第4卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 4, No. 1
1966年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1966

多項式迭加平稳过程信号的預报过滤問題*

陈翰馥 安万福

摘 要

本文考虑了系数未知的多项式迭加平稳过程的信号,给出了均方误差意义下最优预报及多项式系数估计公式中的谱特性应满足的必要和充分条件. 当平稳过程具有有理谱密度时,可以把决定最优谱特性问题归结为解线性代数方程组.

一、問題的提出

假设眞信号 $Y(t)$ 为系数未知的 r 次多项式 $g(t)=\sum_{s=0}^{r} g_s t^s$ 迭加一均方连续的宽平稳过程 $X(t)$,即: $Y(t)=g(t)+X(t)$. 夹杂有噪声后所接收到的信号是 $Y_1(t)=Y(t)+X_1(t)$, $X_1(t)$ 也是均方连续的宽平稳过程,并且和 $X(t)$ 平稳相关.

根据在 $t_0-T\leqslant t\leqslant t_0$ 时间内,对 $Y_1(t)$ 的观察,要求估计 $Y(t_0+h)$、均方误差意义下的导数 $Y^{(p)}(t_0+h)(h\geqslant 0,\ p=1,2,\cdots)$ 以及未知系数 $g_s(0\leqslant s\leqslant r)$,并且要求上述各种待定估计都是均方意义下最优无偏线性估计.

L. A. Zadeh 和 R. Ragazzini[1] 早在 1950 年曾用待定系数法把这一类预报过滤问题归结为解积分方程问题,从而提供了一个工程上的解决方法. 此法在文献[2]的第八章有详细叙述. 1959 年, P. Béthoux[3] 利用 A. M. Яглом 在文献[4]中提供的处理方法,对 $g(t)$ 为一次多项式的情形,给出了一个预报 $Y(t_0+h)$ 的数学方法. 这里,我们用类似的方法,把 P. Béthoux 的结果推广到 $g(t)$ 为任意次多项式的情形,并对 $Y^{(p)}(t_0+h)$ 及系数 $g_s(0\leqslant s\leqslant r)$ 进行了估计. 当过程的谱密度是有理函数时,我们可以看到问题归结为解线性代数方程组.

不妨碍一般性,设 $EX_1(t)=EX(t)=0$. 根据平稳过程的已知理论,得 $X_1(t)$ 的谱表示式[5]

$$X_1(t)=\int e^{it\lambda}d\xi_1(\lambda), \tag{1}$$

式中 $\xi_1(\lambda)$ 为正交增量过程,它和 $X_1(t)$ 的谱函数 $F_{X_1}(x)$ 的关系是:

$$F_{X_1}(x)=E|\xi_1(-\infty,x)|^2.$$

不妨碍一般性,可假设 $t_0=0$.

二、$Y(h)$ 的估計

设 Z 是 $Y(h)$ 的无偏线性估计(这相当于文献[2]的(8.12)),则 Z 可表为

* 本文于 1964 年 5 月 4 日收到.

$$Z=\sum_k \alpha_k Y_1(t_k),\ -T\leqslant t_k\leqslant 0,$$

或者是这种和的均方极限．这里

$$\sum_k \alpha_k=1,\ \sum_k \alpha_k t_k=h,\ \cdots,\ \sum_k \alpha_k t_k^r=h^r.$$

考虑到 $X_1(t)$ 的谱表示式(1)，便知对每个 Z 存在一个 $dF_{X_1}(x)$ 测度意义下均方可积的函数 $\varphi(\lambda)$，使

$$Z=\int \varphi(\lambda)d\xi_1(\lambda)+\sum_{s=0}^{r} g_s h^s. \tag{2}$$

这里 $\varphi(\lambda)$ 应该是如下的均方极限：

$$\int\left|\varphi(\lambda)-\sum_{k=1}^{k_n} e^{it_{n_k}\lambda}\alpha_{n_k}\right|^2 dF_{X_1}(\lambda)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

$$-T<t_{n_k}<0,\ \sum_{k=1}^{k_n}\alpha_{n_k}=1,\ \cdots,\ \sum_{k=1}^{k_n}\alpha_{n_k}t_{n_k}^r=h^r. \tag{3}$$

我们用 V 表示 Z 的全体，记 H 为二阶矩有穷随机变量组成的希尔伯脱空间(内积 $(X, Y)\equiv EX\bar{Y}$)．显然，V 是 H 中凸的闭子集，存在唯一的 $Z_0\in V$，使

$$E|Z_0-Y(h)|^2=\min_{Z\in V} E|Z-Y(h)|^2.$$

这个 Z_0 就是对 $Y(h)$ 的最优线性无偏估计(参阅文献[4])．

现在证明 Z_0 必满足下列条件 A 和 B：

A. $E[Z_0-Y(h)]\overline{Y_1(t)}=\sum_{k=0}^{r} C_k t^k,\ -T<t<0$

C_k 是和 t 无关的常数；

B. $Z_0\in V$.

只要证明 Z_0 满足条件 A 即可．

任取不同的 t_s，$-T<t_s<0$，$s=1, \cdots, r$．先设 $t\neq t_s$，$s=1, \cdots, r$，$-T<t<0$．从线性方程组

$$\sum_{k=1}^{r+1}\alpha_k=1,$$

$$\sum_{k=1}^{r}\alpha_k t_k+\alpha_{r+1}t=h,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{r}\alpha_k t_k^r+\alpha_{r+1}t^r=h^r,$$

解得

$$\alpha_1=\frac{P_{1r}(t)}{\Delta},\ \cdots,\ \alpha_r=\frac{P_{rr}(t)}{\Delta},\ \alpha_{r+1}=\frac{P}{\Delta}.$$

$P_{kr}(t)$ 是 t 的 r 次多项式，$k=1, \cdots, r$，P 是常数，行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_r & t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^r & t_2^r & \cdots & t_r^r & t^r \end{vmatrix} \neq 0.$$

由于 $\frac{P}{\Delta} Y_1(t) + \sum_{k=1}^{r} \frac{P_{k,r}(t)}{\Delta} Y_1(t_k)$ 是 V 中的元素，而 $Z_0 - Y(h) \perp V - Z_0$，故

$$E[Z_0 - Y(h)]\overline{\left[\frac{P}{\Delta} Y_1(t) + \sum_{k=1}^{r} \frac{P_{k,r}(t)}{\Delta} Y_1(t_k) - Z_0\right]} = 0$$

或

$$E[Z_0 - Y(h)]\overline{Y_1(t)} = \sum_{k=0}^{r} C_k t^k. \tag{4}$$

显然，C_k, $k = 0, \cdots, r$ 是和 t 无关的常数.

现设 t 等于 $t_1, \cdots, t_r$ 中的某一个，例如 $t = t_l$, $1 \leqslant l \leqslant r$. 这时可取 $t_l' \neq t_k$, $k = 1, \cdots, r$, 并使 t_l' 和 t_l 相当靠近，在 t_l' 和 t_l 组成的区间内不再包含其他的 t_k, $k \neq l$. 用 $(t_1 \cdots, t_{l-1}, t_l', t_{l+1}, \cdots t_r)$ 代替 $(t_1, \cdots, t_{l-1}, t_l, t_{l+1}, \cdots, t_r)$, 同样可得式 (4). 应注意，这时 $C_k (0 \leqslant k \leqslant r)$ 是 t_l' 的连续函数，故令 $t_l' \to t_l$, 可得式(4).

这样就证明了 Z_0 满足条件 A，而 Z_0 满足条件 B 则是很显然的.

若某个 Z 满足

$$E[Z - Y(h)]\overline{Y_1(t)} = \sum_{k=0}^{r} C_k t^k, \quad -T < t < 0$$

$$Z \in V,$$

则 $Z = Z_0$ (注意到条件 A，对一切 t 均有 $E[Z_0 - Z]\overline{Y_1(t)} = 0$, $-T < t < 0$). 这样我们就证明了条件 A 和 B 是使 Z_0 为最优线性无偏估计的必要和充分条件.

设 $X_1(t)$ 的谱函数 $F_{X_1}(x)$ 以及 $X(t)$ 和 $X_1(t)$ 的互相关函数的谱函数 $F_{XX_1}(x)$ 都是绝对连续的 ($f_{X_1}(x)$ 和 $f_{XX_1}(x)$ 是其导数，即谱密度).

根据式 (2)，设和 Z_0 相应的谱特性为 $\varphi_0(\lambda)$，则可将条件 A 改写成(参见文献 [2] 的 (8.23))

$$\int e^{i\lambda t}[\varphi_0(\lambda) f_{X_1}(\lambda) - e^{i\lambda h} f_{XX_1}(\lambda)] d\lambda + \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+1} C_k t^k = 0,$$

$$T > t > 0.$$

此时应注意到

$$1 = \int e^{it\lambda} \cdot \frac{1 - e^{-iT\lambda}}{2\pi i \lambda} d\lambda = \int e^{it\lambda} f_0(\lambda) d\lambda,$$

$$t = \int e^{it\lambda} \left[\frac{e^{-i\lambda T} - 1}{2\pi \lambda^2} - \frac{T e^{-i\lambda T}}{2\pi i \lambda}\right] d\lambda = \int e^{it\lambda} f_1(\lambda) d\lambda,$$

$$t^2 = \int e^{it\lambda} \left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{-i\lambda T} - 1}{i\lambda^3}\right) + \frac{1}{\pi} \frac{T e^{-i\lambda T}}{\lambda^2} - \frac{T^2 e^{-i\lambda T}}{2\pi i \lambda}\right] d\lambda =$$

$$= \int e^{it\lambda} f_2(\lambda) d\lambda,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$t^r = \int e^{it\lambda} f_r(\lambda) d\lambda, \quad 0 < t < T.$$

上述等式是不难证明的，例如对 t^r 的积分表示式 $\int e^{it\lambda} f_r(\lambda) d\lambda$，可根据分布函数

$$F_r(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant -T, \\ \dfrac{T^r - (-t)^r}{T^r}, & -T < t \leqslant 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

算出 $F_r(t)$ 的特征函数 $\int e^{i\lambda t} dF_r(t)$，然后再用逆转公式去掉一些积分为零的函数．可以发现 $f_r(\lambda)$ 所包含的指数函数只有 $e^{-i\lambda T}$．

这样就可将条件 A 和 B 改写为

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \psi(\lambda) d\lambda = 0,\ 0 < t < T,$

$$\psi(\lambda) = \varphi_0(\lambda) f_{X_1}(\lambda) - e^{i\lambda h} f_{XX_1}(\lambda) + \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+1} C_k f_k(\lambda); \tag{5}$$

b) $\varphi_0(\lambda)$ 满足式(3)．

使 $\varphi_0(\lambda)$ 满足条件 a) 和 b) 的充分条件是：

a′) $\varphi_0(\lambda)$ 能扩展成形如

$$\varphi_0(\lambda) = \varphi_1(\lambda) + e^{-i\lambda T} \varphi_2(\lambda)$$

的整函数，这里 $\varphi_1(\lambda)$ 和 $\varphi_2(\lambda)$ 是有理函数，且

$$\int |\varphi_0(\lambda)|^2 f_{X_1}(\lambda) d\lambda < \infty;$$

b′) $\varphi_0(0) = 1,\ \varphi_0'(0) = ih,\ \varphi_0''(0) = -h^2, \cdots \varphi_0^{(r)}(0) = (i)^r h^r;$

c′) $\psi(\lambda)$ 能表示成 $\psi_1(\lambda) + e^{-i\lambda T}\psi_2(\lambda)$，且 $\psi_1(\lambda)$ 能在上半平面扩展解析函数，$\psi_2(\lambda)$ 能在下半平面扩展成解析函数，同时，当 $|\lambda| \to \infty$ 时，在相应的半平面上，它们一致地趋近于零．

可以证明[4] c′) 保证了 a)，a′) 保证了 $\varphi_0(\lambda)$ 属于由 $\{e^{it\lambda},\ -T \leqslant t < 0\}$ 依测度 $f_{X_1}(\lambda)d\lambda$ 组成的均方意义下的线性包，b′) 保证了估计的无偏性．

下面将证明，当 $f_{X_1}(\lambda)$ 和 $f_{XX_1}(\lambda)$ 为有理函数且 $f_{X_1}(\lambda) \neq 0$ 时，可找到满足 a′)，b′)，c′) 的 $\varphi_0(\lambda)$．这时，问题归结为解线性代数方程组(参见文献[2]的第八章 § 4、5、6)．

设

$$f_{X_1}(\lambda) = B_0 \frac{B(\lambda)\cdot \tilde{B}(\lambda)}{A(\lambda)\cdot \tilde{A}(\lambda)},\quad f_{XX_1}(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\Gamma(\lambda)\cdot \tilde{\Gamma}(\lambda)},$$

式中 $B_0 > 0,\ B(\lambda) = (\lambda - \beta_1)\cdot \cdots \cdot (\lambda - \beta_m),$

$\tilde{B}(\lambda) = (\lambda - \bar{\beta}_1)\cdot \cdots \cdot (\lambda - \bar{\beta}_m),\ \mathrm{Im}\,\beta_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m;$

$A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\cdot \cdots \cdot (\lambda - \alpha_n),$

$\tilde{A}(\lambda) = (\lambda - \bar{\alpha}_1)\cdot \cdots \cdot (\lambda - \bar{\alpha}_n),\ \mathrm{Im}\,\alpha_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n;$

$\Gamma(\lambda) = (\lambda - \gamma_1)\cdot \cdots \cdot (\lambda - \gamma_l),$

$\tilde{\Gamma}(\lambda) = (\lambda - \bar{\gamma}_1)\cdot \cdots \cdot (\lambda - \bar{\gamma}_l),\ \mathrm{Im}\,\gamma_i > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant l;$

$D(\lambda)$ 是 k 阶多项式，$n > m,\ 2l > k + 1.$

用以下形式找 $\varphi_1(\lambda)$ 和 $\varphi_2(\lambda)$:

$$\varphi_1(\lambda)=\frac{\omega_1(\lambda)}{B(\lambda)\cdot\widetilde{B}(\lambda)\cdot\Gamma(\lambda)\cdot\lambda^{r+1}},$$

$$\varphi_2(\lambda)=\frac{\omega_2(\lambda)}{B(\lambda)\cdot\widetilde{B}(\lambda)\cdot\Gamma(\lambda)\cdot\lambda^{r+1}}.$$

$\omega_1(\lambda)$ 和 $\omega_2(\lambda)$ 都是 $m+n+l+r$ 阶多项式，它们的系数待定，另外，C_k, $0\leqslant k\leqslant r$ 也要确定,故共有 $2(m+n+l)+3(r+1)$ 个待定常数.

从条件 b′) 可得到 $r+1$ 个方程，因此还有 $2(m+n+l)+2(r+1)$ 个待定常数.

把

$$\varphi_0(\lambda)=\frac{\omega_1(\lambda)+e^{-i\lambda T}\omega_2(\lambda)}{B(\lambda)\cdot\widetilde{B}(\lambda)\cdot\Gamma(\lambda)\cdot\lambda^{r+1}}$$

代入式(5),归并含有乘子 $e^{-i\lambda T}$ 诸项,便有

$$\psi(\lambda)=\frac{g_1(\lambda)}{A(\lambda)\cdot A(\lambda)\cdot\Gamma(\lambda)\cdot\tilde{\Gamma}(\lambda)\cdot\lambda^{r+1}}+e^{-iT\lambda}\frac{g_2(\lambda)}{A(\lambda)\cdot\widetilde{A}(\lambda)\cdot\Gamma(\lambda)\cdot\lambda^{r+1}},$$

式中 $g_1(\lambda)$ 和 $g_2(\lambda)$ 是整函数.

令

$$\psi_1(\lambda)=\frac{g_1(\lambda)}{A(\lambda)\cdot\widetilde{A}(\lambda)\cdot\Gamma(\lambda)\cdot\tilde{\Gamma}(\lambda)\cdot\lambda^{r+1}},$$

$$\psi_2(\lambda)=\frac{g_2(\lambda)}{A(\lambda)\cdot\widetilde{A}(\lambda)\cdot\Gamma(\lambda)\cdot\lambda^{r+1}}.$$

α_i, β_j, γ_k, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$, $1\leqslant k\leqslant l$ 都是不同的,出现重根时，下面的讨论应稍加修改(考虑导数),但这些细节这里不再赘述.

为使 $\varphi_0(\lambda)$ 是整函数,应要求当

$$\lambda=\beta_1,\cdots,\beta_m,\bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_l$$

时,

$$\omega_1(\lambda)+e^{-iT\lambda}\omega_2(\lambda)=0,$$

以及当

$$\lambda=0$$

时,

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\omega_1(\lambda)+e^{-i\lambda T}\omega_2(\lambda)\right]=0,\ k=0,1,\cdots r. \tag{6}$$

上述条件给出了 $2m+l+r+1$ 个方程.

为使 $\psi_1(\lambda)$ 在上半平面解析,必需要求

$$g_1(\lambda)=0,\ \lambda=\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\gamma_1,\cdots,\gamma_l,\qquad \left.\frac{d^kg_1(\lambda)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=0}=0,\ k=0,1,\cdots,r. \tag{7}$$

上述条件决定了 $n+l+r+1$ 个方程. $\psi_2(\lambda)$ 应在下半平面解析,故

$$g_2(\lambda)=0,\ \lambda=\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n,\qquad \left.\frac{d^kg_2(\lambda)}{d\lambda^k}\right|_{\lambda=0}=0,\ k=0,1,\cdots,r. \tag{8}$$

由此又得到 $n+r+1$ 个方程.

不难验证，在由式(6)，(7)，(8)决定的 $3(r+1)$ 个方程中，只有 $2(r+1)$ 个线性独立. 这样为了决定 $2(m+n+l)+2(r+1)$ 个未知常数，就恰好得到同样数目的线性方程，也就是说，能够找到满足条件的 $\omega_1(\lambda)$ 和 $\omega_2(\lambda)$. 故满足 a')，b') 及 c') 的 $\varphi_0(\lambda)$，可由解线性代数方程组求得.

三、p 阶导数 $Y^{(p)}(h)$ 的估計

假设 $X^{(p)}(t)$ 是平稳的，并和 $X_1(t)$ 平稳相关，此时可设 $EX^{(p)}(t)=0$.

要求根据 $Y_1(t)$，$-T\leqslant t\leqslant 0$，对

$$Y^{(p)}(h)=\sum_{s=p}^{r}\frac{s!}{(s-p)!}g_s h^{s-p}+X^{(p)}(h)$$

作线性无偏估计.

对 $Y^{(p)}(h)$ 的线性无偏估计，Z 可表示为

$$Z=\Sigma\alpha_k Y_1(t_k),\ -T\leqslant t_k\leqslant 0,$$

或者是这种和的均方极限. 系数 α_k 应满足下列条件:

$$\sum_k \alpha_k t_k^s=0,\ 0\leqslant s\leqslant p-1,$$

$$\sum_k \alpha_k t_k^s=\frac{s!}{(s-p)!}h^{s-p},\ p\leqslant s\leqslant r.$$

然后，可以和上面作类似的讨论，只是应把 $f_{XX_1}(\lambda)$ 换成 $X^{(p)}(t)$ 和 $X_1(t)$ 互相关函数的谱密度，而条件 b') 则应改成:

$$\varphi_0^{(s)}(0)=0,\ 0\leqslant s\leqslant p-1;$$

$$\varphi_0^{(s)}(0)=\frac{s!}{(s-p)!}(i)^s h^{s-p},\ p\leqslant s\leqslant r.$$

四、多項式系数的估計

根据对 $Y_1(t)$，$-T\leqslant t\leqslant 0$ 的观察，对 g_s，$0\leqslant s\leqslant r$ 作线性无偏估计.

对 g_s 的无偏线性估计，Z_s 可表示为

$$Z_s=\sum_k \alpha_k Y_1(t_k),\ -T\leqslant t_k\leqslant 0,$$

或者是这种和的均方极限. 系数 α_k 应满足下列条件:

$$\sum_k \alpha_k t_k^s=1,\ \sum_k \alpha_k t_k^l=0,\ 0\leqslant l\leqslant r,\ l\neq s.$$

这些 Z_s 组成一个 H 中的凸闭子集 V_s，故存在唯一的 $Z_{s0}\in V_s$，使

$$E|Z_{s0}-g_s|^2=\min_{Z_s\in V_s}E|Z_s-g_s|^2.$$

和第二部分中的讨论类似，可知 Z_{s0} 由

A. $E(Z_{s0}-g_s)\overline{Y}_1(t)=\sum_{k=0}^{r}C_k t^k,\ -T<t<0,$

B. $Z_{s0}\in V_s$

两条件决定.

设

$$Z_{s0} = \int \varphi_{s0}(\lambda) d\xi_1(\lambda) + g_s.$$

$\varphi_{s0}(\lambda)$ 和第二部分中的 $\varphi_0(\lambda)$ 求法相似,不过这里的

$$\phi(\lambda) = \varphi_{s0}(\lambda) f_{X_1}(\lambda) + \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+1} C_k f_k(\lambda),$$

而条件 b′) 则应改写成:

$$\varphi_{s0}^{(s)}(0) = (i)^s,\ \varphi_{s0}^{(l)}(0) = 0,\ 0 \leqslant l \leqslant r,\ l \neq s.$$

参 考 文 献

[1] Zadeh, L. A., Ragazzini, R., An Extension of Wiener's Theory of Prediction, *J. Appl. Phys.*, **21** (1950), No. 7, 645—655.

[2] Солодовников, В. В., Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, 1960.

[3] Béthoux, P., Filtrage d'une fonction Aléatoire dont la moyenne est une fonction linéaire, *Comptes Rendus Acad. Sci.,* **248** (1959), 3685—3686.

[4] Яглом, А. М., Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью, Труды Моск. мат. общества, т. 4, (1955г), 333—374.

[5] Doob, J. L., Stochastic Processes, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953, Ch. XI.

PREDICTION AND FILTERING PROBLEM FOR SIGNALS OF STATIONARY RANDOM PROCESS WITH POLYNOMIAL SUPERIMPOSED

CHEN HAN-FU AN WAN-FU

In this paper signals of stationary random process superimposed with polynomial of unknown coefficients are considered and the necessary and sufficient conditions which the spectral characteristics in the equation used to estimate those coefficients of the polynomial as well as in the optimal prediction in the sense of mean-squared errors must satisfy are given. When the spectral density of the stationary random process is rational, it is shown that the problem of determining the optimal spectral characteristics can be reduced to that of solving a set of linear algebraic equations.