第3卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 3, No. 3
1965 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1965

研 究 簡 报

李雅普諾夫函数的分解問題*

刘 永 清

在一些工程技术中,常需考虑非綫性微分方程

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

过初值 $x_i(t_0) = 0(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的运动稳定性問題[其中 $X_i(0, \cdots, 0) \neq 0$, $i=1, 2, \cdots, n$, 即(1)的原点不为奇点].

由李雅普諾夫函数方法,从理論上可以解决这类問題,只要所找出的稳定域包含初值在內即可. 但是在构成李雅普諾夫函数的过程中,当 n 逐漸增大 (如 $n > 10$) 时, 其計算量是相当繁杂的. 本文从理論上研究了以 l 組相互无关的微分方程組的李雅普諾夫函数之和,代替方程組(1)的李雅普諾夫函数,来估算 (1) 的稳定域問題,从而大大地压縮了計算量.

将方程組(1)記作下面形式:

$$\frac{dx_i}{dt} = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + f_i(x_1, \cdots, x_n), \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

式中 a_{ij} 为常量, f_i 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的不低于二次的解析函数, b_i 为不同时为零的常量.

設方程組(2)距原点最近的奇点为 $H_0(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})$. 利用

$$y_i = x_i - x_{i0} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

将(2)的坐标原点平移到奇点 H_0 上去,便使方程組(2)化为以下形式:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + F_i(y_1, y_2, \cdots, y_n), \tag{4}$$

式中 F_i 是 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的不低于二次的解析函数. 方程組(4)的原点为奇点,故可将所研究的問題化为求过初值 $y_i(t_0) = -x_{i0}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 运动的稳定性問題. 方程組(4)的綫性部分为

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}, \tag{5}$$

現考慮 l 組相互无关的微分方程組

* 本文于 1964 年 8 月 19 日收到.

$$
\frac{d}{dt}\left|\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_1} \\ \vdots \\ y_{n-n_l+1} \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} a_{11}\cdots a_{1n_1} & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n_11}\cdots a_{n_1n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-n_l+1\;n-n_l+1}\cdots a_{n-n_l+1\;n} \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & & a_{n\;n-n_l+1}\cdots\cdots a_{n\,n} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_1} \\ \vdots \\ y_{n-n_l+1} \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}\right|, \tag{6}
$$

其中 $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$，每一个 n_i 为正整数．方程組(6)中每一組的李雅普諾夫函数分别为：

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\sigma_{ij}y_iy_j, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
V_k &= \frac{1}{2}\sum_{i=n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^{n_1+\cdots+n_k}\ \sum_{j=n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^{n_1+\cdots+n_k}\sigma_{ij}y_iy_j, \\
V_l &= \frac{1}{2}\sum_{i=n-n_l+1}^{n}\ \sum_{j=n-n_l+1}^{n}\sigma_{ij}y_iy_j
\end{aligned} \tag{7}
$$

正定函数[1]．沿着方程組(6)的积分曲綫分别有

$$
\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt} &= -(y_1^2 + \cdots + y_{n_1}^2), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
\frac{dV_k}{dt} &= -(y_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^2 + \cdots + y_{n_1+\cdots+n_k}^2), \\
\frac{dV_l}{dt} &= -(y_{n-n_l+1}^2 + \cdots + y_n^2).
\end{aligned} \tag{8}
$$

即方程組(6)的每一組独立的微分方程組的一般解，都是漸近稳定的，存在着稳定域．

現在首先对方程組(6)的李雅普諾夫函数进行估算．将方程組(6)的任一組方程記作

$$
\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j, \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{9}
$$

其特征方程为

$$
|a_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = p_0\lambda^m + p_1\lambda^{m-1} + \cdots + p_{m-1}\lambda + p_m = 0, \tag{10}
$$

式中 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ 是 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m}, \cdots, a_{mm}$ 的多項式．

記方程組(9)的李雅普諾夫函数为

$$
V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}y_iy_j,
$$

其中

$$
\sigma_{ij} = \frac{(-1)^m}{p_0D}\sum_{s=0}^{m} G_{ij}^{(s)}. \quad (i, j = 1, 2, \cdots, m)
$$

这里D为卢斯-霍尔維茨行列式，而$G_{ij}^{(s)}$则是在卢斯-霍尔維茨行列式中的第一列，以$g_{sij}^{(0)}$，$g_{sij}^{(1)}$，$\cdots$，$g_{sij}^{(m-1)}$代替后获得:

$$D=\begin{vmatrix} p_1 & p_3 & p_5 & \cdots & 0 \\ p_0 & p_2 & p_4 & \cdots & \vdots \\ 0 & p_1 & p_3 & \cdots & \vdots \\ 0 & p_0 & p_2 & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & p_{mm} \end{vmatrix}, \quad G_{ij}^{(s)}=\begin{vmatrix} g_{sij}^{(0)} & g_{sij}^{(1)} & \cdots & g_{sij}^{(m-1)} \\ p_0 & p_2 & \cdots & \vdots \\ 0 & p_1 & \cdots & \vdots \\ 0 & p_0 & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & p_{mm} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

$g_{sij}^{(k)}$是这样确定的：在特征方程(10)中去掉第i行第j列后，所得子行列式为$\Delta_{ij}(\lambda)$，而

$$Q_{ij}^{(s)}(\lambda)=\Delta_{is}(\lambda)\Delta_{js}(-\lambda)=\sum_{r=0}^{m-1} g_{sij}^{(r)}\lambda^{2(m-1-r)}, \tag{12}$$

故可看出$g_{sij}^{(k)}$是$Q_{ij}^{(s)}(\lambda)$中多项式λ的系数.

对(11)进行一些簡单的計算，即可得到

引理: 令 $A=\max\limits_{i,j=1,2,\cdots,m}[|a_{ij}|]$，$\sigma=\max\limits_{i,j=1,2,\cdots,m}[|\sigma_{ij}|]$，

则有

$$\sigma=\frac{1}{|p_0|D}m^{m-2}(m!)^3\prod_{k=2}^{m-1}(k-1)^{k-1}A^{[m!+2(m-1)]}. \tag{13}$$

由$n=\sum\limits_{i=1}^{l}n_i$，每一个$n_i$为正整数，令$\bar{\bar{n}}=\min\limits_{i=1,2,\cdots,l}[n_i]$，$\bar{n}=\max\limits_{i=1,2,\cdots,l}[n_i]$，結合以上引理得到

定理 1. 如果方程組(6)的每一組方程，都存在正定的李雅普諾夫函数V_1，V_2，$\cdots$，V_l，且有$\frac{dV_i}{dt}$ $(i=1,2,\cdots,l)$是負定的函数[如公式(7)和(8)所示]，則一定可以找到正数$\Delta>0$，使当

$$E<\Delta=\frac{1}{\sigma\left[\sum\limits_{i=1}^{l}n_i^2+\bar{\bar{n}}(n-2\bar{n})\right]} \tag{14}$$

时，方程組(5)也存在正定函数$V=V_1+V_2+\cdots+V_l$，且$\frac{dV}{dt}$对(5)是負定的. 这里，

$$E=\max\left\{\begin{array}{l} |a_{1\,n_1+1}|,\cdots|a_{n_1\,n_1+1}|,\cdots|a_{n_1\,n}|;\ |a_{n_1+1\,1}|,\cdots|a_{n_1+n_2+1}|,\cdots \\ |a_{n_1+n_2\,n_1}|;\cdots|a_{n_1+1\,n_1+n_2+1}|,\cdots|a_{n_1+1\,n}|,\cdots|a_{n_1+n_2\,n}|;\cdots \\ |a_{n-n_l+1\,1}|,\cdots|a_{n-n_l+1\,n-n_l}|,\cdots|a_{n\,1}|,\cdots|a_{n\,n-n_l}|. \end{array}\right\} \tag{15}$$

证: V沿着方程(5)的积分曲綫对t求导数，有

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV_1}{dt}+\frac{dV_2}{dt}+\cdots+\frac{dV_l}{dt}=\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\partial V_1}{\partial y_i}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\right)+\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\frac{\partial V_2}{\partial y_i}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\right)+$$
$$+\cdots+\sum_{i=n-n_l+1}^{n}\frac{\partial V_l}{\partial y_i}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\right)=-(y_1^2+\cdots+y_{n_1}^2)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n_1}\left\{\left[\sum_{l=1}^{n_1}(\sigma_{li}+\sigma_{il})y_l\right]\left[\sum_{j=n_1+1}^{n}a_{ij}y_j\right]\right\}-(y_{n_1+1}^2+\cdots+y_{n_1+n_2}^2)+$$

$$+\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\left\{\left[\sum_{l=n_1+1}^{n_1+n_2}(\sigma_{li}+\sigma_{il})y_l\right]\left[\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}y_j+\sum_{j=n_1+n_2+1}^{n}a_{ij}y_j\right]\right\}+$$

$$+\cdots-(y_{n-n_l+1}^2+\cdots+y_n^2)+\sum_{i=n-n_l+1}^{n}\left\{\left[\sum_{l=n-n_l+1}^{n}(\sigma_{li}+\sigma_{il})y_l\right]\left[\sum_{j=1}^{n-n_l}a_{ij}y_j\right]\right\}.$$

由

$$\sum_{i=1}^{n_1}\left\{\left[\sum_{l=1}^{n_1}(|\sigma_{li}|+|\sigma_{il}|)|y_l|\right]\left[\sum_{j=n_1+1}^{n}|a_{ij}||y_j|\right]\leqslant n_1E\sigma\left[(n-n_1)\sum_{i=1}^{n_1}y_i^2+n_1\sum_{i=n_1+1}^{n}y_i^2\right]\right\},$$

同理有

$$\left|\sum_{i=n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^{n_1+\cdots+n_k}\frac{\partial V_k}{\partial y_i}\left(\sum_{j=1}^{n_1+\cdots+n_{k-1}}a_{ij}y_j+\sum_{j=n_1+\cdots+n_k+1}^{n}a_{ij}y_j\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant n_kE\sigma\left[(n-n_k)\sum_{i=n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^{n_1+\cdots+n_k}y_i^2+n_k\sum_{i=1}^{n_1+\cdots+n_{k-1}}y_i^2+\cdots+n_k\sum_{i=n_1+\cdots+n_k+1}^{n}y_i^2\right],$$

$$\left|\sum_{i=n-n_l+1}^{n}\frac{\partial V_l}{\partial y_i}\left(\sum_{j=1}^{n-n_l}a_{ij}y_j\right)\right|\leqslant n_lE\sigma\left[(n-l)\sum_{i=n-n_l+1}^{n}y_i^2+n_l\sum_{i=1}^{n-n_l}y_i^2\right].$$

合并以上計算有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(5)}\leqslant-(y_1^2+\cdots+y_{n_1}^2+y_{n_1+1}^2+\cdots+y_n^2)+E\sigma\left[n_1(n-2n_1)\sum_{i=1}^{n_1}y_i^2+\right.$$

$$+n_1^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2+\cdots+n_k(n-2n_k)\sum_{i=n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^{n_1+\cdots+n_k}y_i^2+\cdots+n_k^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2+$$

$$\left.+\cdots+n_l(n-2n_l)\sum_{i=n-n_l+1}^{n}y_i^2+n_l^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]\leqslant-(y_1^2+\cdots+y_n^2)+$$

$$+E\sigma\left[\bar{n}(n-\bar{\bar{n}})\sum_{i=1}^{n_1}y_i^2+\bar{n}(n-\bar{\bar{n}})\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}y_i^2+\cdots+\bar{n}(n-2\bar{\bar{n}})\sum_{i=n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^{n_1+\cdots+n_k}y_i^2+\right.$$

$$\left.+\cdots+\bar{n}(n-2\bar{\bar{n}})\sum_{i=n-n_l+1}^{n}y_i^2+(n_1^2+\cdots+n_l^2)\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]=$$

$$=-(y_1^2+\cdots+y_n^2)+E\sigma\left[\bar{n}(n-2\bar{\bar{n}})+\sum_{i=1}^{l}n_i^2\right]\sum_{i=1}^{n}y_i^2<0.$$

至此,定理証毕.

对非綫性微分方程(4),亦有

定理 2. 若满足定理 1 的条件,只要M取得适当小,一定存在正数 Δ, 使当

$$E<\Delta=\frac{1}{\sigma\left[\sum_{i=1}^{l}n_i^2+\bar{\bar{n}}(n-2\bar{n})\right]}-\eta$$

时对方程組 (4) 存在正定函数 $V=V_1+V_2+\cdots+V_l$, 在 $V=M^2$ 內 $\dfrac{dV}{dt}$ 是負定的.

这里，η 是与M有关的适当小的常数(至少是M的三次式)。

証明完全类似于定理 1，只要对 $F_i(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 中的高次項，取 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 适当小，亦卽由 $V = M^2$，只要M取适当小，卽可保証沿着(4)的积分曲綫由V对 t 求导数为負定的.

由定理 1 可知，若公式(14)成立，綫性方程(5)过初值 $y_i(0) = -x_{i0}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的运动为漸近稳定的.

由定理 2 可知，对非綫性微分方程(4)的稳定域为 $V = M^2$，若初值落在此域中，則过初值的运动为漸近稳定的. 亦卽說明了方程組(2)的过初值 $x_i(t_0) = 0$ 的运动落在稳定域中时为漸近稳定的.

注 1： 若方程組(2)的原点为奇点，則求过初值 $x_i(t_0) = 0$ 的运动稳定性問題，卽为判定奇点 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 的稳定性問題，可以不必再取变换(3). 由此看来，本文中的問題提法是带有一般性的.

注 2： 也可用[2]中提出的李雅普諾夫函数方法来估計稳定域.

注 3： 由引理中对 σ 的估計可知，稳定域 Δ 还可以适当放大些.

参 考 文 献

[1] А. К. Бедельбаев, О построении функции А. М. Ляпунов в виде квадратичной формы, Изв. АН Каз ССР серия матем. и механ., вып. 4(8), 1956.
[2] 蔡燧林，常系数线性微分方程的李亚普诺夫函数公式，数学学报，9 卷，4 期(1959).

DECOMPOSITION OF LIAPUNOV'S FUNCTION

LIU YUNG-CHING