

非线性自动控制系统若干问题的 对数分析方法*

项国波

摘要

本文讨论了下列三个问题的对数分析方法:

在第一个问题中,讨论了非线性自动控制系统单频强迫振荡的对数分析方法,给出了一个可以简化求解强迫振荡参数 A_B 和 φ 的算图(图2)以及一个分析单频强迫振荡稳定性的对数稳定判据。

在第二个问题中,讨论了如何确定正弦信号对缓变信号在对称非线性系统中通行时所带来的影响,其中包括误差、稳定性等问题。

在第三个问题中,讨论了如何确定强迫振荡的振幅 B 和频率 Ω_B 以及缓变非线性元件的非线性特性,从而提高系统的动态性能。

一、问题的提出

众所周知,应用对数幅相特性可以使线性系统的计算工作大为简化。目前以谐波线性化原理为基础的非线性系统的研究也已经获得相当广泛的应用和发展。本文现提出非线性系统的单频强迫振荡的对数分析方法,讨论了正弦扰动信号对缓变信号在系统中通行时所引起的动态性能的影响,确立了研究这些问题所必要的若干对数稳定判据,同时还讨论了根据给定的品质指标选择外加正弦信号的振幅和频率的综合方法。因为所有的计算都应用了典型化的或者标准化的对数特性,因此称之为对数分析方法。

二、单频强迫振荡

1. 确定单频强迫振荡振幅 A_B 和相位 φ 的基本方程

任一具有单个对称非线性环节的自动控制系统,它的结构图经过适当的变换后,可写成图1所示的形式。对这一系统存在有如下方程:

$$x_1 + W_D(p)F(x_1, px_1) = D(p)f(t), \quad (1)$$

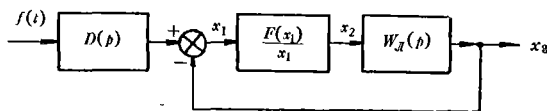


图 1.

* 本文于1963年3月1日收到;1963年8月1日收到修改稿。

式中 $p = \frac{d}{dt}$, $W_L(p)$ 和 $D(p)$ 为线性组传递函数, $F(x_1, px_1)$ 为非线性特性, 而周期函数 $f(t)$ 则取为

$$f(t) = B \sin \Omega_B t. \quad (2)$$

当方程(1)满足强制牵入同步条件^[3]时, 根据谐波线性化原理, 方程(1)的解 x_1 的一次近似值可以表示成:

$$x_1^* = A_B \sin(\Omega_B t + \varphi), \quad (3)$$

式中 A_B 为非线性环节输入端的振幅, φ 为 x_1^* 相对于 $f(t)$ 的相位差.

这样, 根据谐波平衡原理, 非线性特性 $F(x_1, px_1)$ 可以表示成:

$$F(x_1, px_1) = W_H(A_B, \Omega_B) x_1^*,$$

式中 $W_H(A_B, \Omega_B)$ 称为非线性特性等效(基波)传递函数:

$$W_H(A_B, \Omega_B) = q_H(A_B, \Omega_B) + jq'_H(A_B, \Omega_B),$$

式中

$$\left. \begin{aligned} q_H(A_B, \Omega_B) &= \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} F(A_B \sin \psi, A_B \Omega_B \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q'_H(A_B, \Omega_B) &= \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} F(A_B \sin \psi, A_B \Omega_B \cos \psi) \cos \psi d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

而

$$\psi = \Omega_B t + \varphi.$$

将方程(1)写成复数式, 并利用方程(2)和(3)把它改写成下式:

$$A_B \frac{1 + W_L(j\Omega_B)W_H(A_B, \Omega_B)}{D(j\Omega_B)} = B e^{-j\varphi}. \quad (5)$$

若研究 $F(x_1, px_1) = F(x_1)$ 的情况, 则有 $W_H(A_B, \Omega_B) = W_H(A_B)$. 这时方程(5)可取为

$$A_B \frac{1 + W_L(j\Omega_B)W_H(A_B)}{D(j\Omega_B)} = B e^{-j\varphi}. \quad \left(\text{当 } \frac{\partial F}{\partial px_1} = 0 \text{ 时} \right) \quad (6)$$

方程(5)或(6)称为确定 A_B 和 φ 的基本方程. 对它们取对数, 便得到对数基本方程:

$$\left. \begin{aligned} 20 \lg A_B + 20 \lg H_\phi(A_B, \Omega_B) - 20 \lg H_D(\Omega_B) &= 20 \lg B, \\ \theta_\phi(A_B, \Omega_B) - \theta_D(\Omega_B) &= -\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} H_\phi(A_B, \Omega_B) &= |W_\phi(A_B, \Omega_B)| = |1 + W_L(j\Omega_B)W_H(A_B)|, \\ \theta_\phi(A_B, \Omega_B) &= \arg W_\phi(A_B, \Omega_B) = \arg[1 + W_L(j\Omega_B)W_H(A_B)], \\ H_D(\Omega_B) &= |D(j\Omega_B)|, \theta_D(\Omega_B) = \arg D(j\Omega_B). \end{aligned}$$

当 B 和 Ω_B 给定时, 用方程组(7)即可确定 A_B 和 φ ; 反之亦然.

2. 一个算图

方程组(7)中所包含的对数特性, 除了

$$W_\phi(A_B, \Omega_B) = 1 + W_L(j\Omega_B)W_H(A_B) \quad (8)$$

的对数特性外, 其余的对数特性均容易绘制.

把方程(8)改写成下式:

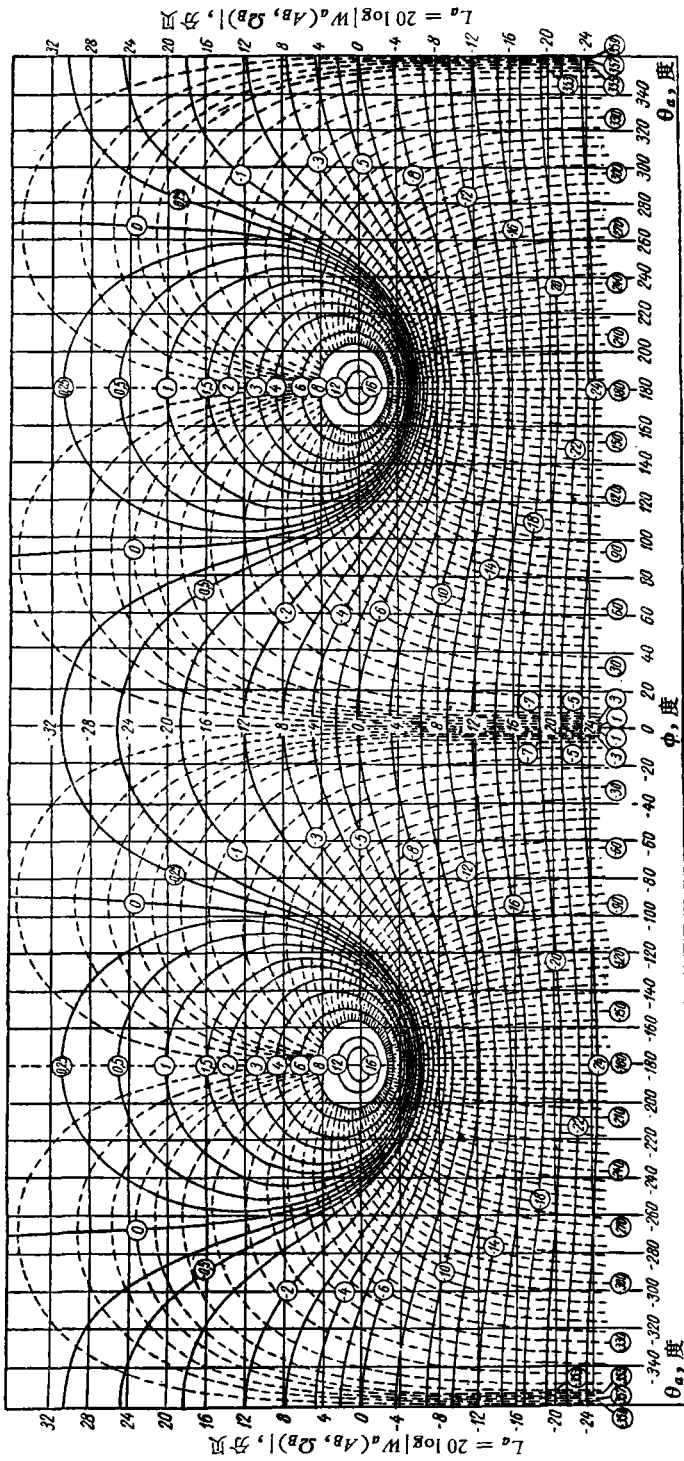


图 2.

$$W_\varphi(A_B, \Omega_B) = \frac{1}{W_s(A_B, \Omega_B)}, \quad (9)$$

式中

$$W_s(A_B, \Omega_B) = \frac{W_a(A_B, \Omega_B)}{1 + W_a(A_B, \Omega_B)}, \quad (10)$$

而

$$W_a(A_B, \Omega_B) = \frac{1}{W_L(j\Omega_B)W_H(A_B)}. \quad (11)$$

方程(10)是人们所熟知的开环系统传递函数为 $W_a(A_B, \Omega_B)$ 和闭环系统传递函数为 $W_s(A_B, \Omega_B)$ 之间的关系式,它可以表示成如图2所示的算图。而 $W_a(A_B, \Omega_B)$ 则是图1系统开环状态传递函数 $W_L(j\Omega_B)W_H(A_B, \Omega_B)$ 的倒特性。

因此,应用图2的算图,并根据图1系统开环状态传递函数

$$W_p(A_B, \Omega_B) = W_L(j\Omega_B)W_H(A_B), \quad (12)$$

就可以很方便地绘制出方程(7)中的对数特性,从而求得待解参数 A_B 和 φ 。

3. 对数稳定判据

研究方程(1)稳定性的最经典的办法,是在所求得的解[方程(3)]的附近,引入足够小的增量,然后分析这一增量是否收敛。如果收敛,则对应的解是稳定的;反之,则不稳定。

根据这一原理,给方程(1)的变量 x_1 引入一足够小的增量 Δx_1 , 即

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^*, \quad (13)$$

式中

$$x_1^* = A_B \sin(\Omega_B t + \varphi).$$

将新变量 x_1 代入方程(1)中,则有

$$(x_1^* + \Delta x_1) + W_L(p)F[(x_1^* + \Delta x_1), p(x_1^* + \Delta x_1)] = D(p)f(t). \quad (14)$$

把 $F[(x_1^* + \Delta x_1), p(x_1^* + \Delta x_1)]$ 在解点 x_1^* 附近展开成泰劳级数,并取其一次近似,便得:

$$\left. \begin{aligned} F[(x_1^* + \Delta x_1), p(x_1^* + \Delta x_1)] &= F(x_1^*, px_1^*) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_1=x_1^*} \Delta x_1 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial F}{\partial px_1} \right)_{x_1=x_1^*} p \Delta x_1, \\ F(x_1^* + \Delta x_1) &= F(x_1^*) + \left(\frac{dF}{dx_1} \right)_{x_1=x_1^*} \Delta x_1. \quad \left(\text{当 } \frac{\partial F}{\partial px_1} = 0 \text{ 时} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将上式的值代入方程(14)中,同时考虑到

$$\left. \begin{aligned} x_1^* + W_L(p)F(x_1^*, px_1^*) &= D(p)f(t), \\ x_1^* + W_L(p)F(x_1^*) &= D(p)f(t), \quad \left(\text{当 } \frac{\partial F}{\partial px_1} = 0 \text{ 时} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

则得

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 + W_L(p) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_1=x_1^*} \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial px_1} \right)_{x_1=x_1^*} p \Delta x_1 \right] &= 0, \\ \Delta x_1 + W_L(p) \left(\frac{dF}{dx_1} \right)_{x_1=x_1^*} \Delta x_1 &= 0. \quad \left(\text{当 } \frac{\partial F}{\partial px_1} = 0 \text{ 时} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

于是求得方程(17)的特征方程:

$$\left. \begin{aligned} &1 + W_{\mathcal{L}}(p) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_1=x_1^*} + \left(\frac{\partial F}{\partial p x_1} \right)_{x_1=x_1^*} p \right] = 0, \\ \text{或} &1 + W_{\mathcal{L}}(p) \left(\frac{dF}{dx_1} \right)_{x_1=x_1^*} = 0. \quad \left(\text{当 } \frac{\partial F}{\partial p x_1} = 0 \text{ 时} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

方程(18)是一组具有周期系数的齐次线性方程。严格地分析这种方程所描述的系统的强迫振荡稳定性,尚缺少切实可行的数学工具。因此需求助于一些近似的方法^[3]。

文献[3]应用所谓周期系数平均值 κ 和 κ' 代替方程(18)中的周期系数,从而得到

$$\left. \begin{aligned} &1 + W_{\mathcal{L}}(p) [\kappa + \kappa' p] = 0, \\ \text{或} &1 + W_{\mathcal{L}}(p) \kappa = 0, \quad \left(\text{当 } \frac{\partial F}{\partial p x_1} = 0 \text{ 时} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_1=x_1^*} d\psi, \quad (20a)$$

$$\kappa' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial p x_1} \right)_{x_1=x_1^*} d\psi, \quad (20b)$$

$$\psi = \Omega_B t + \varphi.$$

这一方法的实质是将具有常系数的方程(19)代替具有周期系数的方程(18)。这样处理,便可以应用线性稳定理论中任何一个判据来分析方程(19)所描述的系统的强迫振荡稳定性。

把方程(19)改写成:

$$\left. \begin{aligned} &1 + W_{\mathcal{L}}(p) \kappa (1 + T_H p) = 0, \\ \text{或} &1 + W_{\mathcal{L}}(p) \kappa = 0, \quad \left(\text{当 } \frac{\partial F}{\partial p x_1} = 0 \text{ 时} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

并称

$$W_{H,p}(p) = W_{\mathcal{L}}(p) \kappa (1 + T_H p)$$

为图1系统等效开环状态传递函数,其中

$$T_H = \frac{\kappa'}{\kappa} \quad (22)$$

称为等效时间常数。这样就可以将方程(21)所描述的非线性系统的单频强迫振荡稳定性的对数稳定判据叙述为:

若 $W_{H,p}(p)$ 中没有正实部的复根,且在等效开环状态传递函数 $W_{H,p}(j\Omega_B)$ 的对数幅频特性大于或等于零分贝的所有频段下,其对数相频特性穿越 $-\pi$ 线的正负次数相等或

等于零,则所求得的解是稳定的;否则,便是不稳定的。

4. 举例

现分析图3所示的继电器型随动系统的解及其稳定性。

假定加入系统的外作用为:

$$f(t) = B \sin \Omega_B t,$$

式中 $B = 20$ 伏, $\Omega_B = 10$ 1/秒。现求解强迫振荡的参数 A_B 和 φ 。线性组传递函数为:

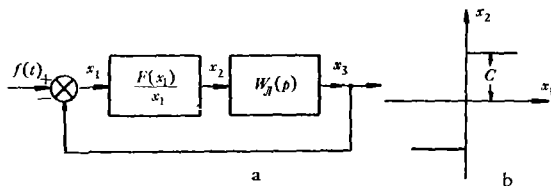


图 3.

$$W_{\mathcal{H}}(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)p},$$

而理想继电器特性(如图 3b 所示)等效传递函数为:

$$W_H(A_B) = \frac{4C}{\pi A_B},$$

式中 $k = 10$ 1/秒, $C = 10$ 伏, $T_1 = 0.01$ 秒.

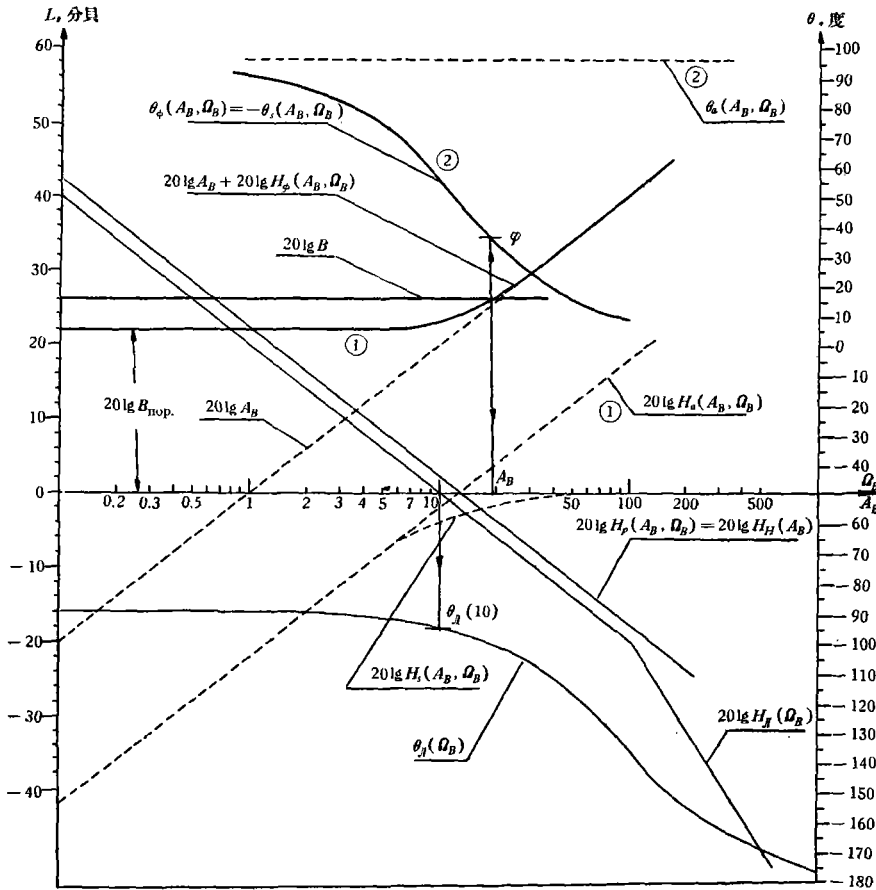


图 4.

根据给定条件,在图 4 上作出方程 (12) 所对应的传递函数对数特性 $20 \lg H_{\mathcal{H}}(\Omega_B)$, $\theta_{\mathcal{H}}(\Omega_B)$ 和 $20 \lg H_H(A_B)$. 对应于 $\Omega_B = 10$ 1/秒,开环状态传递函数的对数特性为:

$$20 \lg H_p(A_B)_{\Omega_B=10} = 20 \lg H_H(A_B),$$

$$\theta_p(A_B)_{\Omega_B=10} = \theta_{\mathcal{H}}(10) = -96^\circ,$$

而

$$20 \lg H_a(A_B)_{\Omega_B=10} = -20 \lg H_p(A_B)_{\Omega_B=10} = -20 \lg H_H(A_B),$$

$$\theta_a(A_B)_{\Omega_B=10} = -\theta_{\mathcal{H}}(10) = 96^\circ,$$

它们分别用虚线 ①和 ②示于图 4 上.

在图 2 的算图上,作出函数

$$20 \lg H_a(A_B)_{\Omega_B=10} = f[\theta_a(A_B)_{\Omega_B=10}]$$

曲线. 它和算图中实线簇和虚线簇的交点分别给出 $20 \lg H_s(A_B)_{\Omega_B=10}$ 和 $\theta_s(A_B)_{\Omega_B=10}$ 的曲线. 于是在图 4 上求得最终的解曲线:

$$20 \lg A_B - 20 \lg H_s(A_B)_{\Omega_B=10} = 20 \lg B, \quad (23)$$

$$\theta_\varphi(A_B)_{\Omega_B=10} = -\theta_s(A_B)_{\Omega_B=10} = -\varphi. \quad (24)$$

图 4 中,用粗实线①表示方程(23)的左边项解曲线, 它和 $20 \lg B$ 的交点确定了 $A_B=18.2$ 伏. 对应于 A_B 值,在 $\theta_\varphi(A_B)$ 曲线上可确定 $\varphi = 38^\circ$. 强制牵入同步最低限 $B_{\text{ноп}} = 12.3$ 伏. 可以证明,提高 Ω_B 值,能够显著地改善牵入同步条件.

根据图 3b 的特性和方程(20a),求得

$$\kappa = \frac{2C}{\pi A_B}, \quad (25)$$

对应于 $A_B = 18.2$ 伏, $C = 10$ 伏, $20 \lg \kappa = -9.1$ 分贝,求得

$$20 \lg H_{H,\varphi}(\Omega_B) + 20 \lg \kappa = 0 \text{ 分贝}$$

时, $\theta_H(\Omega_B) = -90^\circ$, 它大于 $-\pi$, 故所求的解是稳定的.

方程(25)指出,提高 A_B 值,亦即提高 B 值,可以提高强迫振荡的稳定性.

三、正弦扰动信号对缓变信号在系统中通行时的影响

1. 基本方程

对于图 5 的系统,存在如下方程:

$$x_1 + W_H(p)F(x_1) = D_1(p)f_1(t) + D_2(p)f_2(t), \quad (26)$$

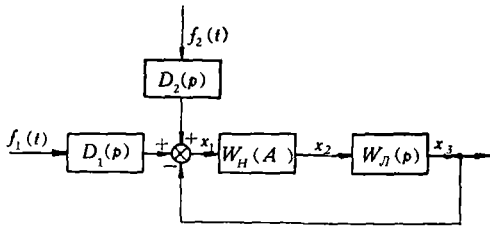


图 5.

式中 $f_2(t)$ 为正弦扰动信号,它具有方程(2)形式, $f_1(t)$ 为在系统中通行的有用信号,并假定它在 $T = \frac{2\pi}{\Omega_B}$ 的时间间隔内近似等于常数. 这时,根据谐波线性化原理,方程(26)的一次近似解 x_1 为:

$$x_1 = x_1^0 + x_1^*, \quad (27)$$

式中 x_1^0 称为直流信号或缓变分量, x_1^* 称为交流分量,它具有方程(3)的形式. 这时 φ 为 x_1^* 相对于 $f_2(t)$ 的滞后相位.

对应于方程(27)的解,方程(26)可以分解成对应于缓变信号 $f_1(t)$ 的解的方程

$$x_1^0 + W_H^0(x_1^0, A_B)W_H(p) = D_1(p)f_1(t) \quad (28)$$

和对应于交流信号 $f_2(t)$ 的解的方程

$$x_1^* + W_H^*(x_1^0, A_B)W_H(j\Omega_B)x_1^* = D_2(j\Omega_B)f_2(t), \quad (29)$$

其中

$$W_H^0(x_1^0, A_B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x_1^0 + A_B \sin \psi) d\psi, \quad (30)$$

$$W_H^*(x_1^0, A_B) = q_H(x_1^0, A_B) + jq_H'(x_1^0, A_B), \quad (31)$$

而

$$q_H(x_1^0, A_B) = \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} F(x_1^0 + A_B \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (32)$$

$$q'_H(x_1^0, A_B) = \frac{1}{\pi A_B} \int_0^{2\pi} F(x_1^0 + A_B \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (33)$$

$$\psi = \Omega_B t + \varphi.$$

方程(28)和(29)便是分析正弦扰动信号对缓变信号在系统中通行时产生的影响的基本方程。

2. 交直流静态偏差

从外形上看,方程(29)和方程(1)的复数式[式(5)和式(6)]具有相同形式,因此利用第一节的结果,对不同的 x_1^0 (=常数)值,求得方程(29)的解 x_1^* 的参数 A_B 和 φ 为:

$$A_B = Z_A(x_1^0, B, \Omega_B, \mu), \quad (34a)$$

$$\varphi = Z_\varphi(x_1^0, B, \Omega_B, \mu), \quad (34b)$$

式中 μ 表示图 5 系统的参数总体值,应该指出,方程(34)不是交流解的最终值,因为 x_1^0 目前仍是方程(28)的待解值。

把方程(34a)的 A_B 值代入方程(28)中,便得描述缓变过程的动态方程

$$x_1^0 + W_H^0(x_1^0, B, \Omega_B, \mu)W_{\mathcal{L}}(p) = D_1(p)f_1(t). \quad (35)$$

这里只有唯一待解值 x_1^0 , 故它是可解方程。

应该指出,对于大量非线性特性来说,函数 W_H^0 是 x_1^0 连续可微函数,故可近似地表达为

$$W_H^0(x_1^0, B, \Omega_B, \mu) = k_H x_1^0, \quad (36)$$

式中 k_H 称为非线性特性强迫振荡线性化系数,它取为

$$k_H = \left. \frac{\partial W_H^0(x_1^0, B, \Omega_B, \mu)}{\partial x_1^0} \right|_{x_1^0 = x_c^0}, \quad (37)$$

式中, x_c^0 是方程(35)的静态解。

考虑到方程(36),可将方程(35)取为

$$x_1^0 + k_H(x_c^0, B, \Omega_B, \mu)W_{\mathcal{L}}(p)x_1^0 = D_1(p)f_1(t). \quad (38)$$

方程(38)称为非线性方程(35)强迫振荡线性化方程。用线性方法求其解,

$$x_1^0 = x_c^0 = Y(B, \Omega_B, \mu, f_1(t)). \quad (39)$$

式(39)指出,直流偏差 x_1^0 值不仅和缓变信号 $f_1(t)$ 有关,而且还和扰动信号 $f_2(t)$ 的振幅及频率有关。

把式(39)的 x_1^0 值代入式(34)中,便得交流静态偏差 x_1^* 的最终解:

$$A_B = Z_A(B, \Omega_B, \mu, f_1(t)), \quad (40a)$$

$$\varphi = Z_\varphi(B, \Omega_B, \mu, f_1(t)). \quad (40b)$$

上式指出,交流偏差 x_1^* 值,不仅和交流信号 $f_2(t)$ 有关,而且还和缓变信号 $f_1(t)$ 有关。

3. 缓变信号的对数稳定判据

缓变信号的动态性能取决于式(38),后者的特征方程为:

$$1 + k_H(x_c^0, B, \Omega_B, \mu)W_{\mathcal{L}}(p) = 0. \quad (41)$$

作出方程(41)所对应的开环系统传递函数

$$k_H(x_c^0, B, \Omega_B, \mu)W_{\mathcal{L}}(j\Omega_B) = 0 \quad (42)$$

的对数幅相特性, 便可用线性对数稳定判据^[5]研究扰动信号 $f_2(t)$ 对缓变信号 $f_1(t)$ 在系统中通行时的稳定性的影响。

4. 缓变信号的稳定度 ξ

如果不仅需要考虑扰动信号对缓变信号稳定性的影响, 而且还要求分析 $f_1(t)$ 在系统中稳定衰减过程的速度, 则需确定方程(41)中的稳定度 ξ 的大小。令 $s = \xi + j\omega$ 代替方程(41)中的 $p = j\omega$, 便求得描述缓变信号 $f_1(t)$ 稳定度的特征方程:

$$1 + k_H(x_c^0, B, \Omega_B, \mu)W_{\mathcal{L}}(s) = 0. \quad (43)$$

应用 $s = \xi + j\omega$ 和 $p = j\omega$ 的变换关系^[2,10], 可把 $W_{\mathcal{L}}(\xi + j\omega)$ 变换成由典型环节组成的 $W_{\mathcal{L},\xi}(j\omega)$ 。因此, 作出开环系统传递函数

$$k_H(x_c^0, B, \Omega_B, \mu)W_{\mathcal{L},\xi}(j\omega) \quad (44)$$

的对数幅相特性, 应用线性对数稳定判据, 就可确定 ξ 值, 从而能够分析扰动信号 $f_2(t)$ 对缓变信号衰减速度的影响。

5. 交流信号的对数稳定判据

应该指出, 在上述分析中, 我们都假定交流解[方程(40)]是稳定的, 没有证明如何判别的稳定性。现分析方程(26)。

引入下标“0”表示方程(26)的未受扰动(除 $f_2(t)$ 以外的其他扰动信号)时的稳态解, 亦即

$$x_{1,0} = x_{1,0}^* + x_{1,0}^0, \quad [x_{1,0}^* = A_B \sin(\Omega_B + \varphi)]$$

式中 $x_{1,0}^0$, A_B 和 φ 分别对应于方程(39)和(40)所确定的值。用不加下标“0”的 x_1 表示受扰动后的坐标值:

$$x_1 = x_1^* + x_1^0,$$

由于已经假定在 $T = \frac{2\pi}{\Omega_B}$ 的时间间隔内, $f_1(t)$ 近似等于常数, 故有

$$x_1^0 \approx x_{1,0}^0.$$

考虑到这个关系, 可将 x_1 的增量写成

$$\Delta x_1 = x_1 - x_{1,0} \approx x_1^* - x_{1,0}^* = \Delta x_1^*,$$

式中 Δx_1^* 是交流分量的小增量, 故 x_1 可写成:

$$x_1 = x_{1,0} + \Delta x_1 \approx x_{1,0}^* + x_{1,0}^0 + \Delta x_1^*.$$

将上式的 x_1 值代入方程(26)中, 并将 $F(x_1)$ 在解点 $x_{1,0}$ 附近展开成泰劳级数, 取一次近似值代入方程(26)中, 则得

$$\begin{aligned} x_{1,0} + \Delta x_1^* + W_{\mathcal{L}}(p) \left[F(x_{1,0}) + \left. \left(\frac{dF(x)}{dx_1} \right) \right|_{x_1=x_{1,0}} \Delta x_1^* \right] \\ = D_1(p)f_1(t) + D_2(p)f_2(t). \end{aligned} \quad (45)$$

考虑到

$$x_{1,0} + W_{\mathcal{L}}(p)F(x_{1,0}) = D_1(p)f_1(t) + D_2(p)f_2(t),$$

于是便可求得分析交流信号稳定性的特征方程

$$1 + W_{\mathcal{L}}(p) \left. \frac{dF(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=x_{1,0}} = 0. \quad (46)$$

方程(45)是一个带有周期系数的綫性方程,且周期系数

$$\left. \frac{dF(x_1)}{dx} \right|_{x_1=x_{1,0}} \quad (47)$$

不仅和交流信号有关,而且还与緩变信号有关。但在 x_1^0 趋于零或 $A_B \gg x_1^0$ 的两种情况下,对大量的非綫性特性来说, x_1^0 的影响可略而不計。因此可应用判別单頻強迫振蕩对数稳定判据来判別带有緩变信号时单頻強迫振蕩的稳定性。

四、按照給定的品质指标选择 $f_2(t)$ 参数

有意識地引入 $f_2(t)$ 用来改善系統对緩变信号而言的动特性,这一方法可用来輾平非綫性特性,消除停滞、跳跃或危害性的自振等現象,使系統对通行緩变信号而言具有优良的特性。

1. 按照給定的稳定裕度选择 $f_2(t)$ 的参数 B

当对緩变信号而言的稳定裕度給定时,方程(44)便給出满足这一要求的 $k_H(x_c^0, B, \Omega_B, \mu)$ 值。由于 B 是待解值,故将 k_H 表示成 $k_H(x_c^0, A_B, \mu)$ 是合适的。这时,依据方程(44)的对数特性求得满足給定稳定裕度的

$$k_H = k_H(x_c^0, A_B) \quad (48)$$

值,从而求得

$$A_B = A_B(x_c^0, k_H). \quad (49)$$

在一般情况下,需要解出 x_c^0 后方能最終确定 A_B 值。但是当 x_c^0 趋于零,或 $A_B \gg x_c^0$ 时,

$$k_H = \left. \frac{\partial W_H^0(x_1^0, A_B)}{\partial x_1^0} \right|_{x_1^0=0}, \quad (50)$$

故可得

$$A_B = A_B(k_H). \quad (51)$$

根据上式的 A_B 值,应用第二节的方法即可求得 B 值。

2. 按照給定的静态偏差选择 $f_2(t)$ 的参数 B 和 Ω_B

利用 $f_2(t)$ 改善系統对緩变信号而言的稳定性时,还需保証在系統輸出端产生的交流偏差 x_3^* 充分小,即

$$x_3^* \approx 0. \quad (52)$$

根据图 5 的系統,这时有

$$D_2(j\Omega_B)f_2(t) \approx x_1^*, \quad (53)$$

它对应于方程(29)中的

$$W_H^*(x_1^0, A_B)W_{II}(j\Omega_B) = 0, \quad (54)$$

式中 A_B 取决于方程(51)。作出方程(54)的对数特性,在对数幅特性充分小的频段中,选取一个 Ω_B , 它便是保証交流偏差 x_1^* 充分小的外加强迫振蕩頻率,其通式为

$$\Omega_B = \Omega_B(x_1^0, A_B). \quad (55)$$

当 x_1^0 趋于零,或 $A_B \gg x_1^0$, x_1^0 可略而不計,于是便有

$$\Omega_B = \Omega_B(A_B). \quad (56)$$

这时, B 和 A_B 的关系可确定如下:

因

$$f_2(t) = \frac{B}{A_B} x_1^* e^{-i\varphi}, \quad (57)$$

故方程(53)可取为

$$D_2(j\Omega_B) \frac{B}{A_B} e^{-j\varphi} = 1. \quad (58)$$

作出方程(58)的对数特性, 使得

$$20 \lg B = 20 \lg A_B - 20 \lg D_2(j\Omega_B), \quad (59)$$

式中 Ω_B 取决于方程(55)或(56)。当 $f_2(t)$ 是直接加在非线性输入端时, 则有

$$B = A_B. \quad (60)$$

上面只讨论了两种最简单情况。实际上, 在振动线性化后, 可以应用任何线性方法, 根据给定的品质指标来选择 $f_2(t)$ 的参数。

应用这里所叙述的综合方法和线性组结构综合相配合, 可使系统对缓变信号而言具有良好的性能。

五、结 束 语

由上可见, 对数方法不仅适用于研究线性系统, 而且也可用来研究非线性系统, 分析工作是在应用一些解的曲线基础上进行的。除了线性组对数频率特性已为人们所熟知外, 还引入了具有简单继电器特性的非线性等效传递函数 $W_H(A_B)$ 和 $W_H^*(x_1^0, A_B)$ 的对数特性、周期系数平均值 x 和 x' 的对数特性以及非线性特性振动线性化系数 k_H 的对数特性等。对于大量的非线性特性, 它们的对数特性均可绘制成标准化的对数特性, 以备求解时选用。

参 考 文 献

- [1] 项国波, 非线性自动调整系统自振荡之对数分析法, 福州大学学报, 1962年, 总第三期, 第83—102页。
- [2] 项国波, 非线性自动调整系统近于正弦自振荡过渡过程的对数分析法, 福州大学学报, 1964年, 总第六期。
- [3] Попов, Е. П., Польшов, И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, § 1.9, стр. 74—81; § 9.1, стр. 644—652; § 9.5, стр. 680—689, 1960.
- [4] Васильев, А. А., Метод исследования автоколебаний в релейных системах автоматического регулирования по логарифмическим характеристикам, Автоматика и Телемеханика, 23 (1962), № 8, 1044—1057.
- [5] Солодовников, В. В., Основы автоматического регулирования, Машгиз, 1954, § 7.8, стр. 303—317. (В. В. 索洛多夫尼科夫, 自动调整原理, 王众託译, 水利电力出版社, 北京, 1957.)
- [6] Максимов, А. Д., К теории вибрационного сглаживания нелинейных характеристик систем автоматического управления при помощи вынужденных колебаний, Автоматическое управление и вычислительная техника, выпуск 2, Машгиз, 1959, стр. 139—166.
- [7] Айзерман, М. А., Приближенное определение вынужденных колебаний при наличии внешнего периодического воздействия методом гармонического баланса, Лекция по теории автоматического регулирования, Техтеогиз, 1956.
- [8] Деколи, П., и Жилье, Ж. Ш., Об устойчивости вынужденных колебаний в нелинейных системах автоматического регулирования, Теория непрерывных систем, специальные математические проблемы, ИФАК, стр. 476—486, 1961.
- [9] Ольденбургер, Р. и Накада, Т., Стабилизация самовозбуждающихся системы, ИФАК, стр. 538—555.
- [10] Козоков, Н. Г., Некоторые новые применения метода логарифмических частотных характеристик к исследованию систем автоматического регулирования, Автоматическое управление и вычислительная техника, выпуск 1, Машгиз, 1958.

ANALYSIS OF SOME PROBLEMS IN THE NONLINEAR AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS BY LOGARITHMIC CHARACTERISTICS

HIAN GUO-BO

In this paper three problems in the nonlinear automatic control systems are analyzed.

In the first problem, the monofrequency forced oscillation in the symmetrical nonlinear systems is investigated. By using a nomograph (fig. 2) the amplitude A_B and the frequency Ω_B of the forced oscillation at the end of the nonlinear element can be easily obtained. A stability criterion of the forced oscillation based on the logarithmic characteristics is also given.

In the second problem, we discuss the effects (error, stability, etc.) of the sinusoidal signal on the slow changing signal in the symmetrical nonlinear control systems.

In the third problem, the amplitude B and the frequency Ω_B of the forced oscillation for smoothing the nonlinear characteristics of the nonlinear element are determined in order to obtain a system with good dynamic characteristics.