分频振荡存在的必要条件可以归结为半周期和全周期时刻 ($t = kNT$, $k = 0, 1, 2, \dots$) 的切换条件以及其他采样时刻的不切换条件。这些条件可以用下列各式表示:

$$\tilde{x}(NT) = \tilde{f}(NT) - \tilde{z}(NT) < -a^1, \quad (3')$$

$$\tilde{x}(N-1T) = \tilde{f}(N-1T) - \tilde{z}(N-1T) > -a, \quad (4')$$

$$\tilde{x}(kT) = \tilde{f}(kT) - \tilde{z}(kT) > -a, \quad (5')$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-2)$$

和

$$\tilde{x}(2NT) = \tilde{f}(2NT) - \tilde{z}(2NT) > a^1, \quad (6')$$

$$\tilde{x}(2N-1T) = \tilde{f}(2N-1T) - \tilde{z}(2N-1T) < a, \quad (7')$$

$$\tilde{x}(N+kT) = \tilde{f}(N+kT) - \tilde{z}(N+kT) < a. \quad (8')$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-2)$$

引入脉冲继电器系统特性函数 J_{1N} 和 J_{2N} 以及输入信号相应的复数表达形式 $F_{1N}(A, \phi)$ 和 $F_{2N}(A, \phi)$ (这与[6]中分析继电器系统的方法相仿)

1) 文中未考虑临界切换 [$\tilde{x}(NT) = -a$, $\tilde{x}(2NT) = a$] 的情况。

$$J_{1N} = -\tilde{z}_N(\overline{N-1T}) - j\tilde{z}_N(NT),$$

$$J_{2N} = -\tilde{z}_N(\overline{2N-1T}) - j\tilde{z}_N(2NT),$$

和

$$F_{1N}(A, \phi) = A \left\{ \tilde{f}_0 \left(\frac{N-1}{N} n\pi - \phi \right) + j\tilde{f}_0(n\pi - \phi) \right\},$$

$$F_{2N}(A, \phi) = A \left\{ \tilde{f}_0 \left(\frac{2N-1}{N} n\pi - \phi \right) + j\tilde{f}_0(2n\pi - \phi) \right\},$$

可以把前述分频振荡存在的必要条件改写成

$$\text{Im} [F_{1N} + J_{1N}] < -a, \quad (3)$$

$$\text{Re} [F_{1N} + J_{1N}] > -a, \quad (4)$$

$$\tilde{x}(kT) = \tilde{f}(kT) - \tilde{z}(kT) > -a, \quad (5)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-2)$$

和

$$\text{Im} [F_{2N} + J_{2N}] > a, \quad (6)$$

$$\text{Re} [F_{2N} + J_{2N}] < a, \quad (7)$$

$$\tilde{x}(\overline{N+kT}) = \tilde{f}(\overline{N+kT}) - \tilde{z}(\overline{N+kT}) < a. \quad (8)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-2)$$

在具体考虑对称的分频振荡时, n 是奇数的与 n 是偶数的分频振荡在性质上有所不同。现就这两种不同情况, 分别进行讨论。

1. n 是奇数时

此时, 当 M_0 为奇数时, nM_0 也是奇数。因此, 当 M_0 为奇数时, 不可能存在 n 为奇数的对称的分频振荡。现仅讨论 M_0 为偶数时的奇数分频振荡问题。

当 M_0 为偶数时, 输入信号 $\tilde{f}(t)$ 对 NT 时刻是对称的, 即

$$\tilde{f}(t) = -\tilde{f}(NT + t); \quad (9)$$

而系统输出信号 $\tilde{z}(t)$ 也是对称的¹⁾, 即

$$\tilde{z}(t) = -\tilde{z}(NT + t). \quad (10)$$

因此, 当 n 为奇数时, 分频振荡存在的必要条件(3)~(5)和(6)~(8)完全等价。在检验分频振荡存在的必要条件时, 只需使用关系式(3)~(5)即可。

可以利用脉冲继电器系统特性 J_{1N} 图分析分频振荡问题。图3是某系统的 J_{1N} 特性曲线。在研究分频振荡时, 只需以 J_{1N} 曲线上相应于 nN_0 的点为中心, 作 $F_{1N}(A, \phi)$ 曲线 [图3中假定 $\tilde{f}(t)$ 是正弦函数且 $N_0 = 2$, 此时, $F_{1N}(A, \phi)$ 是个圆]。由式(3), (4)可知, 只有在 $F_{1N}(A, \phi)$ 曲线进入区域 I 的 A, ϕ 值上, 才可能存在分频振荡。

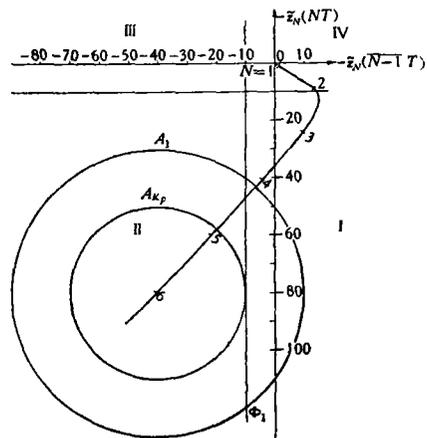


图 3.

1) 此处暂先不考虑 $z(t)$ 中可能存在直流分量的情况。此问题将留在下节讨论。

也就是說,当 $A \leq A_{K_p}$ 时,不可能存在分頻振蕩. 而当 $A = A_1$ 时,只有在 $\phi_1 - \phi_2$ 范围内的 ϕ 值上,才有可能存在分頻振蕩. 除此之外,还需檢驗其他采样时刻不切换条件(5),以最后确定可能存在分頻振蕩的 A, ϕ 范围.

附帶說明,当 $n = 1$ 时,上述方法即系确定強迫振蕩存在必要条件的办法;而当 $\dot{f}(t) = 0$ 时,則是确定“自振蕩”存在必要条件的办法.

例題: 假設脉冲繼电系統中的各环节、参数和輸入信号如下

$$W(p) = \frac{1}{p(p+1)}, \quad \dot{f}(t) = A \sin\left(\frac{\pi}{2T}t - \phi\right),$$

$$K_p = 40, \quad a = 10, \quad T = 1.$$

脉冲繼电系統特性 J_{1N} 如图 3 所示. 当 $\dot{f}(t) = 0$, 系統只有在对应于 $N = 3, 4$ 的頻率上可能存在“自振蕩”.

按照上述的分析方法,可以得到存在強迫振蕩时 A, ϕ 值的范围(參見图 4)与存在 $n = 3$ 分頻振蕩时的 A, ϕ 值范围(參見图 5). $n > 3$ 的奇数分頻振蕩不可能存在[因条件(5)不能滿足]. 一般來說,分頻振蕩的 n 值愈大就愈难在系統中存在.

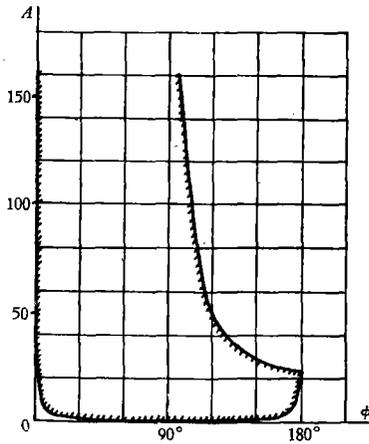


图 4.

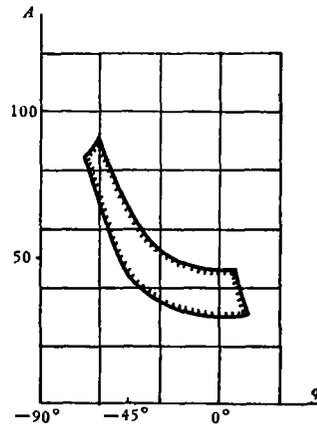


图 5.

从图 4 与图 5 可知,当 A 在某些范围内时,系統中既可存在強迫振蕩,也可存在分頻振蕩. 这情况与繼电系統中的情况类同,而系統中究竟存在何种状态是与初始条件有关的^[4,5].

图 6 中表示 $\dot{f}(t) = 50 \sin\left(\frac{\pi}{2T}t + 45^\circ\right)$ 系統中存在 $n = 3$ 的分頻振蕩时,系統中各点的信号情况.

2. n 是偶数时

当 n 为偶数时,輸入信号 $\dot{f}(t) = A\dot{f}_0 \left(\frac{2\pi}{M_0T}t - \phi\right)$ 对分頻振蕩半周时刻 NT 已不具有对称关系. 关系式(9)現应由下式代替

$$\dot{f}(t) = \dot{f}(NT + t),$$

即

$$F_{1N}(A, \phi) = F_{2N}(A, \phi). \quad (11)$$

因此,在分析分频振荡时,需要同时考虑(3)一(5)和(6)一(8)两组关系式.

但是,由于 $\tilde{z}(t)$ 仍是对称的,即

$$J_{1N} = -J_{2N}, \quad (12)$$

考虑到上述关系式(11)和(12), (6)一(8)的条件式可改写为

$$\text{Im} [-F_{1N} + J_{1N}] < -a, \quad (13)$$

$$\text{Re} [-F_{1N} + J_{1N}] > -a, \quad (14)$$

$$-\dot{f}(k_T) - \tilde{z}(k_T) > -a. \quad (15)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-2)$$

由此可见, (3)一(5)和(13)一(15)两组条件式可在同一个 J_{1N} 图上进行判别, 而不必另绘 J_{2N} 曲线图.

将分频振荡存在的必要条件式(3)一(5)和(13)一(15)进行运算, 可得下列关系式

$$\text{Im} J_{1N} < -a, \quad (16)$$

$$\text{Re} J_{1N} > -a \quad (17)$$

和

$$\tilde{z}(k_T) < a. \quad (18)$$

(16)一(18)两关系式恰好是“自振荡”存在的必要条件.

由此可得下述结论: 偶数倍的分频振荡只是在系统自振荡的频率上才有可能存在. 这条条件比存在奇数倍的分频振荡条件要严厉得多.

利用 J_{1N} 图确定偶数倍的分频振荡的方法

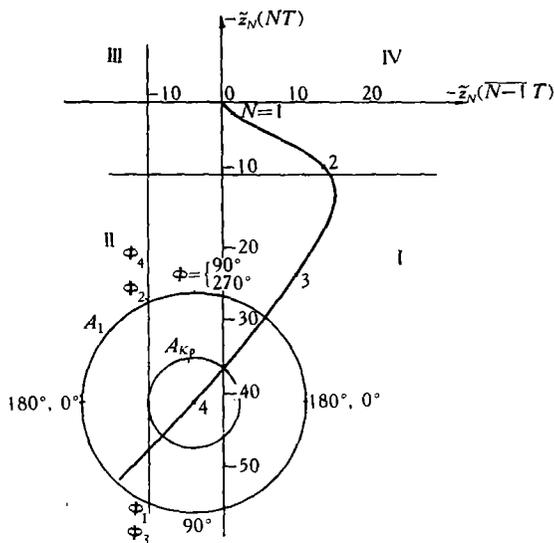


图 7.

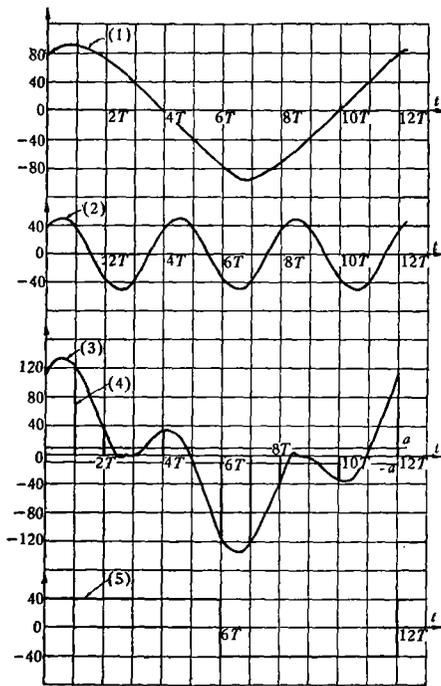


图 6.

- (1)—— $\tilde{z}(t)$; (2)—— $\dot{f}(t) = 50 \sin\left(\frac{\pi}{2T} t + 45^\circ\right)$; (3)—— $\tilde{x}(t)$; (4)—— $x^*(t)$;
(5)—— $\tilde{y}(t)$

与确定奇数倍的大致相同, 现仍以前面的例题作说明. 图 7 是 J_{1N} 图, 显然只有在与 $N = 3, 4$ 相应的频率上可以存在“自振荡”. 假定系统输入信号 $\dot{f}(t)$ 的半周期是 $2T$. 如此, 只可能存在 $n = 2$ 的偶数倍的分频振荡.

以 $N = 4$ 一点为中心, 作 F_{1N} 曲线. 当 $\dot{f}(t)$ 是正弦且周期为 $2T$ 时, F_{1N} 是个圆. 显然, F_{1N} 与 $-F_{1N}$ 曲线形状相同, 只是 ϕ 值相差 180° . 图中内圈的 ϕ 值对应于 F_{1N} 曲线, 外圈的 ϕ 值对应于 $-F_{1N}$ 曲线.

从图 7 可见, 当 $A < A_{Kp} = 6.1$ 时, 分频振荡存在的必要条件能够满足. 当 $A \geq A_{Kp}$ 时, 有些 ϕ 值已不处

在区域 I 内。此时，只有在 $\phi_1 - \phi_2$ 范围内[对应于条件(3),(4)]而又同时在 $\phi_3 - \phi_4$ 范围

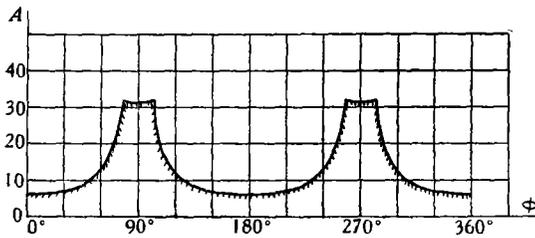


图 8.

在图 9 中表示 $\tilde{f}(t) = 20 \sin\left(\frac{\pi}{2T}t + 90^\circ\right)$ 系统中存在 $n = 2$ 的分频振荡时，系统中各有关处的信号变化情况。

内 [对应于条件(13),(14)]的 ϕ 值上才可能存在分频振荡。不言而喻，其他采样时刻不切换条件(5)与(15)也需满足。

图 8 是存在 $n=2$ 分频振荡时 A, ϕ 值相应的范围。与图 4 比较，可见在有些 A, ϕ 值上既可存在强迫振荡也可存在分频振荡，这决定于系统的初始条件。

三、不对称的分频振荡

在前节中我们讨论了对称的分频振荡。也就是说，在系统中对象的输入信号 $y(t)$ 和其输出信号 $z(t)$ 对半周时刻 NT 是对称的，即

$$y(t) = -y(NT + t)$$

和

$$z(t) = -z(NT + t).$$

当上述两式之一或同时都不成立时，系统的分频振荡即不对称。现仅考虑不对称的分频振荡问题。根据对象类别不同，分二种情况进行讨论。

1. 对象在原点有一阶极点

由于对象原点具有一阶极点，因此在对象输入信号 $y(t)$ 的稳态值中不可能具有直流分量，而输出信号 $z(t)$ 可具有直流分量

$$z(t) = z_{dc} + \tilde{z}(t).$$

显然，在前节具有此类对象的系统中，只要 z_{dc} 不超过一定范围，存在分频振荡的不等式条件仍能满足。此时，系统中即存在不对称的分频振荡。

例如，在前节偶数倍 ($n = 2$) 的分频振荡的实例中，当输入信号的 $A = 15, \phi = 90^\circ$ 时，根据计算可知，系统的 $x^*(t)$ 值如图 10 所示。只要

$$|z_{dc}| < 6.1$$

时，继电器输出 $\tilde{y}(t)$ 不因 z_{dc} 的存在而有所变更。此时， $\tilde{y}(t)$ 仍是对称的，但 $\tilde{z}(t)$ 中已存在直流分量。

2. 对象是稳定的

现考虑对象输入信号 $\tilde{y}(t)$ 具有如图 11 所示不对称的分频振荡情况。图中正负脉冲的持续时间 $mT \approx (M - m)T$ 。

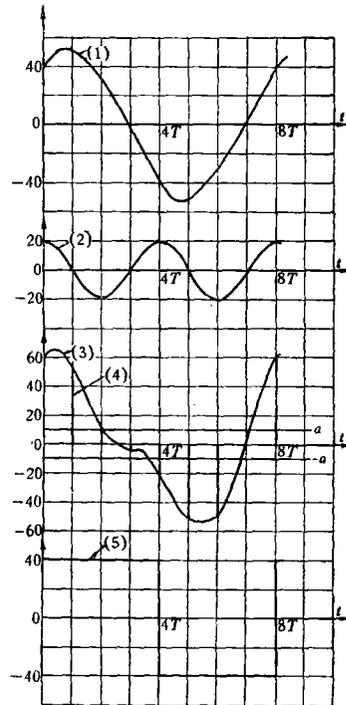


图 9.

- (1) — $-\tilde{z}(t)$; (2) — $\tilde{f}(t) = 20 \sin\left(\frac{\pi}{2T}t + 90^\circ\right)$; (3) — $\tilde{x}(t)$;
- (4) — $\tilde{x}^*(t)$; (5) — $\tilde{y}(t)$

系统输出信号 $\tilde{z}(t)$ 可用下式表示^[3]:

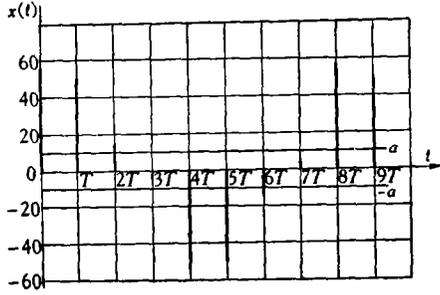


图 10.

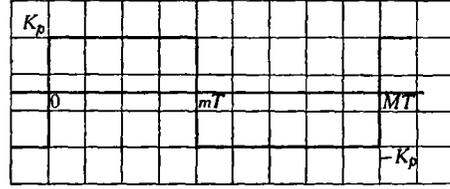


图 11.

$$\tilde{z}(t) = K_p \left[C_{00} + 2 \sum_{i=1}^n C_{i0} \frac{1 - e^{p_i(M-m)T}}{1 - e^{p_i MT}} e^{p_i t} \right], \quad (0 < t \leq mT)$$

$$\tilde{z}(t) = K_p \left[-C_{00} + 2 \sum_{i=1}^n C_{i0} \frac{1 - e^{p_i mT}}{1 - e^{p_i MT}} e^{p_i t} \right], \quad (mT < t \leq MT) \quad (19)$$

$$C_{00} = \frac{P(0)}{Q(0)}, \quad C_{i0} = \frac{P(p_i)}{p_i Q'(p_i)}$$

此时,分频振荡存在的必要条件可以归结为下列不等式:

$$\tilde{x}(mT) = \tilde{f}(mT) - \tilde{z}(mT) < -a, \quad (20')$$

$$\tilde{x}(\overline{m-1}T) = \tilde{f}(\overline{m-1}T) - \tilde{z}(\overline{m-1}T) > -a, \quad (21')$$

$$\tilde{x}(\overline{m-l}T) = \tilde{f}(\overline{m-l}T) - \tilde{z}(\overline{m-l}T) > -a, \quad (22')$$

$$(l = 2, \dots, m-1)$$

$$\tilde{x}(MT) = \tilde{f}(MT) - \tilde{z}(MT) > a, \quad (23')$$

$$\tilde{x}(\overline{M-1}T) = \tilde{f}(\overline{M-1}T) - \tilde{z}(\overline{M-1}T) < a, \quad (24')$$

$$\tilde{x}(\overline{M-l}T) = \tilde{f}(\overline{M-l}T) - \tilde{z}(\overline{M-l}T) < a. \quad (25')$$

$$(l = 2, \dots, M-m-1)$$

引用脉冲继电器系统特性函数 J_m 和 J_M 以及输入信号 $\tilde{f}(t)$ 的有关复数表达式 F_m 和 F_M

$$J_m = -\tilde{z}(\overline{m-1}T) - j\tilde{z}(mT),$$

$$J_M = -\tilde{z}(\overline{M-1}T) - j\tilde{z}(MT),$$

$$F_m = A \left[\tilde{f}_0 \left(\frac{m-1}{M} 2n\pi - \phi \right) + j\tilde{f}_0 \left(2n\pi \frac{m}{M} - \phi \right) \right],$$

$$F_M = A \left[\tilde{f}_0 \left(\frac{M-1}{M} 2n\pi - \phi \right) + j\tilde{f}_0(2n\pi - \phi) \right].$$

因此,分频振荡存在的必要条件可以改写为

$$\text{Im} [J_m + F_m] < -a, \quad (20)$$

$$\text{Re} [J_m + F_m] > -a, \quad (21)$$

$$\tilde{x}(\overline{m-l}T) = \tilde{f}(\overline{m-l}T) - \tilde{z}(\overline{m-l}T) > -a, \quad (22)$$

$$(l = 2, 3, \dots, m-1)$$

和

$$\text{Im} [J_M + F_M] > a, \tag{23}$$

$$\text{Re} [J_M + F_M] < a, \tag{24}$$

$$\tilde{x}(\overline{M-lT}) = \tilde{f}(\overline{M-lT}) - \tilde{z}(\overline{M-lT}) < a, \tag{25}$$

$$(l = 2, 3, \dots, M - m - 1)$$

可以采用脉冲继电器特性 J_m 和 J_M 曲线, 用图解法分析分频振荡问题。但是, 此时的 J_m 和 J_M 都是 m 和 M 二个变量的函数。这种情况与继电器系统特性完全相仿^[2-6]。因此, 分析不对称的周期性状态, 在继电器系统和脉冲继电器系统中都是比较繁复的。

例题 假设脉冲继电器控制系统中的各环节、参量和输入信号如下:

$$W(p) = \frac{12}{(p+1)(p+0.3)},$$

$$\tilde{f}(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{3T}t + \phi\right), \quad M_0 = 3,$$

$$a = 10, \quad K_p = 1, \quad T = 1.$$

现试求在此系统中 $n = 3$ 的不对称的分频振荡。

此时, $M = nM_0 = 9$, 而 m 则可以是 1 至 8 的正整数。由于 $m = m_1$ 与 $m = M - m_1$ 的情况等价, 因此, 只需分析 $m = 1, 2, 3, 4$ 的情况即可。

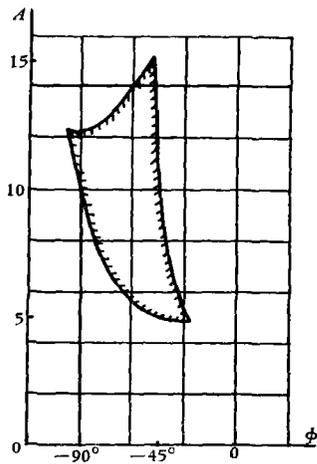


图 12.

按照前述方法, 可知 $m = 1, 2, 3$ 时不可能存在分频振荡, 而 $m = 4$ 时可以存在分频振荡。此时的 A 与 ϕ 值的范围如图 12 所示。

图 13 表示输出信号 $\tilde{f}(t) = 10 \sin\left(\frac{2\pi}{3T}t + 60^\circ\right)$, 在系统中存在 $m = 4, n = 3$ 的不对称分频振荡时, 系统中各处的信号变化情况。

由计算过程可知, 不对称的分频振荡是比较难以存在的, 振荡愈不对称, 其存在的可能性就愈小。

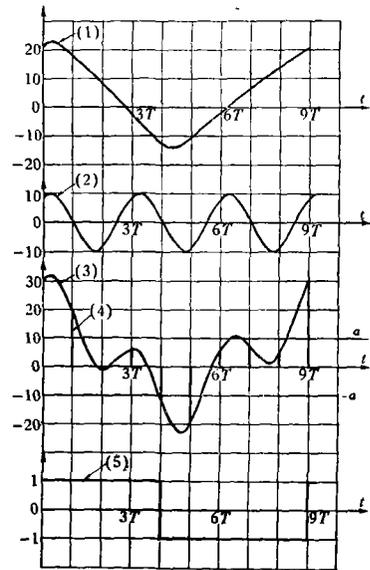


图 13.

- (1)—— $\tilde{z}(t)$; (2)—— $\tilde{f}(t) = 10 \sin\left(\frac{2\pi}{3T}t + 60^\circ\right)$; (3)—— $\tilde{x}(t)$;
 (4)—— $\tilde{x}^*(t)$; (5)—— $\tilde{y}(t)$

四、結 論

本文討論了具有滯環的對稱特性繼電器的繼電脈沖系統中的分頻振蕩問題。文中列出了分頻振蕩存在的必要條件, 並採用圖解法確定其存在的可能性。通過研究分析, 可作如下幾點小結:

1. 在此類脈沖繼電系統中可以存在 n 為奇數的分頻振蕩, 也可以存在 n 為偶數的分頻振蕩; 可以存在對稱的分頻振蕩, 也可以存在不對稱的分頻振蕩。這與繼電系統中的情況有所不同。

2. 對對稱的分頻振蕩而言, n 為奇數的分頻振蕩只是在輸入信號周期為採樣周期的偶數倍時才可能存在; n 為偶數的分頻振蕩只是在系統可能產生“自振蕩”的頻率上才可能存在。

3. 當對象在原點具有一階極點時, 對象輸出量中可以存在直流分量, 因而分頻振蕩可以是不對稱的。

4. 當對象是穩定時, 系統中可以存在另一種不對稱的分頻振蕩。此時, 對象輸入信號 $\tilde{y}(t)$ 和輸出信號 $\tilde{z}(t)$ 都不對稱。

5. 一般來說, n 數值愈大的分頻振蕩在系統中愈難存在, 對象輸入信號 $\tilde{y}(t)$ 愈不對稱的分頻振蕩在系統中愈難存在。

附 錄 脈沖繼電系統中周期性狀態的穩定性

從圖 1 可列出下列系統方程式

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} - \mathcal{L}\{\phi[x^*(t)]\} \frac{1 - e^{-pT}}{p} W(p), \quad (26)$$

此處 $\mathcal{L}\{\}$ 表示 $\{\}$ 內函數的拉氏變換象函數。在存在周期性狀態時, 上式可寫成

$$\mathcal{L}\{\bar{x}(t)\} = \mathcal{L}\{\bar{f}(t)\} - \mathcal{L}\{\phi[\bar{x}^*(t)]\} \frac{1 - e^{-pT}}{p} W(p). \quad (27)$$

假設在某時刻系統中的過程偏差周期性狀態一很小量。按李雅普諾夫理論可知: 倘此偏差量隨時間增長而趨於零, 則周期性狀態是穩定的, 否則將是不穩定的^[7]。

為方便起見, 可將引起偏差的干擾歸算到系統輸入端, 並以 $f_H(t)$ 表示。如此, $f(t)$ 將是

$$f(t) = \bar{f}(t) + f_H(t). \quad (28)$$

由此引起的對周期性狀態的偏差量以 $\xi(t)$ 表示, 即

$$x(t) = \bar{x}(t) + \xi(t). \quad (29)$$

以式(28)和(29)代入式(26)可得

$$\mathcal{L}\{\bar{x}(t) + \xi(t)\} = \mathcal{L}\{\bar{f}(t) + f_H(t)\} - \mathcal{L}\{\phi[\bar{x}^*(t) + \xi^*(t)]\} \frac{1 - e^{-pT}}{p} W(p). \quad (30)$$

由此可得偏差方程式

$$\mathcal{L}\{\xi(t)\} = \mathcal{L}\{f_H(t)\} - \mathcal{L}\{\phi[\bar{x}^*(t) + \xi^*(t)] - \phi[\bar{x}^*(t)]\} \frac{1 - e^{-pT}}{p} W(p). \quad (31)$$

從式(3')—(8')及(20')—(25')可見, 周期性狀態存在的必要條件是一些不等式。當 $\xi^*(t)$ 值足夠小時, 在這些不等式中用 $\bar{x}^*(t) + \xi^*(t)$ 代替 $\bar{x}^*(t)$ 後, 不等式關係仍能滿足。因此

$$\phi[\bar{x}^*(t) + \xi^*(t)] - \phi[\bar{x}^*(t)] = 0,$$

而偏差方程(31)則可寫成

$$\mathcal{L}\{\xi(t)\} = \mathcal{L}\{f_H(t)\}. \quad (32)$$

因此,只要归算到输入端的扰动 $f_H(t)$ 随时间增长而趋于零,则周期性状态在一定范围内是稳定的。由此可见,当对象是稳定时, $f_H(t)$ 趋于零,周期性状态是稳定的。当对象在原点具有一阶极点,由对象干扰引起的 $f_H(t)$ 可能趋于不等于零的常数。但此时的 $\bar{y}(t)$ 仍不变 [$z(t)$ 的直流成分将变更],故周期性状态仍可称为稳定的。

不难看出,对数字系统中周期性状态稳定性而言,上述结论也是正确的。

参 考 文 献

- [1] West, J. and Douce, J., The Subharmonic Generation in Feedback Systems, *Proc. IEE*, **102** (1955), pt. B, 569—573.
- [2] Yamaguchi, J., Nishimura, M., Fujie, K. and Murauhashi, T., On the Subharmonic Oscillation of Relay Servomechanism, *Automatic and Remote Control* (Butterworths, Londres, 1961), **1**, 398—403.
- [3] Sakawa, Y., Subharmonic Oscillations in Relay Control Systems, *Automatic and Remote Control* (Butterworths, Londres, 1961), **1**, 404—409.
- [4] Gille, J. C. and Paquet, J. G., Subharmonic Oscillations in On-off Control Systems, *Trans. AIEE*, **83** (1962), pt. II, 210—216.
- [5] Жиль, Ж. Ж., Вегжен, С. и Паке, Ж. Ж., Субгармонические колебания в релейных системах автоматического регулирования, Доклад, представленный на Второй международный конгресс ИФАК, Г. Базель, Швейцария, 1963 г.
- [6] Цыпкин, Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.
- [7] Бромберг, П. В., Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования, Оборонгиз, 1953.

SUBHARMONIC OSCILLATIONS IN RELAY SAMPLED-DATA CONTROL SYSTEMS

WANG SING-MING, GUNG WEN-DE, BEI PAL

In this paper the problem of subharmonic oscillations in relay sampled-data control systems is studied. It is found that for systems even with symmetrical relay characteristics, there is possibility to have both odd and even order subharmonic oscillations. Both symmetrical and non-symmetrical subharmonic oscillations are also possible to exist. The necessary conditions for having these subharmonic oscillations are formulated and a graphical method for their examination is proposed.