第2卷 第2期 自动化学报 Vol. 2, No. 2
1964年4月 ACTA AUTOMATICA SINICA April, 1964

研究簡报

常系数綫性系統的快速控制問題[1)]

张嗣瀛

摘要

在此短文中，借助于李雅普諾夫函数，对扰动量作了定量估計，以給出使用綫性开关函数的某种依据. 文中还将此法用于常系数綫性时滞系統.

一、常系数綫性系統

考虑常系数綫性系統

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_iu_i, \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{1}$$

其中"控制" u_i 可以是时間的間断函数，且受限制

$$|u_i| \leqslant M_i, \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{2}$$

此处 M_i 是些給定的常数. 今要求确定控制函数 $u_i(x_1, \cdots, x_n)$，使系統 (1) 的映象点在 t_0 时由相空間中某一初始位置出发，以最短的时間衰減至区域[4]

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

此处 ε 是給定的值，其特例是 $\varepsilon = 0$.

今討論上述間題的近似解.

若对式 (1) 的齐次方程

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \tag{4}$$

能作出正定二次型式的李雅普諾夫函数 $V = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}x_ix_j$，$(p_{ij} = p_{ji})$，則可得 $-\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4)} = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}x_ix_j$，$(q_{ij} = q_{ji})$；我們作定量估計[1,5,7,8]，首先有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} \leqslant -\lambda_{\min} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} b_iu_i, \tag{5}$$

其中 $\lambda_{\min}$ 是方程 $|q_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$ 最小的那个根. 如果再用 $\mu_{\min}$，$\mu_{\max}$ 表示方程 $|p_{ij} - \mu\delta_{ij}| = 0$ 最小及最大的根，于是还可得：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)_{(1)} \leqslant \frac{1}{\mu_{\min}} e^{-\frac{\lambda_{\min}}{\mu_{\max}}t} \left\{V_0 + \int_{t_0}^{t} \left[e^{\frac{\lambda_{\min}}{\mu_{\max}}t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} b_iu_i\right] dt\right\}. \tag{6}$$

1) 本文的时滞系統部分曾在1962年8月中国力学学会一般力学会議上宣讀.

由此可見,欲使尽快衰減,应选取

$$u_i = -M_i \operatorname{sign}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} b_i\right). \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{7}$$

在文献[9]中也論及用李雅普諾夫函数得到綫性开关,那里是以李雅普諾夫稳定性理論为基础的. 但由于式(1)是断續系統,故严格說来,李雅普諾夫的理論不能应用. 此处,由式(6)推出式(7),似可从定量估計角度得到使用綫性开关的某种依据.

根据上面的估計方法不难得到

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)_{(1)} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)_{(4)}. \tag{8}$$

可見,若系統(4)稳定,則断續系統(1)必稳定.

据式(7)确定 u_i 时,可应用現成的李雅普諾夫函数公式,如[6].

二、常系数綫性时滞系統

現举一例. 对于常系数时滞系統,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= k_1 u, \\ \dot{y}_1 &= y(t-\tau_1), \\ \dot{z} &= k_2 y_1, \\ z_1 &= z(t-\tau_2), \\ T\dot{x} + x &= k_3 z_1, \end{aligned}$$

其中 τ_1, τ_2 是时間滞后量. 将有关各式两端对 t 求导数后(一般說来,在經过 $t_0 + k\tau_i$ 时間之后,这种运算是允許的[11],我們就用 $t_0 + k\tau_i$ 作为新的初始时間),可得

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= k^* u(t-\tau), \\ T\dot{x}_1 + x &= k_3 z_1, \end{aligned}$$

此处 $k^* = k_1 k_2$, $\tau = \tau_1 + \tau_2$. 現在考虑如下具有更一般形式的系統运动方程

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i u_i(t-\tau_i), \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{9}$$

此处 τ_i 是时滞量, u_i 仍受式(2)的限制. 取适当的 t 值为初始值,即可討論上节所提的問題.

处理方法可完全按上节那样进行,并得到相应的結論(包括对于时滞系統(9)的稳定性的結論).还可得

$$u_i(t-\tau_i) = -M_i \operatorname{sign}(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n), \tag{10}$$

此处 c_i 均为已知常数.

在設計系統时,应将 $u_i(t)$ 表示为同一时間的 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ 的函数,故式(10)不能直接应用. 今处理如下. 将式(10)写成

$$u_i(t) = -M_i \operatorname{sign}(c_1 x_1(t+\tau_i) + \cdots + c_n x_n(t+\tau)), \tag{11}$$

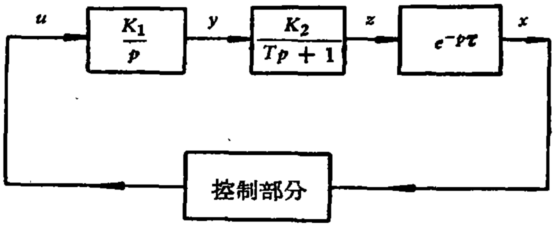
再在右端括号內加減 $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$[3], 得

$$u_i = -M_i \operatorname{sign}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i \Delta x_i\right], \tag{12}$$

其中 $\Delta x_i = x_i(t+\tau_i) - x_i(t)$ 表示經过 τ_i 时間后 x_i 的增量.

下面举一应用式(12)的实例.

在冶金或化学工业中,有如下的系統[10]:



令 $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$, 可将其方程写成

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{T}[-x_2 + Ku(t-\tau)], \tag{13}$$

此处 $K = K_1 \cdot K_2$, 且 $|u| \leqslant 1$. 根据[6]中的公式作李雅普諾夫函数,稍作修改后使为正定,可得

$$V = \frac{1}{T^2}x_1^2 + \frac{2}{T}x_1x_2 + \left(1+\frac{\mu}{T}\right)x_2^2,$$

此处 $\mu > 0$ 是一微小的正数. 按上述作法,并注意到 $Tx_2(t+\tau) + x_1(t+\tau) = K_2y(t)$, 可得

$$u = -\operatorname{sign}[x_1 + T(1+\mu)x_2 + K_2\Delta y_\tau + T\mu\Delta x_{2\tau}]. \tag{14}$$

如果略去带 μ 的項,还可得到簡化公式

$$u = -\operatorname{sign}[x_1 + Tx_2 + K_2\Delta y_\tau]. \tag{15}$$

在[10]中,得到的最优开关函数是

$$u = -\operatorname{sign}\left[x_1 + Tx_2 + K_2\Delta y_\tau - KT\ln\left(1+\left|\frac{x_2e^{-\tau/T} + \Delta\dot{x}_{\tau\text{вых}}}{K}\right|\right)\operatorname{sign}x_t\right]. \tag{16}$$

可見, 式(15)正是此式的前三項. 在[10]中, 只解算二阶系統(13), 且所用的方法需要解微分方程,这对于高阶系統将很复杂. 但此处的方法可无困难地推广到 n 阶系統. 又,在[10]中,将式(16)經过近似計算簡化后,得到

$$u = \operatorname{sign}(x_1 + K_1^*x_2 + K_2^*\Delta y_\tau).$$

其形式同于式(15),只是系数略有不同. 至于这种形式的函数如何实現,則可参看[10]中所提出的結构图.

最后,作者对周恆同志及戴汝为同志致以謝意, 在写此短文的过程中, 他們曾向作者提出过宝貴意見.

参　考　文　献

[1] Четаев, Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955.
[2] 錢学森,工程控制論,科学出版社,北京, 1958.
[3] 秦元勛,刘永清,王联, On the Equivalence Problems of Differential Equations and Difference-differential Equations in the Theory of Stability, 科学記录, II (1958), No.4.
[4] 宋健,韓京清,綫性最速控制系統的分析与綜合理論,数学进展, 1962 年,第五卷,第四期.

[5] 章仁为, Синтез релейных систем по минимуму интегральных квадратичных отклонений, Автоматика и телемеханика, 1961, № 12.

[6] 蔡燧林,常系数綫性微分方程組的 Ляпунов 函数公式,数学学报, 1959 年,第九卷,第四期.

[7] 黄琳,关于多維非綫性系統衰減时間的估計問題,北京大学学报,自然科学版, 1960, No.1.

[8] 张嗣瀛, Об оценках решении систем дифференциальных уравнений, накоплении возмущений и устойчивости на конечном интервале времени, Прикладная математика и механика, 1959, вып. 4.

[9] Kalman, R. E., Bertram, J. E., Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Lyapunov, *Trans. of ASME*, Series D, **82** (1960), No. 2.

[10] Варшавский, О. Г., Оптимальное регулирование систем второго порядка с запаздыванием, Теория и применение дискретных автоматических систем, Изд. АН СССР, 1960.

[11] Эльсгольц, Л. Э., Дифференциальные уравнения, Гостехиздат, 1957, 第五章.

MINIMAL TIME CONTROL OF LINEAR SYSTEM WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Chang Szu-ying

By using the function of Lyapunov, in this paper a formula is derived to estimate the decaying perturbation. Based on this formula the linear switching lines are obtained. The method is also applied to system with time lag.