

根轨迹的几何作图法*

俞克曜

摘要

本文所提出的几何作图法,仅用圆规和三角板就可迅速且准确的作出根轨迹,不须任何计算。文中详细说明这种方法的实质及理论基础,并有实例。本文还提出用图解法求根的灵敏度的方法,这种方法简单方便,免除了任何计算。

求解根轨迹,就是在 S 平面上找出满足方程式

$$T(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{Km(s)}{n(s)} = -1 \quad (1)$$

的,以 K 为函数的 S 点的轨迹。式中 z_i, p_i 分别为传递函数 $T(s)$ 的零、极点,可以为实数或为成共轭的复数。已经提出过很多求解根轨迹的方法^[1-5,7,9],有图解的方法、解析的方法和仪器求解法。除了实轴上及 K 和 $|s|$ 很大时的一部分轨迹外,要迅速准确的绘出根轨迹还是一个复杂和困难的问题。Evans^[2]提出的根轨迹法是一种图解方法,所以能直接用几何作图的方法迅速且准确的绘出根轨迹是有意义的。利用“对数螺旋尺”^[1,2]作图是一种试算方法,不甚准确。Yaohan Chu 的等相角轨迹作图法^[3]虽能得出准确的结果,但要作出各种角度的等相角轨迹,相当麻烦。K. Steiglitz 曾提出过应用重迭原理由简单根轨迹求作复杂根轨迹的方法^[4],但作为作图基础的简单根轨迹须用公式计算,没有从根本上解决几何作图问题。Smith 介绍过一些简单的求根轨迹的作图法^[5],但只能在特殊情况下作出个别点。上述几种方法各有特点和不足。

按(1)式的相角条件,根轨迹上的点应满足方程式

$$\arg T(s) = \sum_{i=1}^m \angle (s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle (s - p_i) = \pm k \cdot 180^\circ, \quad (2)$$

其中 k 为整数。当 k 为奇数(1, 3, 5...)时,称为 180° 轨迹;当 k 为偶数(0, 2, 4...)时,称为 0° 轨迹^[6,7]。本文所提出的几何作图法仅仅用圆规和三角板来求解(2)式,它的基础有二:

(1) 一些简单的根轨迹可以用圆规和三角板直接由零、极点分布绘出,不必进行任何计算;

(2) 用增添“辅助零、极点”方法由简单根轨迹绘出复杂根轨迹,也不必进行任何计算。

* 本文曾于1965年7月在中国自动化学会年会上宣读。本文于1964年12月27日收到。

利用本作图法同时还可很方便的求出根的灵敏度。

一、一些简单根轨迹

二阶系统传递函数有 $T(2, 0)$, $T(2, 1)$ 及 $T(2, 2)$ 三种类型 (括号内前一个数表示极点个数, 后一个数表示零点个数), 它们的根轨迹都可以直接用三角板和圆规绘出, 是一些最简单的根轨迹。

$T(2, 0)$ 型传递函数的根轨迹是直线, 二个极点的垂直平分线就是其 180° 轨迹 (见图 1), 这一点十分明显, 不用证明了。

$T(2, 1)$ 型传递函数的根轨迹是圆或部分圆周, 二个极点可以是重极点、共轭复极点或不相同的二个实数极点。当二个极点是重极点或共轭复极点时, 这个圆很容易绘出: 以零点为圆心, 零点至极点的距离为半径作圆 (见图 2)。图中实线圆弧为 180° 轨迹, 虚线圆弧为 0° 轨迹 (以后均如此)。图 2 所绘轨迹的证明见附录 I。当二个极点是不相同的实数极点时, 根轨迹

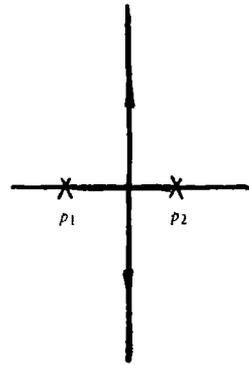


图 1

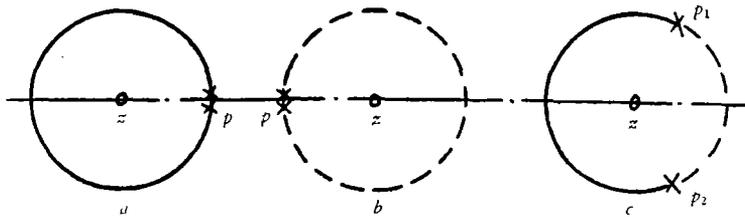


图 2

仍是以零点为圆心的圆, 但圆周不通极点而通过 M 点 (见图 3)。 M 点是这样求出的: 将

三角板的直角顶点保持在通过 p_2 (靠近零点的一个极点) 的纵坐标线 p_2l 上, 同时使二个直角边分别通过零点 z 及另一个极点 p_1 , 这时三角板顶点的位置即是 M 点。当二个极点在零点之右时, 所绘之圆是 180° 轨迹; 当二个极点在零点之左时, 所绘之圆是 0° 轨迹。其实, 图 2a 及图 2b 就是图 3a 及图 3b 中 $p_1 \rightarrow p_2$ 的极限情况。图 3 所绘轨迹的证明见附录 II。

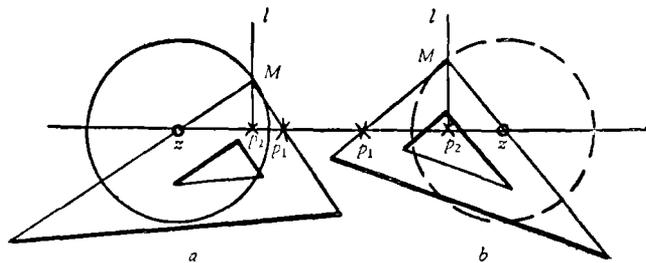


图 3

其实, 图 2a 及图 2b 就是图 3a 及图 3b 中 $p_1 \rightarrow p_2$ 的极限情况。图 3 所绘轨迹的证明见附录 II。

$T(2, 2)$ 型传递函数的根轨迹也是圆或部分圆弧。这又有几种情况, 二个极点 (或二个零点) 可以是重极点 (或重零点)、共轭复极点 (或共轭复零点) 或二个不相同的实数极点 (或零点)。当二个极点和二个零点是重极点和重零点时, 以极点和零点连线 pz 为直径所作的圆就是其 180° 轨迹 (见图 4), 这由附录图一及相应的 (附-1) 式即可得到证明。当二个极点和二个零点是共轭复极点和共轭复零点时, 在实轴上取一点 c 使 $cz_1 = cp_1$, 以 c

为圆心, $cz_1 = cp_1$ 为半径作圆(见图 5), 这个圆的 z_1p_1 及 z_2p_2 圆弧即为 180° 轨迹, 而 p_1p_2 及 z_1z_2 圆弧为 0° 轨迹. 图 5 所绘的轨迹可以用与附录 I 相似的方法证明, 也可用增添

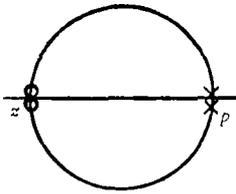


图 4

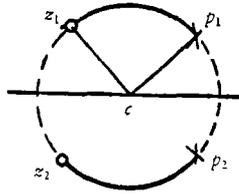


图 5

“辅助零、极点”的方法证明, 本文拟用后一方法证明(见下一节). 当二个极点为共轭复极点而二个零点为不相同的实数零点时(见图 6), 应该这样来绘圆: 首先用试选法在实轴上确定圆心 c 点, 即将三角板直角顶点保持在通过

z_2 的纵坐标线 z_2l 上, 一个直角边保持通过 z_1 点, 另一个直角边与实轴交于 c 点, 当 $cM = c p_1$ 时, 该 c 点即确定为圆心, 以 c 为圆心, $cM = c p_1$ 为半径作圆即是所求的轨迹. 这个圆的通过 z_1, z_2 之间的 p_1p_2 圆弧为 180° 轨迹, 另一部分 p_1p_2 圆弧则为 0° 轨迹. 图 6 所绘的轨迹可以如图 5 那样用增添

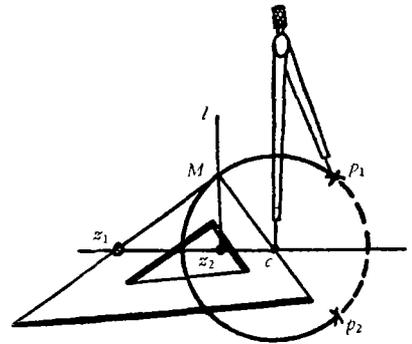


图 6

“辅助零、极点”方法证明, 读了下一节证明图 5 所绘轨迹后就易于理解图 6 所绘的轨迹也是正确的, 毋须证明了. 当二个极点和二个零点均为不同的实数极点和实数零点时(见图 7), 可以这样来绘圆: 首先用试选法在实轴上确定 c 点, 即对于 p_1, p_2, c 三点及 z_1, z_2, c 三点如图 3 的方法分别用直角三角板定出 M_1 及 M_2 二点, 当 $cM_1 = cM_2$ 时, 该 c 点即确定为圆心. 以 c 为圆心, $cM_1 = cM_2$ 为半径作圆, 即是所求之轨迹. c 点的大致位置从图 7 是容易看出的: 如图 7a, 当 z_1, z_2 和

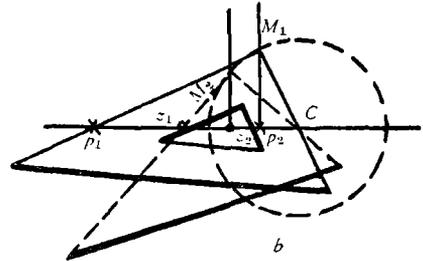
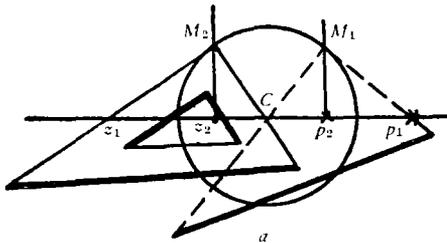


图 7

p_1, p_2 各在一边时, c 点在 z_2 与 p_2 之中点略靠左($\because z_1z_2 > p_1p_2$); 如图 7b, 当 z_1, z_2 在 p_1, p_2 之间, 且 $p_1z_1 > p_2z_2$ 时, c 点在全部零、极点之右(当 $p_1z_1 < p_2z_2$ 时, c 点则在全部零、极点之左了). 准确的求作图 7 的圆的方法可参看附录 III. 但是可预先指出, 上述用试选法确定圆心的作图法是较实用的, 特别是当二个零点和二个极点中有一个是辅助零(极)点时, 可以先确定圆心 c , 然后再按作图规则选定该辅助零(极)点. 下一节的例二中将要说明这一点. 图 7 所绘的轨迹也和图 5 和图 6 所绘的轨迹一样, 都可用增添辅助零、极点方法证明.

上面已经说明了二阶系统根轨迹的作图法, $T(2, 0)$ 型传递函数的轨迹是容易记住

的。 $T(2, 2)$ 型传递函数的轨迹是由 $T(2, 1)$ 型传递函数的轨迹推论而来的。 $T(2, 1)$ 型传递函数的轨迹, 只要把图 2 及图 3 五个圆的 0° 轨迹与 180° 轨迹分清楚, 也就容易记住了。 为此, 把图 2 及图 3 的轨迹重绘于图 8, 自右至左观察极点变化规律就可看出区分 0°

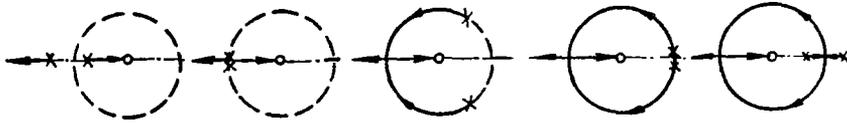


图 8

轨迹与 180° 轨迹的规律了。 最后指出, 在传递函数中, 若零点变为极点, 极点变为零点, 其根轨迹是不变的, 因此, 对 $T(0, 2)$, $T(1, 2)$ 型传递函数的根轨迹, 就不必另行说明了。

二、增添“辅助零、极点”的作图法

从(1),(2)式可看出, 在传递函数中, 增添任意一对相同的零、极点: $z_c, p_c(z_c = p_c)$, 它的根轨迹是不变的。 适当的增添一对零、极点有助于求作根轨迹, 这样的零、极点, 我们称之为“辅助零、极点”。 首先, 通过对图 5 所绘的轨迹的证明来说明辅助零、极点的意义。 设图 9 中, p_1, p_2, z_1, z_2 为 $T(2, 2)$ 型传递函数的零、极点, p_c, z_c 为增添的一对零、极点。

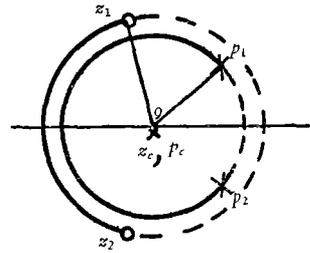


图 9

现将六个零极点分成二组: p_1, p_2, z_c 及 z_1, z_2, p_c 。 对于 p_1, p_2, z_c 三点可作一圆, p_1p_2 左边圆弧为其 180° 轨迹, 右边圆弧为其 0° 轨迹。 对于 z_1, z_2, p_c 三点也可作一圆, z_1z_2 左边圆弧为其 180° 轨迹, 右边圆弧为其 0° 轨迹。 若二个圆的半径相等(即 $z_cp_1 = p_cz_1$), 则二个圆重合。 显然, 对于具有 p_1, p_2, z_1, z_2 及 p_c, z_c 六个零、极点的 $T(s)$ 来说, 这个重合的圆上 z_1p_1 及 z_2p_2 圆弧为 180° 轨迹 (0° 轨迹与 180° 轨迹重合部分), z_1z_2 圆弧为 0° 轨迹 (180° 轨迹与 180° 轨迹重合部分), p_1p_2 圆弧亦为 0° 轨迹。 由于 $p_c = z_c$, 故上述重合的圆弧也即是原来具有 p_1, p_2, z_1, z_2 四个零、极点的 $T(s)$ 的根轨迹。 图 5 中 c 点就是辅助零、极点所加的位置 ($cz_1 = cp_1$), 故其作图法是正确的。 用同样的道理可以证明图 6、图 7 的作图法也是正确的, 在此不必重述了。

上述结果给我们一个启发: 增添“辅助零、极点”后将全部零、极点分成二组, 分别作出根轨迹, 即使这二组轨迹不是重合而是相交, 那末交点应是原来传递函数的根轨迹上的点。 由于辅助零、极点的位置是可以改变的, 因而相应的二组轨迹的交点也随着改变。 根据这些交点就可利用简单根轨迹作出复杂根轨迹。 现在先通过下列作进一步说明。

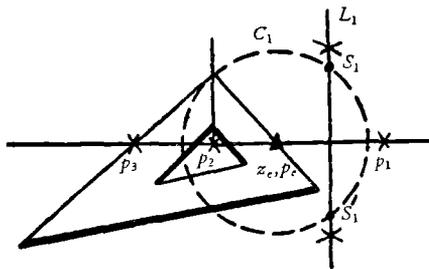


图 10

例 1. 求作 $T(s) = \frac{K}{s(s+4)(s+16)}$ 的根轨迹。

所求的轨迹是双曲线^[6], 利用本作图法可以迅速而准确的作出。 首先通过图 10 说明

作图法的实质，图中， p_1, p_2, p_3 为原有三个极点， p_e, z_e 为增添之“辅助零、极点”，以 Δ 表示之。五个零、极点分成二组： p_3, p_2, z_e 及 p_1, p_e 。对于 p_3, p_2, z_e 三点可作 c_1 圆，是其 0° 轨迹 (Δ 必须位于 p_3, p_2 之右)。对于 p_1, p_e 二点可作垂直平分线 L_1 ，是其 180° 轨迹。直线 L_1 与圆 c_1 之交集 s_1, s'_1 是所求的 180° 轨迹上的点。改变 Δ 的位置，可得另一些 s_1, s'_1 点。由这些点即可联成 180° 轨迹 (见图 11)。实际上，在坐标纸上作图时，一些辅助的直线及辅助的圆都不必绘出。例如以 a 点为第一次所选的辅助零、极点 (见图 11)，则利用直角三角板定出 M_1 点后，先后以 a 及 p_1 为圆心， aM_1 为半径作二个小圆弧所得的交点 s_1 及 s'_1 ，即是 180° 轨迹上的点。用同样的方法即可确定轨迹上其他各点，在图中已表明了。在求作 0° 轨迹时， Δ 须取在 p_1, p_2 之左，轨迹上的点是二组 180° 轨迹的交点。

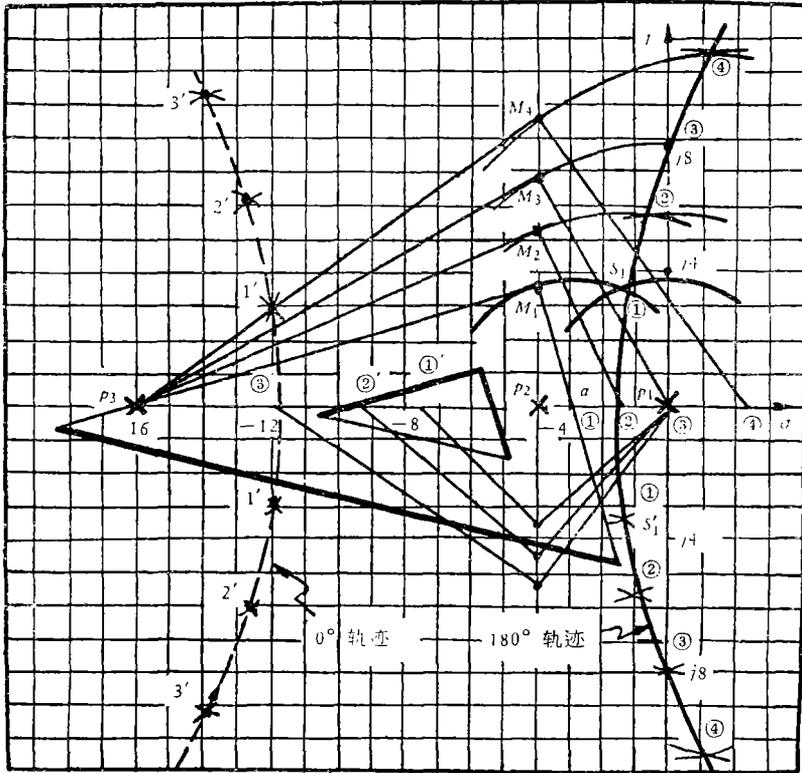


图 11

由上例看到：作图时，先要分配零、极点，使得尽可能利用简单的根轨迹。一般说，可按表 1 的方案进行 (不是唯一的)。必要时也可增添二对“辅助零、极点”。下面再举三个例子说明之。

例 2. 求作 $T(s) = \frac{K(s^2 + 80s + 2000)}{(s + 25)(s^2 + 20s + 325)}$
 $= \frac{K(s + 40 + 20j)(s + 40 - 20j)}{(s + 25)(s + 10 + 15j)(s + 10 - 15j)}$ 的根轨迹。

对于 $T(3, 2)$ 型传递函数，可增添一对辅助零、极点，然后分成 $T(2, 2)$ 及 $T(2, 1)$ 二组，分别绘出 0° 或 180° 轨迹。使 z_1, z_2, p_1 及 p_e 为一组， p_2, p_3 及 z_e 为另一组，分别绘出

表 1

| 原传递函数类型 | 增添辅助零、极点对数 | 新传递函数类型 | 0° 或 180° 轨迹的零、极点分配及其轨迹 |
|-----------|------------|-----------|--|
| $T(3, 0)$ | 1 | $T(4, 1)$ | $\begin{cases} T(2, 1)\text{—圆} \\ T(2, 0)\text{—直线} \end{cases}$ |
| $T(3, 1)$ | 1 | $T(4, 2)$ | $\begin{cases} T(2, 2)\text{圆} \\ T(2, 0)\text{直线} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} T(2, 1)\text{圆} \\ T(2, 1)\text{圆} \end{cases}$ |
| $T(3, 2)$ | 1 | $T(4, 3)$ | $\begin{cases} T(2, 2)\text{—圆} \\ T(2, 1)\text{—圆} \end{cases}$ |
| $T(3, 3)$ | 1 | $T(4, 4)$ | $\begin{cases} T(2, 2)\text{—圆} \\ T(2, 2)\text{—圆} \end{cases}$ |
| $T(4, 0)$ | 2 | $T(6, 2)$ | $\begin{cases} T(2, 2)\text{—圆} \\ T(4, 0)\text{—直线} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} T(2, 1)\text{圆} \\ T(2, 1)\text{圆} \\ T(2, 0)\text{直线} \end{cases}$ |
| $T(4, 1)$ | 1 | $T(5, 2)$ | $\begin{cases} T(2, 2)\text{—圆} \\ T(3, 0)\text{—双曲线} \end{cases}$ (注) |

注：在绘(4.1)型以上函数的轨迹时，利用前面的一些简单轨迹作为基础，见例 3。

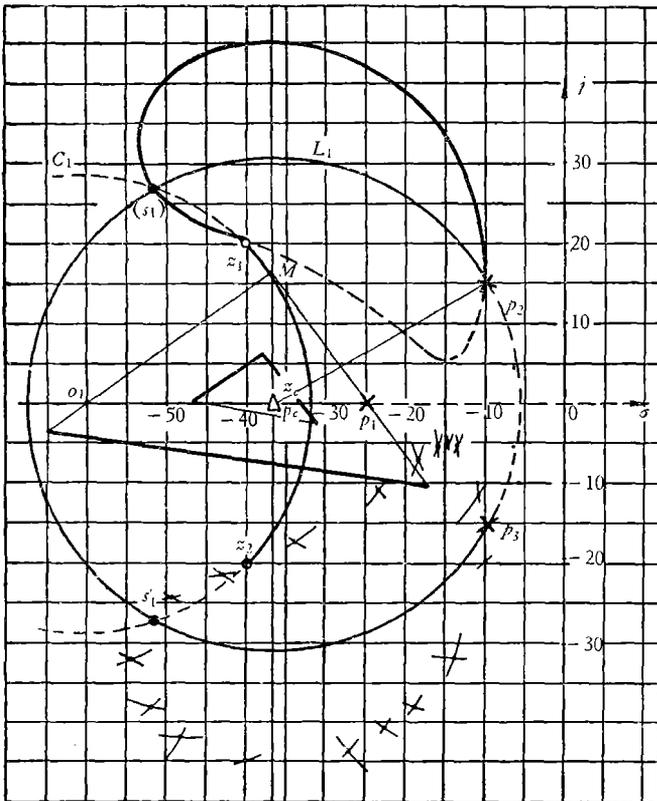


图 12

各自的轨迹 C_1 圆及 L_1 圆(见图 12)。为了作 C_1 圆方便，可以先在实轴上选定 o_1 为圆心，以 $o_1 z_1 = o_1 z_2$ 为半径绘 C_1 圆，然后利用直角三角板使二个直角边通过 o_1, p_1 二点，直角顶

点置于 C_1 圆上的 M_1 点。由 M_1 点即相应地定出辅助零、极点的位置。 C_1 圆与 L_1 圆的交点 s_1 及 s'_1 即为 $T(s)$ 根轨迹上的点。 0° 与 180° 轨迹的交点为 180° 轨迹, 而 180° 与 180° 轨迹的交点为 0° 轨迹。 在绘 C_1 圆与 L_1 圆时, 只须绘出部分小圆弧即可。 为了能清楚的看出作图过程中这些小圆弧, 图 12 中下半平面未联成轨迹。 此题采用文献[8]的例题, 可以进行对照。

例 3. 求作 $T(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+2)(s+1-j)(s+1+j)}$ 的根轨迹。

对于 $T(4, 1)$ 型传递函数, 可增添一对辅助零、极点, 然后分成 $T(2, 2)$ 及 $T(3, 0)$ 二组, 分别绘出 z_1, z_2, p_2, p_3 的轨迹 (C_1 圆) 及 p_1, p_4, p_c 的轨迹 (L_1 — 180° 轨迹或 L'_1 — 0° 轨迹) (见图 13)。 C 圆的 180° 轨迹与 L'_1 的交点 s_1 及 C 圆的 0° 轨迹与 L_1 的交点 s_2 都是所求的 180° 轨迹上的点。 在绘 $T(3, 0)$ 型双曲线轨迹 L_1 及 L'_1 时, 只绘出交点附近二个或三个点, 即可得出这一段轨迹。 图 13 表示出最后所作出的 180° 轨迹。

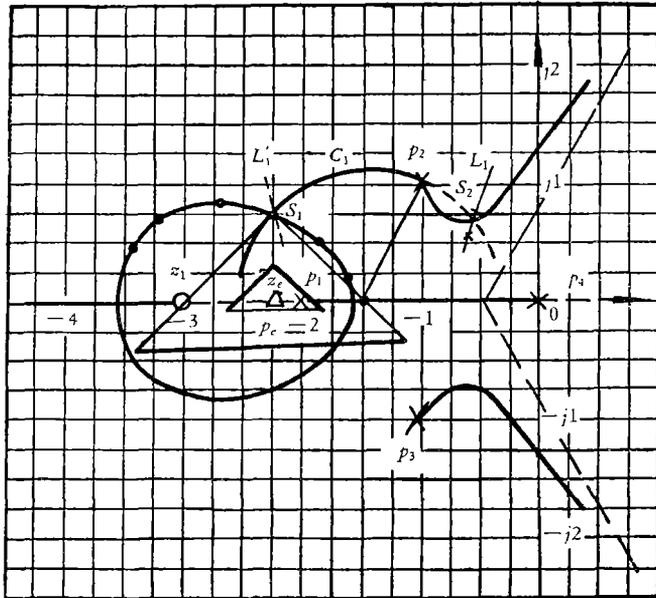


图 13

例 4. 求作 $T(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+7)(s+10)}$ 的根轨迹。

对于 $T(4, 0)$ 型传递函数, 可增添一对辅助零、极点, 然后分成 $T(2, 1)$ 型及 $T(3, 0)$ 型二组, 与例 3 相似地分别绘出圆及双曲线轨迹, 求出其交点。 但是, 增添二对辅助零、极点 (p_{c1}, z_{c1} 及 p_{c2}, z_{c2}), 然后分成 $T(2, 2)$ 型及 $T(4, 0)$ 型二组, 分别绘出 180° 及 0° 轨迹, 更为方便。 因为, 对于 p_4, p_3, z_{c1}, z_{c2} 四点可绘出 C_1 圆 (见图 14), 是其 180° 轨迹; 对于 p_2, p_1, p_{c1}, p_{c2} 四点, 只要所选之二对辅助零、极点的位置 a_1, a_2 能保证 $a_1 a_2 = p_1 p_2$, 则 p_1, p_{c1} 之垂直平分线 L_1 , 就是其 0° 轨迹。 a_1, a_2 二点可以这样选取 (参看图 14): 首先在实轴上 p_4, p_3 之右取一点 o_1 , 利用直角三角板由 p_4, p_3, o_1 三点确定 M_1 点, 以 o_1 为圆心, $o_1 M_1$ 为半径作出 C_1 圆; 再用直角三角板, 使一个直角边通过 o_1 , 直角顶点在 C_1 圆上的位

置 (M_2) 要保证使 $a_1 a_2 = p_1 p_2$ 。这样所作成的 C_1 圆与直线 L_1 的交点 s_1 及 s'_1 ，即是所求的 180° 轨迹上的点。图 14 表示出最后作出的 180° 轨迹。

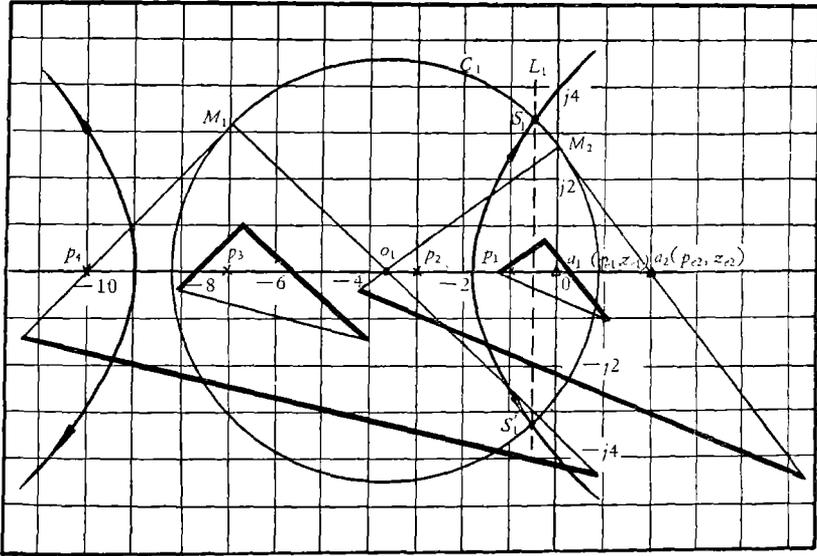


图 14

对于 $T(4, 0)$ 型传递函数, 增添二对辅助零、极点后可以分成 $T(2, 1)$, $T(2, 1)$ 及 $T(2, 0)$ 型三组来求作根轨迹。这时, 要保证三组轨迹能相交于一点 (见图 15)。具体的说, 在选定 a_1 点和 a_2 点时, 要使由 p_1, p_2, z_{e1} 所作的 C_1 圆的半径 $a_1 M_1$ 和由 p_2, p_4, z_{e2} 所作的 L_1 圆的半径 $a_2 M_2$ 相等 (这在作图时很容易做到)。因为只有这样, C_1 圆和 L_1 圆的交点 s_1 及 s'_1 才在 p_{e1} 与 p_{e2} 的垂直平分线 (第三组轨迹) 上。 C_1 圆及 L_1 圆都是 0° 轨迹, 而

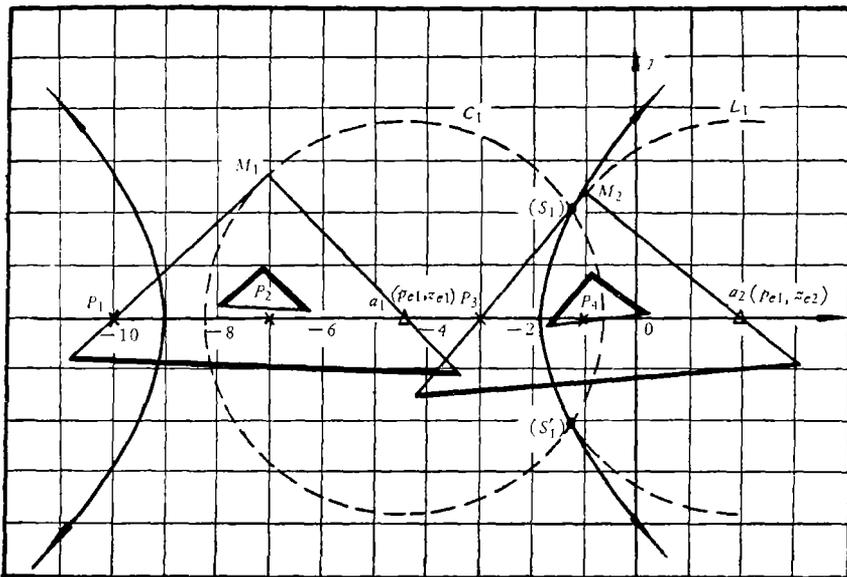


图 15

第三组轨迹是 180° 轨迹, 故交点 s_1 及 s'_1 是所求的 180° 轨迹上的点. 图 15 表示出最后所作出的 180° 轨迹, 它与图 14 是相同的.

三、根的灵敏度

研究开路传递函数 $T(s)$ 的零点、极点及 K 的变化对于根 (s_j) 的影响, 对于分析和综合控制系统是有意义的, 特别是当 s_j 为主导极点或位于稳定边界时. 这种影响以灵敏度表示^[9]. 将(1)式写成

$$H(s, K) = n(s) + K \cdot m(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0, \quad (3)$$

即可求出根 (s_j) 关于 K , 零点 (z_i) 或极点 (p_i) 的灵敏度:

$$S_K^R = \frac{\partial s_j}{\partial K} = \frac{K \cdot \frac{\partial H}{\partial K}}{\frac{\partial H}{\partial s_j}} = \frac{K m(s_j)}{n'(s_j) + K m'(s_j)}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial s_j}{\partial z_i} = \frac{\frac{\partial H}{\partial z_i}}{\frac{\partial H}{\partial s_j}} = - \frac{K \cdot m(s_j)}{[n'(s_j) + K \cdot m'(s_j)](s_j - z_i)} = -S_K^R \cdot \frac{1}{(s_j - z_i)}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial s_j}{\partial p_i} = \frac{\frac{\partial H}{\partial p_i}}{\frac{\partial H}{\partial s_j}} = - \frac{n(s_j)}{[n'(s_j) + K \cdot m'(s_j)](s_j - p_i)} = S_K^R \cdot \frac{1}{(s_j - p_i)}. \quad (6)$$

利用上述公式计算灵敏度是麻烦的. 但是, 利用下述图解方法求灵敏度就很方便. 设所研究的传递函数 $T(s)$ 的根轨迹如图 16 所示, 其中 p_i 为 $T(s)$ 的一个极点 (其余零、极点图中未表示出), 现在要求出 p_i 变化对轨迹上 $A(s_j)$ 点的影响, 即求出 $\frac{\partial s_j}{\partial p_i}$. 令极点 p_i

增加 Δp_i , 则对应于新的传递函数

$$T_1(s) = T(s) \cdot \frac{s - p_i}{s - (p_i + \Delta p_i)}$$

立即可用所讲的几何作图法在 A 点附近作出一点 $B(s_j + \Delta s_j)$. 显然, Δs_j 是由于 p_i 的改变及 K 的改变 (作图时 A, B 二点的 K 不相同) 而引起的 s_j 改变的向量和, 即

$$\Delta s_j = (\Delta s_j)_{\Delta K} + (\Delta s_j)_{\Delta p_i} \approx S_K^R \cdot \frac{\Delta K}{K} + \frac{\partial s_j}{\partial p_i} \cdot \Delta p_i. \quad (7)$$

等式(7)中 $\frac{\Delta K}{K}$ 值未求出 (也不必求出), 但 $(\Delta s_j)_{\Delta K}$ 的方向必与 A 点的切线方向 Aq 一

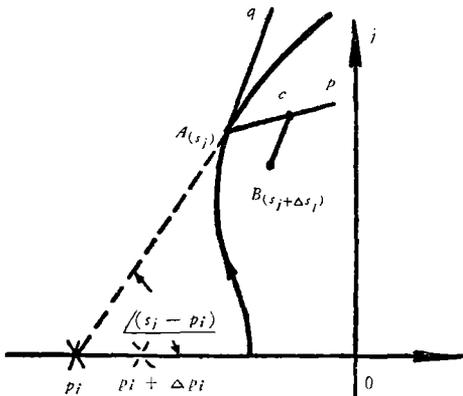


图 16

致, 而 $(\Delta s_j)_{\Delta p_i} = \frac{\partial s_j}{\partial p_i} \cdot \Delta p_i$ 的相角, 根据公式 (6) 可知它必较 $(\Delta s_j)_{\Delta K}$ 的相角大:

$\angle \Delta p_i - \angle (s_j - p_i)$. 此处, $\angle \Delta p_i = 0$, 因此, 作出 Ap 线, 使 $\angle qAp = -\angle (s_j - p_i)$. 再由 B 点作平行于 Aq 的直线与 Ap 相交于 C , 便得到:

$$(\Delta s_j)_{\Delta p_i} = \frac{\partial s_j}{\partial p_i} \cdot \Delta p_i = \overline{AC}, \quad (8)$$

故

$$\frac{\partial s_j}{\partial p_i} \approx \frac{\overline{AC}}{\Delta p_i}. \quad (9)$$

由(9)式的结果, 又可利用公式(6)求出 S_K^R :

$$S_K^R = \frac{\partial s_j}{\partial p_i} \cdot (s_j - p_i) = \frac{\overline{AC}}{\Delta p_i} \cdot (s_j - p_i). \quad (10)$$

s_j 对于其他零、极点的灵敏度可以用上述图解法直接求出, 也可利用所求出之 S_K^R , 再按公式(5)或(6)求出. 须要说明, 当 p_i 为复数时, (8)式中的 $(\Delta s_j)_{\Delta p_i}$ 要考虑共轭极点 (p_i, p'_i) 同时改变 $(\Delta p_i, \Delta p'_i)$ 的结果, 即

$$\begin{aligned} (\Delta s_j)_{\Delta p_i, \Delta p'_i} &= \frac{\partial s_j}{\partial p_i} \cdot \Delta p_i + \frac{\partial s_j}{\partial p'_i} \cdot \Delta p'_i \\ &= S_K^R \cdot \left\{ \frac{\Delta \sigma_i + j \Delta \omega_i}{s_j - (\sigma_i + j \omega_i)} + \frac{\Delta \sigma_i - j \Delta \omega_i}{s_j - (\sigma_i - j \omega_i)} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

上式中, $p_i = \sigma_i + j \omega_i$, $p'_i = \sigma_i - j \omega_i$, $\Delta p_i = \Delta \sigma_i + j \Delta \omega_i$, $\Delta p'_i = \Delta \sigma_i - j \Delta \omega_i$. 令 $\Delta \omega_i = 0$, 则

$$(\Delta s_j)_{\Delta p_i = \Delta p'_i = \Delta \sigma_i} = 2S_K^R \left\{ \frac{\Delta \sigma_i (s_j - \sigma_i)}{[s_j - (\sigma_i + j \omega_i)][s_j - (\sigma_i - j \omega_i)]} \right\}. \quad (11.a)$$

令 $\Delta \sigma_i = 0$, 则

$$(\Delta s_j)_{\Delta p_i = -\Delta p'_i = \Delta \omega_i} = -2S_K^R \left\{ \frac{\Delta \omega_i \cdot \omega_i}{[s_j - (\sigma_i + j \omega_i)][s_j - (\sigma_i - j \omega_i)]} \right\}. \quad (11.b)$$

(11.a) 及 (11.b) 式提供了 $(\Delta s_j)_{\Delta K}$ 和 $(\Delta s_j)_{\Delta p_i, \Delta p'_i}$ 的相位关系. 于是, 和单极点变化时的作图方法相似, 可以很方便的找出仅仅是 σ_i 变化 $\Delta \sigma_i$ 或仅仅是 ω_i 变化 $\Delta \omega_i$ 时所对应的

$(\Delta s_j)_{\Delta p_i, \Delta p'_i} = \overline{AC}$. 于是:

$$\left. \frac{\partial s_j}{\partial p_i} \right|_{\Delta p_i = \Delta \sigma_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{AC}}{\Delta \sigma_i} \quad (12.a)$$

或

$$\left. \frac{\partial s_j}{\partial p_i} \right|_{\Delta p_i = \Delta \omega_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{AC}}{\Delta \omega_i}. \quad (12.b)$$

现在再回到图 16. 由图可见: 为了使结果更准确, 可以先作出 Ap 线, 然后在作 B 点时, 应尽量使 B 点靠近 Ap 线.

例 5. 设 $T(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}$, 其中 $p_1 = 0$, $p_2 = -4$, $p_3 = -16$,

其根轨迹已如图 11 所示, 且知 $K = 20$ 时, 轨迹与虚轴之交点为 $s_j = j8$, 求 p_2 对该点的灵敏度.

为清楚起见,将轨迹重绘于图 17,先作 A 点之切线 Aq ,并作 Ap 线,使 $\angle qAp = \angle p_1p_2A$,设 $\Delta p_2 = 2$,在图中定出新极点: $p_2 + \Delta p_2 = -2$.按几何作图法,在 Ap 线附近作出新的轨迹上的一点 B .由 B 引平行于 Aq 的直线与 Ap 交于 C 点,于是测得

$$\frac{\partial s_j}{\partial p_2} = \frac{\overline{AC}}{\Delta p_2} \approx 0.4 \angle 5^\circ.$$

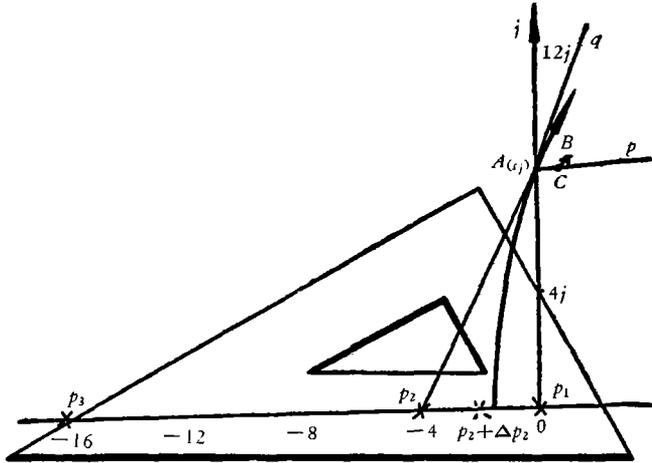


图 17

四、結 語

1. 这种几何作图法是准确且方便的求作根轨迹的方法,所用的工具只是圆规和三角板,很容易解决.

2. 所提出的求根的灵敏度: $s_k^R, \frac{\partial s_j}{\partial p_i}, \frac{\partial s_j}{\partial z_i}$ 的方法,也是用圆规和三角板就可求出的.

3. 对于复杂的根轨迹,可以在不增添辅助零、极点情况下,适当组合原有零、极点,找出 0° 或 180° 轨迹的交点,迅速确定出轨迹上的某些点.

4. 利用本作图法时,实轴上的根轨迹根据一般规律绘出,而轨迹上的 K 值,可以利用“对数螺旋尺”或其它方法求出,并且必要时可根据一般规律先绘出渐近线^[1,2].

5. 应用这种作图法的困难在于:当 $T(s)$ 的零、极点较多时,选择辅助零、极点的位置,因为,有时二组简单轨迹不一定相交.文献[1]所介绍的一些常见传递函数的根轨迹图形可以作为选择辅助零、极点和作图的参考.

附录 I 图 2 所繪軌迹的証明

如图一,设 s 为圆上任意一点,显然

$$\angle spo - \angle sp'o = 90^\circ,$$

$$\text{即 } 2\angle spo - 2\angle sp'o = 180^\circ, \quad (\text{附-1})$$

$$\text{又 } \angle szo = 2\angle sp'o, \quad (\text{附-2})$$

故

$$2\angle spo - \angle szo = 180^\circ. \quad (\text{附-3})$$

(附-3)式与(2)式 $k = 1$ 时一致, (附-2)式与(2)式 $k = 0$ 时一致, 故图 2a 所绘之轨迹是 180° 轨迹, 图 2b 所绘之轨迹是 0° 轨迹.

如图二 a, 设 s_1 为 p_1p_2 右边圆弧上任意一点, s'_1 为 s_1 的共轭点, p_1o_1, p_2o_2 均平行于横坐标轴 zo . 显然

$$\angle s_1p_2s'_1 = \frac{1}{2}\angle s_1zs'_1 = \angle s_1zo,$$

但

$$\angle s_1p_2s'_1 = \angle s_1p_2o_2 - \angle 2 = \angle s_1p_2o_2 - \angle 1,$$

故

$$\angle s_1zo = \angle s_1p_2o_2 - \angle 1,$$

即

$$\angle s_1zo - \angle s_1p_2o_2 - (-\angle s_1p_1o_1) = 0. \quad (\text{附-4})$$

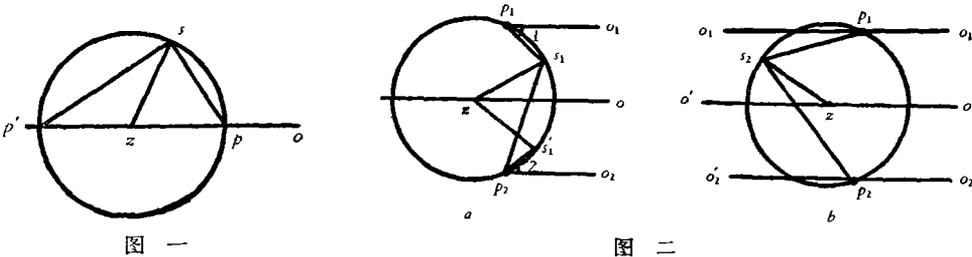
(附-4)式与(2)式 $k = 0$ 时一致, 故图 2c 的虚线圆弧是 0° 轨迹. 再如图二 b, 设 s_2 为 p_1p_2 左边圆弧上任意一点. 由(附-4)式可立即得出下式

$$\angle s_2zo' - \angle s_2p_2o'_2 - (-\angle s_2p_1o'_1) = 0^\circ,$$

故

$$\angle s_2zo - \angle s_2p_2o_2 - (-\angle s_2p_1o_1) = 180^\circ. \quad (\text{附-5})$$

(附-5)式与(2)式中 $k = 1$ 时一致, 故图 2c 实线圆弧是 180° 轨迹.



图一

图二

附录 II 图 3 所绘轨迹的证明

如图三 a, 设 s_1 为圆上任意一点, $p_1M \perp Mz, Mp_2 \perp zp_1$, 故

$$\begin{aligned} \Delta Mzp_1 &\sim \Delta p_2zM, \\ Mz : zp_1 &= p_2z : zM. \end{aligned}$$

但

$$Mz = s_1z$$

故有:

$$\begin{aligned} s_1z : zp_1 &= p_2z = zs_1, \\ \Delta szp_1 &\sim \Delta p_2zM, \end{aligned}$$

又因

$$\angle 1 = \angle 2. \quad (\text{附-6})$$

故

$$\angle s_1zo = \angle s_1p_2o - \angle 2,$$

即

$$\begin{aligned} \angle s_1zo &= \angle s_1p_2o - \angle 1 \\ &= \angle s_1p_2o - (180^\circ - \angle s_1p_1o), \end{aligned}$$

$$\angle s_1zo - \angle s_1p_2o - \angle s_1p_1o = -180^\circ. \quad (\text{附-7})$$

(附-7)式与(2)式 $k = -1$ 时一致,故图 3a 的圆是 180° 轨迹。再如图 3 b, 设 s_2 为圆上任意一点, 其它关系与图 3 a 相同, 只是 p_1, p_2 在 z 点之左, 显然

$$\angle s_2 z o = \angle s_2 p o + \angle 2 = \angle s_2 p_2 o + \angle 1,$$

即

$$\angle s_2 z o - \angle s_2 p_2 o - \angle s_2 p_1 o = 0^\circ. \tag{附-8}$$

(附-8)式与(2)式 $k = 0$ 时一致,故图 3b 的圆是 0° 轨迹。

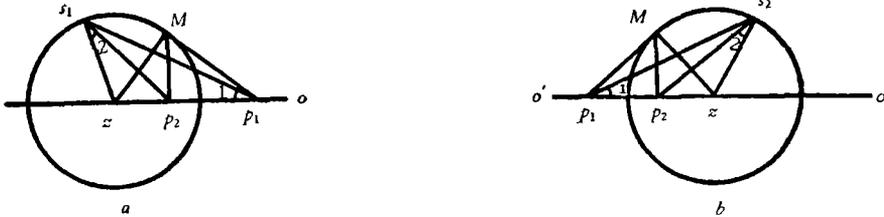


图 三

附录 III $T(2, 2)$ 型传递函数根轨迹作图法 (零、极点均为实数时)

1. 当 z_1, z_2 和 p_1, p_2 各在一边时。

作 $z_1 z_2$ 圆和 $p_1 p_2$ 圆, 并作出该二圆的公切线 $H_1 H_2$, 以 $H_1 H_2$ 为直径作圆, $H_1 H_2$ 圆与实轴交于 E, F 二点。最后, 以 EF 为直径作圆, 即是 180° 轨迹 (见图四), 实际作图时, 辅助圆不必全部绘出。 $H_1 H_2$ 圆的圆心 H_0 与 EF 圆的圆心 O 在同一纵坐标线上。

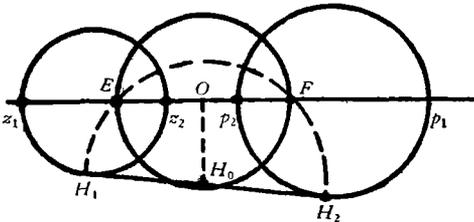


图 四

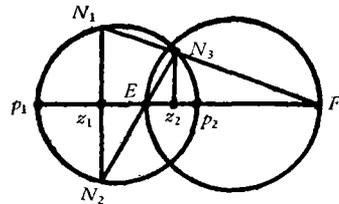


图 五

2. 当 z_1, z_2 在 p_1, p_2 之间时 (p_1, p_2 在 z_1, z_2 之间时也是如此)。作 $p_1 p_2$ 圆与通过 z_1 和 z_2 的纵坐标线交于 N_1, N_2 和 N_3 。联结 $N_2 N_3$ 及 $N_1 N_3$ 并延长得到 E, F 二点。以 EF 为直径作圆, 即是 0° 轨迹 (见图五)。

(注: 图四, 图五中 E, F 二点, 实际上即是 $z_1 z_2$ 圆和 $p_1 p_2$ 圆的对称点。二个圆对称点的求法参看文献[10].)

参 考 文 献

- [1] Grabbe, E. M., Ramo, S., Wooldridge, D. E. Handbook of Automation Computation and Control, vol. 1, 1958, pp. 21-46—21-71.
- [2] Evans, W. R., Control System Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1954.
- [3] Yaohan Chu, Synthesis of Feedback Control System by Phase-Angle Loci, A.I.E.E. Trans., 71, part II (1952), 330—339.
- [4] Steiglitz, K.. An Analytical Approach to Root Loci, I. R. E. Trans. On Automatic Control, AC-6

- (1961), No. 3, 326—332.
- [5] Otto, J. M. Smith, *Feedback Control System*. McGraw-Hill, New York, 1958, pp. 266—272.
- [6] Yeh, C. M., The Study of Transients in Linear Feedback System by Conformal Mapping and the Root Locus Method, *Trans. A.S.M.E.*, **79-1** (1954), 349—361.
- [7] Lass, H., A Note on the Root Locus Method, *Proc. I.R.E.* **44** (1956). 693.
- [8] Liethen, F. E., Houpis, C. H., D'Azzo, J. J., An Automatic Root Locus Plotter Using an Analog Computer, *A.I.E.E.*, **79**, part II, 1960.
- [9] Hanoch Ur, Root Locus Properties and Sensitivity Relations in Control Systems, *Trans. I.R.E. AC-5* (1960), No. 1, 57—65.
- [10] 福克斯, Б. А., 沙巴特, Б. Б., 复变函数及其应用, 赵根榕译, 高等教育出版社, 1958, 121—124.

A GEOMETRICAL METHOD FOR DRAWING THE ROOT LOCUS

YU KE-YAO

A geometrical method for accurately and quickly drawing the root locus with the use of a compass and a triangle only is proposed. Detail description of this method and its basic theory are given with some examples.

The sensitivity of roots can also be obtained by a graphical method conveniently without any calculation.