

# 含有间隙的继电器系统中周期振荡的准确解\*

陈文杰

## 摘 要

在崔普金理论的基础上,提出一种求解具有间隙的继电器系统中强制振荡与自振荡参数的准确方法。同时亦讨论了间隙对周期现象的影响。

所讨论的系统中,继电器具有理想继电特性(有回环及无回环);线性部分传递函数形如  $\frac{K}{p(T_1 p + 1)}$ 。得出了系统存在强制振荡及自振荡的参量域。

关于继电器系统的周期振荡问题,苏联学者已有了比较全面的结论<sup>[1,5]</sup>,但在某些继电器随动系统中,除含有继电器这种根本非线性元件外,还存在具有非单值特性的间隙元件。图1所示为输出轴“II”复现输入轴“I”变化的位置随动系统,其中执行电机一般是通过减速器与输出轴“II”相连。在减速器中不可避免地存在有间隙,它对系统的振荡状态将有显著的影响。

到目前为止,对含有间隙的继电器系统中的振荡现象还讨论得不多。在[2]中采用了一种近似方法,在求解振荡参数的过程中,对间隙的处理是采用其描述函数(等效复放大系数)。本文试图在崔普金理论的基础上,提出一种准确方法来求解图1所示系统中强制振荡与自激振荡的参量。此外,还讨论了机构中间隙的影响。

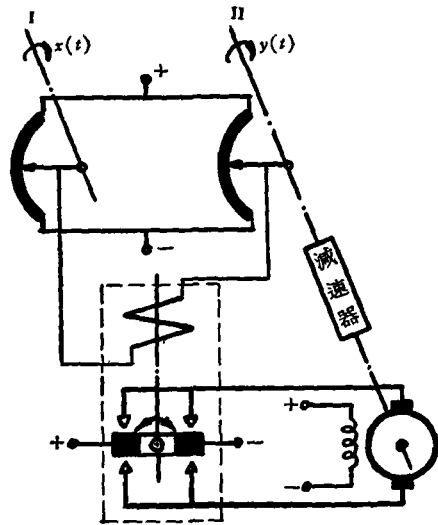


图 1.

## 一、基本方程

在忽略直流电机的电磁过程和其电枢轴上的负载后,系统的方块图将如图2所示,其中

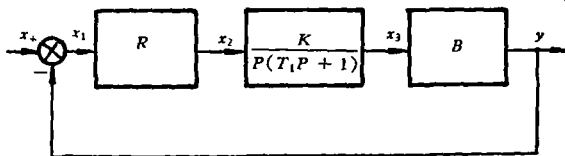


图 2.

其中  $R$  为继电器元件,它可以是具有回环宽度为  $2h$  的理想继电特性(见图 3b),也可以是  $h = 0$  的理想继电特性(见图 3a);  $B$  为间隙元件,它具有非单值特性,由两条相隔间隙宽度为  $2b$  的线

\* 本文于 1964 年 9 月 12 日收到。

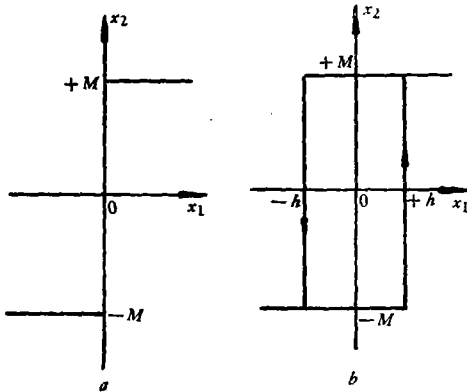


图 3.

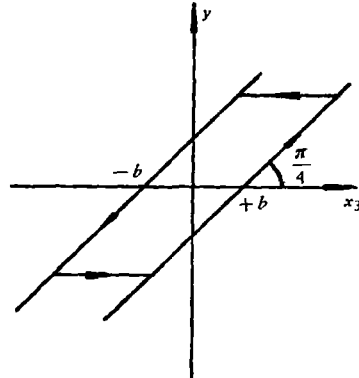


图 4.

段组成, 线段斜率为 1 (见图 4)。

假如系统中产生了周期为  $2T$  的周期振荡 (自激振荡或强制振荡), 且时间起点取在继电器输出波形由负转换至正的瞬间, 则振荡经过半周期  $T$  后,  $x_1(t)$  应满足以下条件:

$$x_1(t)_{t=T} = x_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -h; \quad (1)$$

$$\dot{x}_1(t)_{t=T} = \dot{x}_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right) < 0; \quad (2)$$

$$x_1(t) > -h, \quad \text{当 } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}. \quad (3)$$

在理想继电特性下, (1)、(3) 两条件中的  $h = 0$ 。条件 (1) 是换接适宜条件, 条件 (2) 是所需换接方向条件, 条件 (3) 是  $t$  在  $0 \sim T$  的半周期内不发生换接条件, 它在确定振荡参数后用振荡波形进行校核。前两条件是作为判别振荡存在与否及确定其参数的基本方程。

从式 (1) 及 (2) 可知, 在讨论振荡问题时, 我们无需求解  $x_1(t)$ , 只需确定  $x_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  及  $\dot{x}_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$ , 亦即确定  $t = T$  瞬间系统各环节输出量的座标及其速度即可。因此, 我们利用线性部分的周期解  $X_3(t)$  来求解  $y\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  及  $\dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$ , 只要前者已知, 即可利用间隙特性来确定后者。

现考虑系统线性部分传递函数如式 (4) 所示的特例:

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)}. \quad (4)$$

当系统中存在周期振荡时, 在具有图 3 所示特性的继电元件输出端总有周期为  $2T$ 、幅值为  $M$  的矩形波。在矩形波的作用下, 线性部分所待求的周期解为:

$$X_3(t) = KM \left\{ \left( t - \frac{\pi}{2\omega} \right) - T_1 \left[ 1 - \left( 1 + \operatorname{tgh} \frac{\pi}{2T_1\omega} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \right] \right\}. \quad (5)$$

它的一阶导数为

$$\dot{X}_3(t) = KM \left[ 1 - \left( 1 + \operatorname{tgh} \frac{\pi}{2T_1\omega} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \right]. \quad (6)$$

在  $t = T$  时,

$$X_3\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = KM \left[ \frac{\pi}{2\omega} - T_1 \operatorname{tgh} \frac{\pi}{2T_1\omega} \right], \quad (7)$$

$$\dot{X}_3\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = KM \operatorname{tgh} \frac{\pi}{2T_1\omega}. \quad (8)$$

当  $\omega$  由 0 变化到  $\infty$  时,  $X_3\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  及  $\dot{X}_3\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  总是正的, 而  $X_3(t)$  的峰值总是负的:

$$X_{3m} = -KMT_1 \ln \cosh \frac{\pi}{2T_1\omega}. \quad (9)$$

利用  $x_3$  在  $t = 0 \sim T$  的解析式  $X_3(t)$  的这些现象, 我们就可根据间隙特性来求  $y\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  和  $\dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$ .

波形  $x_3(t)$  通过间隙后, 输出端的波形将变形 (见图 5), 即紧接着  $x_3(t)$  到达  $X_{3m}$  的瞬间, 出现了平台段, 直至  $x_3(t)$  从  $X_{3m}$  返回过程中克服全部间隙宽度  $2b$  的瞬间才结束。除平台段外,  $y(t)$  可用公式

$$y^*(t) = x_3(t) \pm b, \quad \text{当 } \dot{x}_3(t) \leq 0 \quad (10)$$

计算, 而在平台段,

$$y_m = X_{3m} \pm b, \quad \text{当 } \dot{x}_3(t) \geq 0. \quad (11)$$

由于  $\dot{X}_3\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  总是正的,

由式(10)及(11)可得:

$$\left. \begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= X_3\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - b, \\ \dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= \dot{X}_3\left(\frac{\pi}{\omega}\right), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

当  $X_3\left(\frac{\pi}{\omega}\right) + |X_{3m}| \geq 2b$ ;

$$\left. \begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= X_{3m} + b, \\ \dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

当  $X_3\left(\frac{\pi}{\omega}\right) + |X_{3m}| < 2b$ ;

$$\text{及} \quad \left. \begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= y(t) = \text{const}, \\ \dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{当 } |X_{3m}| < b. \quad (14)$$

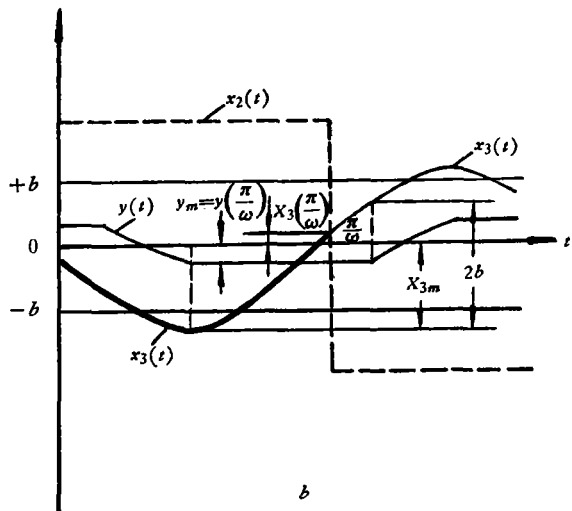
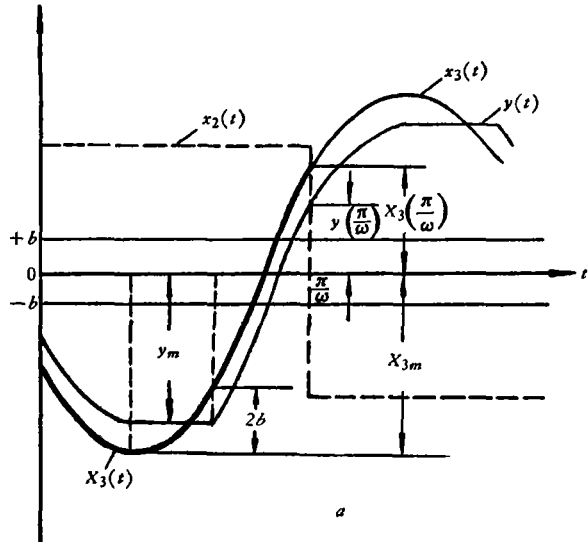


图 5.

式(12)及(13)的情况分别示于图 5a 和 b 中。式(14)表示  $y(t)$  为非周期的, 故不作讨论。我们现将式(7)、(8)及(9)代入式(12)及(13), 并用图解法求解  $y\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  及  $\dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$ 。图 6 表示了这种求解方法。在图 6a 中, 当  $\omega \leq \omega_M$  时,  $y\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  及  $\dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  由式(12)求得, 而当  $\omega_M < \omega < \omega_L$  时, 则由式(13)求得。如将图 6a 中的  $\omega$  轴向上平移至纵坐标等于  $b$  的水平线上, 则得到一新坐标平面。在新坐标平面中的粗实线, 即为所求  $y\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$ 。在图 6b 中也示出了  $\dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$ 。

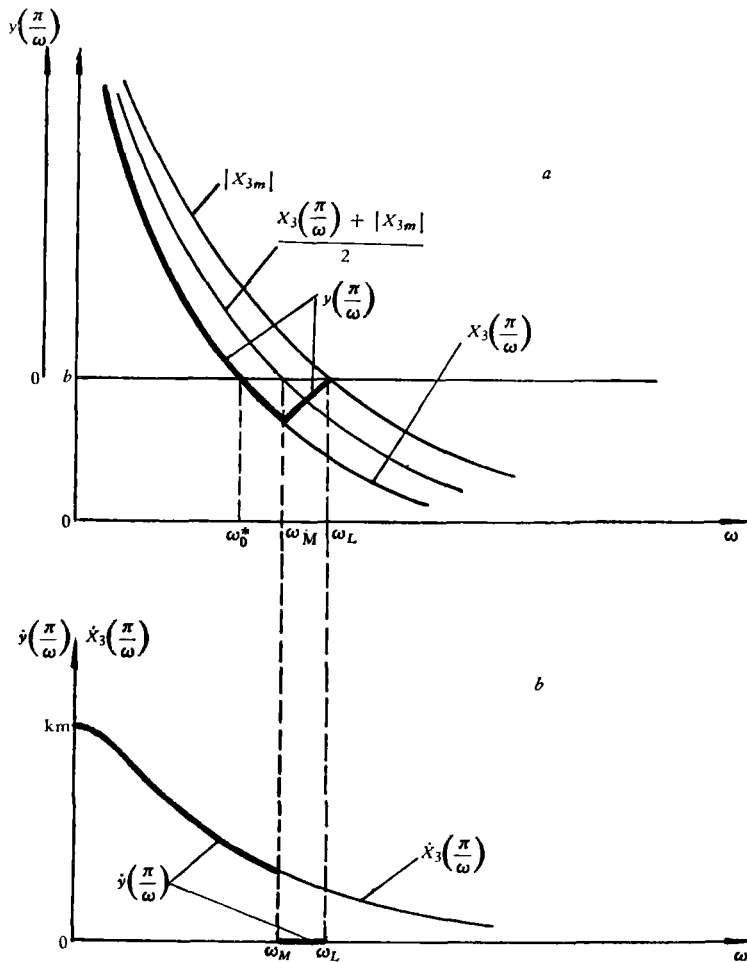


图 6.

## 二、强制振荡

设系统在正弦量  $x(t) = a \sin(\omega_f t - \varphi)$  作用下产生与外作用频率  $\omega_f$  相同频率的周期振荡。这时, 相应于式(1)及(2), 强制振荡存在的条件为:

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_f}\right) - y\left(\frac{\pi}{\omega_f}\right) = -h, \quad (15)$$

$$\frac{1}{\omega_f} \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_f}\right) - \frac{1}{\omega_f} \dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega_f}\right) < 0. \quad (16)$$

组成复函数

$$Y(\omega) = -\frac{1}{\omega_f} \dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - jy\left(\frac{\pi}{\omega}\right), \quad (17)$$

$$X(\varphi) = \frac{1}{\omega_f} \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_f}\right) + jx\left(\frac{\pi}{\omega_f}\right), \quad (18)$$

强制振荡的存在条件即为:

$$\text{Im}\{Y(\omega_f) + X(\varphi)\} = -h, \quad (19)$$

$$\text{Re}\{Y(\omega_f) + X(\varphi)\} < 0, \quad (20)$$

式中  $Y(\omega)$  可由  $y\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  与  $\dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  代入式(17)后求得, 它在复平面上的矢端轨迹是一条在频率  $\omega_M$  上有间断点的曲线, 并当  $\omega_M < \omega < \omega_L$  时, 与虚轴重合 (图7);  $X(\varphi) = ae^{j(\pi-\varphi)}$  为一半径为  $a$  的圆。在理想继电特性下, 式(15)及(19)中的  $h = 0$ 。

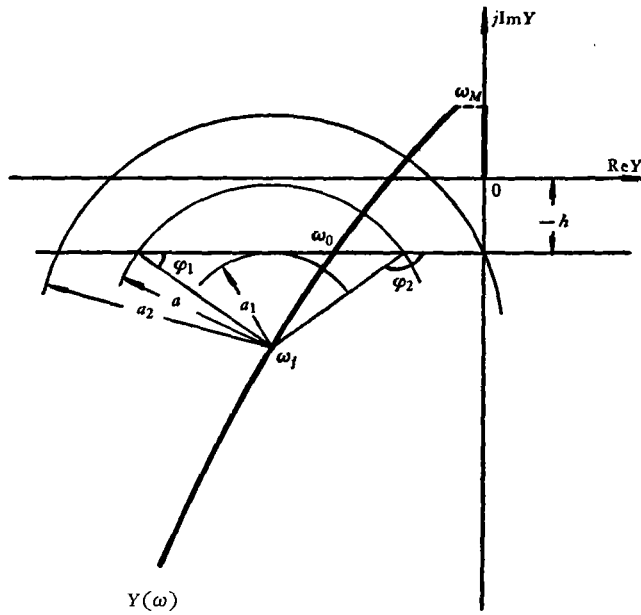


图 7.

以曲线  $Y(\omega)$  上  $\omega = \omega_f$  的点为圆心,  $a$  为半径作圆, 若圆弧与直线  $\text{Im } Y(\omega) = -h$  相交于左半平面, 则系统有可能出现强制振荡, 因为这时两矢量  $Y(\omega_f)$  及  $X(\varphi)$  满足条件(19)及(20)。否则, 就不会出现强制振荡。

圆弧与直线相交有两种临界情况 (图7): 其一, 当  $a = a_1$  时, 两者相切; 其二, 当  $a = a_2$  时, 交点位于虚轴上。显然,  $a < a_1$  时, 系统不出现强制振荡,  $a > a_2$  时, 系统可能存在唯一相角的强制振荡,  $a_2 < a < a_1$  时, 系统有可能出现相角为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  的两种强制

振荡。当  $\omega_f$  位于下半平面的  $Y(\omega)$  曲线上, 相角为正; 位于上半平面的  $Y(\omega)$  曲线上, 相角为负, 且  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pm\pi$  (应该指出,  $|\varphi| > \frac{\pi}{2}$  的强制振荡是不稳定的)。当  $\omega_M < \omega_f < \omega_L$  时,  $a_1 = a_2$ , 系统或者不出现强制振荡, 或者有唯一相角的稳定振荡。

在确定了外作用相角  $\varphi$  后, 还必须根据半周期内不换接条件 (3), 绘制振荡波形  $x_1(t) = x(t) - y(t)$  (定义在半周期  $T$  内) 进行校验。

在图 8 上画出了使系统引起强制振荡的外作用临界幅值  $a_1$ 。对应每一种情况, 临界曲线与  $\omega_f$  轴相交于  $\omega_f = \omega_0$  的点上(如下节指出,  $\omega_0$  实际为自振频率), 并出现一极限频率  $\omega_L$ 。当  $\omega_f > \omega_L$  时, 无论  $a$  为多大, 系统不会有所反应, 这是由于当  $\omega_f > \omega_L$  时, 直流电机输出端上的波形振幅  $|X_{3m}|$  小于  $b$  的缘故。由式(9), 可得  $\omega_L$  随  $b$  的变化关系(见图 9)。

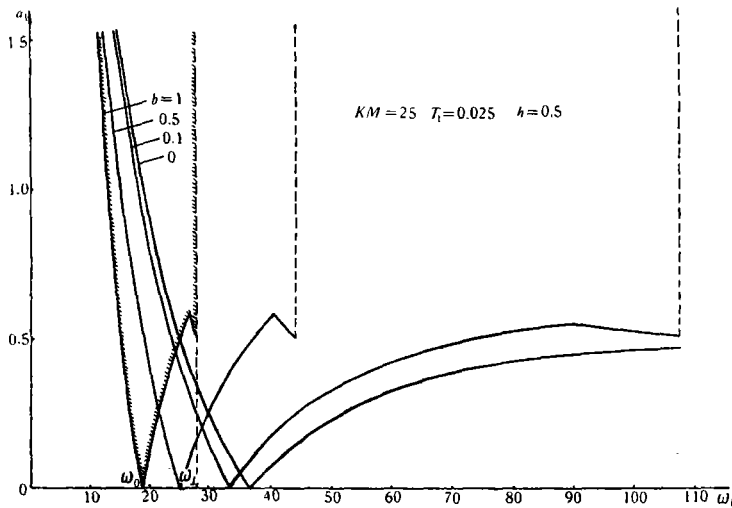


图 8.

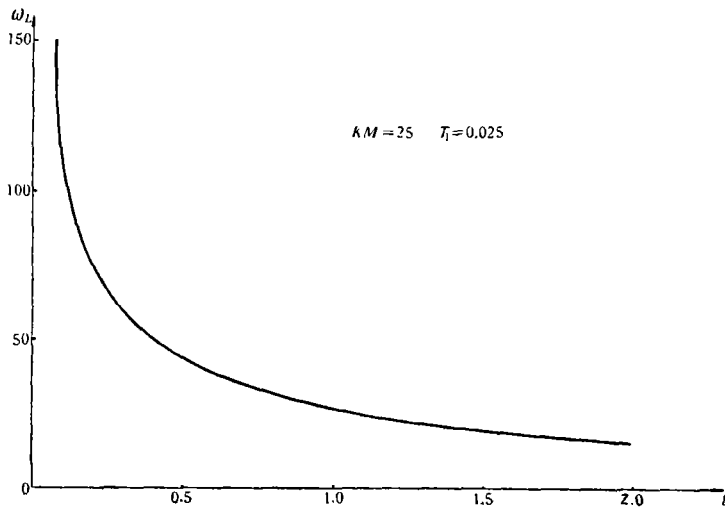


图 9.

从图 8 可看出, 如外作用振幅  $a$  与频率  $\omega_f$  位于临界曲线的上方和虚线的左边时 (为有斜线的区域), 系统可能产生强制振荡。当  $\omega_f > \omega_0$ , 且点  $(a, \omega_f)$  位于临界曲线的下方时, 系统可能产生分谐波振荡<sup>[3]</sup>。

图 10 是理想继电特性  $h = 0$  的情况。

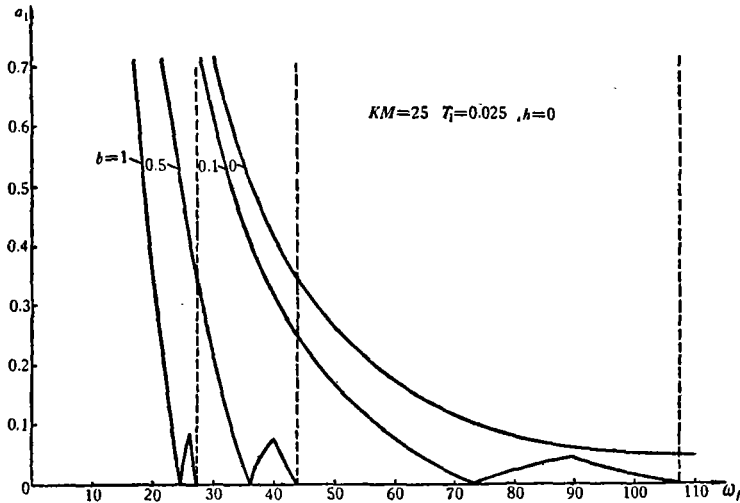


图 10.

### 三、自激振荡

系统自激振荡的存在条件, 为相应于条件(19)及(20)中的  $X(\varphi) = 0$ , 即:

$$\operatorname{Im} Y(\omega_c) = -h, \quad (21)$$

$$\operatorname{Re} Y(\omega_0) < 0. \quad (22)$$

在理想继电特性下, 式(21)中的  $h = 0$ 。

满足条件(21)及(22)的频率, 即为  $Y(\omega)$  曲线与  $\operatorname{Im} Y(\omega) = -h$  在左半平面上的交点频率  $\omega_0$  (图 7)。

当系统产生自激振荡时, 可将相串联的间隙元件  $B$  和继电元件  $R$  等效成回环宽度被增大了的继电元件。等效继电元件的回环宽度为  $2h^* = 2h + 2b$ 。这时, 我们可根据条件

$$X_3\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = h^*, \quad \dot{X}_3\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) > 0 \quad (23)$$

来求解自振频率。所得结果与用曲线  $Y(\omega)$  求得的完全相同。

同样, 当确定了自振频率  $\omega_0$  后, 也需根据半周期内不切换条件 (3), 绘制振荡波形  $x_1(t) = -y(t)$  (定义在半周期  $T$  内) 进行校验, 或者是绘制波形  $X_3(t)$  进行校验。此时, 半周期内不切换条件应为

$$X_3(t) < h^*. \quad (24)$$

图 11 表示了自振频率  $\omega_0$  与  $b$  的关系。当我们用条件 (23) 来求解时, 所得关系曲线与图 11 中  $h = 0$  的情况是相同的, 唯此时横坐标应是  $h^*$ , 而不是  $b$ 。

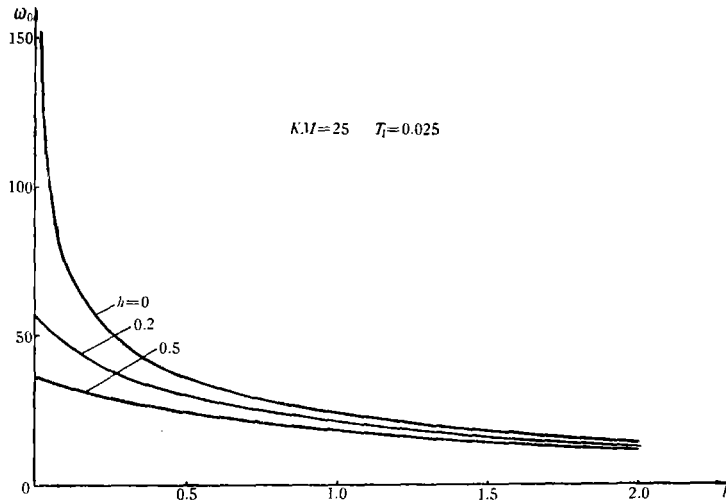


图 11.

#### 四、結 論

如上所述,在所讨论的继电系统中,由于间隙的存在,对其周期现象的影响是显著的。它改变了强制振荡的幅与相以及强制振荡存在时参量间的临界关系,特别是使系统出现了能引起强制振荡的极限频率  $\omega_L$ 。其次是降低了系统的自振频率。在这一点上,它与继电元件回环宽度的作用是一致的。

上述方法是简便的,并且不存在一般所使用的基波等效方法所带来的近似。此外还应指出,对于系统线性部分传递函数为某些其它形式的继电系统,本方法亦是适用的。

#### 参 考 文 献

- [1] В. В. 索洛多夫尼柯夫, 自动调整原理, 第三分册, 王众託译, 水利电力出版社, 1960.
- [2] Kazumasa Hirai and Michiyoshi Kuwahara, Oscillation in Relay Servomechanisms with Backlash, 制御工学, 7(1963), No. 1.
- [3] Gille, J. C., Paquet, J. G., Subharmonic Oscillations in ON-OFF Control Systems, *Application and Industry* (1962), No. 62, pp. 210—216.
- [4] Gille, J. C., Peiegrin, M. J., Decaulne, P., Feedback Control systems, Chapter 26, McGraw-Hill Series in Control Systems Engineering, New York, 1959.
- [5] Цыпкин, Я. З. Теория релейных систем автоматического регулирования, Москва, 1955.



## EXACT SOLUTION OF OSCILLATIONS IN RELAY SERVOMECHANISMS WITH BACKLASH

CHEN WEN-JI

In this paper, an exact method to solve the forced oscillations and self-excited oscillations of relay servomechanisms with backlash is suggested based on the theory of Tsytkin. The effects of backlash on the periodic behaviour of forced oscillations and self-excited oscillations are also discussed. In the system discussed, the relay has ideal characteristics with or without hysteresis loop; the linear part has transfer function of the form  $\frac{K}{p(T_1p + 1)}$ . The parametric regions for the existence of forced and self-excited oscillations are obtained.