第4卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 4, No. 2
1966 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　April, 1966

一种继电自动調节系統平衡位置的全局稳定性*

陈 少 豪

摘　　要

本文对切除硬反馈的继电自动调节系统平衡位置的全局稳定性进行了初步的讨论. 利用 A. M. 李雅普诺夫的直接法和 B. A. 雅库波维奇[1]的结果,给出系统平衡位置全局稳定性的若干频率式的充分判据.

文末应用同样的方法,讨论了继电直接调节系统平衡位置的全局稳定性,得到了一个较文献[2,3]易于应用的频率式的充分判据.

一、引　　言

继电系统平衡位置的小范围稳定性曾为 Я. З. 崔普金等人用各种不同的方法所解决[4-6].

今讨论继电自动调节系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + a\varphi(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= (b, x) - \rho\varphi(\sigma) \end{aligned}\right\} \qquad \varphi(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{当 } \sigma > 0 \\ \zeta(t) & \text{当 } \sigma = 0 \\ -1 & \text{当 } \sigma < 0 \end{cases} \tag{1}$$

的一种特殊情形,即切除硬反馈 ($\rho = 0$) 的系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + a\varphi(\sigma) \\ \dot{\sigma} &= (b, x) \end{aligned}\right\} \qquad \varphi(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{当 } \sigma > 0 \\ \zeta(t) & \text{当 } \sigma = 0 \\ -1 & \text{当 } \sigma < 0 \end{cases} \tag{2}$$

的平衡位置 $x = 0$, $\sigma = 0$ 的全局稳性. 系统的方块图如图 1 所示. 这里用小写的拉丁

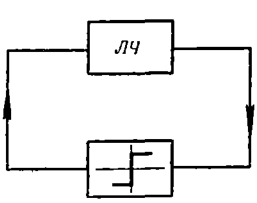

图 1

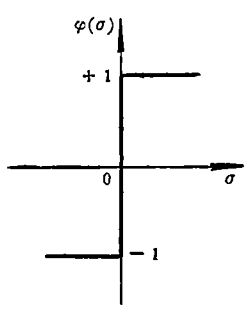

图 2

* 本文初稿于 1964 年 6 月收到,修改稿于 1965 年 9 月收到.

字母表示向量,大写的拉丁字母表示矩阵,希腊字母表示纯量;用"*"表示转置,$(b, x)=b^*x$ 为内积,$\varphi(\sigma)$ 的继电特性如图 2 所示[7,8],$\zeta(t)$ 的绝对值不超过 1,它的选取和 $\sigma=0$ 相容1).(1)式中的 x, a, b 为 n 维向量,A 为 n 阶常方程,$\rho>0$ 为硬反馈系数.

本文不讨论 $\Gamma^2=\rho+(A^{-1}a,b)>0$, $\rho>0$ 的系统(1)的平衡位置的全局稳定性,因为此种情况在文献[9]和[10]中已进行了研究.其他情况在文献[2,3,7,11,12]中也都进行了讨论.这里,利用 A. M. 李雅普诺夫的直接法和 B. A. 雅库波维奇的结果,给出系统(2)平衡位置全局稳定性的若干频率式的充分判据.

二、解的定义

这里采用 Ю. И. 阿里莫夫[2,7]关于右方多值连续方程解的定义来给出系统(2)的解的定义.对系统(2)作如下的假定:

(1) 当 $\det A \neq 0$ 时,1° A 粗稳定,$b^* A^{-1} a>0$, $a^* b<0$; 2° A 具有一对纯虚根 $\pm i\omega_0$; 而其余的特征根都具有负实部. 这时必然存在实的非奇异的矩阵(线性变换)$\tilde{R}$ 使得[13]

$$\tilde{R}^{-1}A\tilde{R}=\begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0 & -\omega_0\\ \omega_0 & 0\end{pmatrix},\ \tilde{R}^{-1}x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\ \tilde{R}^{-1}a=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix},\ \tilde{R}^*b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}.$$

此处 A_1 粗稳定,x_1, a_1, b_1 是 $n-2$ 维向量,x_2, a_2, b_2 是二维向量;又记 $a_2=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, $b_2=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$,同时仍假定:$b^*A^{-1}a=-\dfrac{\gamma}{\omega_0}+(A_1^{-1}a_1, b_1)>0$, $a^*b=-\delta+a_1^*b_1<0$,这里

$$\gamma=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=\lim_{\omega\to\omega_0}\mathrm{Im}\,2\omega_0(\omega_0-\omega)\tilde{G}(i\omega),$$

$$\delta=-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)=\lim_{\omega\to\omega_0}\mathrm{Re}\,2\omega_0(\omega_0-\omega)\tilde{G}(i\omega),$$

$$\tilde{G}(s)=\frac{b^*(A-sE)^{-1}a}{s} \tag{3}$$

是系统(2)线性部分的传递函数,E 是单位阵,$i=\sqrt{-1}$.

(2) 当 $\det A=0$ 时,设零特征根的重次为 1,而其余的特征根都具有负实部,这时必存在实的非奇异矩阵 T 使得[13]

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\tilde{A}_1 & \\ & 0\end{pmatrix},\ T^{-1}x=\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix},\ T^{-1}a=\begin{pmatrix}\tilde{a}_1\\ \alpha\end{pmatrix},\ T^*b=\begin{pmatrix}\tilde{b}_1\\ \beta\end{pmatrix},$$

此处 $\tilde{A}_1$ 粗稳定,$\tilde{x}_1, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1$ 是 $n-1$ 维向量,$\tilde{x}_2, \alpha, \beta$ 是实数. 并假定,$\tilde{b}_1^*\tilde{A}_1^{-1}\tilde{a}_1>0$,

1) 把函数 $\varphi(\sigma)$ 看成在间断点 $\sigma=0$ 处的值为零,只有当信号 $\sigma(t)$ 变化很快地通过阈值(死区)$\sigma=0$、函数 $\varphi(\sigma)$ 的变化也很快时才可能,这相当于要求调节器无惯性(例如 $\varphi(\sigma)=\mathrm{sign}\,\sigma$)的理想继电特性情况.但实际调节系统总是有惯性的,故这种情况在一系列的物理状态中很少有根据.例如在研究与 $\sigma(t)$ 常处在换接阈附近有关的那些继电系统的运动(如滑动运动,部分的滑动状态,具有断续的运动等)时,这种理想的继电特性是被认为不容许的.文献[7,8]提出了用多值的连续特性来代替单值的脉冲函数.最简单的继电环节的继电特性不是由公式 $\varphi(\sigma)=\mathrm{sign}\,\sigma$ 来描述,而是按下面的关系式来描绘:

$$\varphi(\sigma)=\begin{cases}+1 & \text{当 } \sigma>0,\\ \zeta(t) & \text{当 } \sigma=0,\\ -1 & \text{当 } \sigma<0,\end{cases}$$

$\zeta(t)$ 的绝对值不超过 1,它的选取和 $\sigma=0$ 相容.

$\tilde{a}_1^*\tilde{b}_1 < 0$, $\alpha\beta = \lim_{\omega\to 0}\mathrm{Re}\,\omega^2\tilde{G}(i\omega) < 0$[1].

仿效文献[7]，在考察系统(2)的同时，也考察正系统(对应于 $\sigma \geqslant 0$)

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + a\\ \dot{\sigma} &= (b, x)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

和负系统(对应于 $\sigma \leqslant 0$)

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - a\\ \dot{\sigma} &= (b, x)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

以及系统

$$\dot{x} = Bx \tag{6}$$

(这个系统的轨线分布在集合 $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ 上). 这里,

$$B = A - (a, b)^{-1}ab^*A = [E - (a, b)^{-1}ab^*]A. \tag{7}$$

由文献[7]可知系统(2)的运动完全可由系统(4)—(6)来描述. 在系统(2)的解的定义中，只要求矩阵 B 的秩为 $n-1$[2] 及 $a^*b < 0$ 即可(矩阵 B 的秩为 $n-1$，保证了在集合 $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ 上无非零的奇点).

仿效文献[3]并利用它的引理不难证明，在(1)或(2)的假定下，正(负)系统的解都不会于任一段时间中恆处于換接集合 $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ 上，亦即排除了文献[14]中称之为不可容许的情形.

三、全局稳定性判据[3]

定理 1 若系统(2)的参数适合条件：1)矩阵 A 粗稳定，$b^*A^{-1}a>0$, $a^*b < 0$；2)存在某个非负数 $q \geqslant 0$ 使得不等式

$$(Aa, b) + q(a, b) \neq 0^{4)}, \tag{8}$$

$$\mathrm{Re}(q + i\omega)\tilde{G}(i\omega) > 0, \quad -\infty < \omega < +\infty, \tag{9}$$

成立，则系统(2)的平衡位置 $x = 0$, $\sigma = 0$ 全局稳定.

附注 由对 $\tilde{G}(s)$ 的分析按[4,5]获知 $\tilde{G}(s)$ 的罗朗展式的系数 $d_0 = -a^*b>0$, $d_1=-(Aa,b)<0$ 是系统(2)小范围稳定的必要条件.

仿效[10]，用简化传递函数的方法可得下面的简化准则：

系 1 若系统(2)中的矩阵 A 粗稳定，向量 a 是矩阵 A 的特征向量(或向量 b 是矩阵 A^* 的特征向量)，则系统(2)的平衡位置全局稳定的充要条件是 $a^*b < 0$.

定理 2 若系统(2)的参数适合条件：1)矩阵 A_1 粗稳定，$-\dfrac{\gamma}{\omega_0} + (A_1^{-1}a_1, b_1) > 0$, $-\delta + a_1^*b_1 < 0$；2)实数 $\gamma \geqslant 0$, $\delta > 0$；3)有不等式

$$(Aa, b) + q(a, b) \neq 0, \tag{10}$$

$$\mathrm{Re}(q + i\omega)\tilde{G}_1(i\omega) > 0, \quad -\infty < \omega < +\infty \tag{11}$$

---

1) 这里 γ, δ, $\alpha\beta$ 都是线性非奇异变换的不变量.

2) 在(1)或(2)假定下，易证 B 的秩总为 $n-1$[13].

3) 这里的一切判据都可用严正实函数的术语[18]来表述.

4) 实际上要求大于零；(10)式不要求写成 $(A_1a_1, b_1) + q(a_1, b_1)\neq 0$.

成立$\left(q=\dfrac{\gamma\omega_0}{\delta}\geqslant 0,\ \widetilde{G}_1(s)=\dfrac{1}{s}b_1^*(A_1-sE)^{-1}a_1\right)$，则其平衡位置全局稳定.

系 2 若系统(2)中矩阵 A_1 粗稳定，$\gamma=0$，向量 $a_1(b_1)$ 是矩阵 $A_1(A_1^*)$ 的特征向量，则其平衡位置全局稳定的充分条件是：$\delta>0$，$a_1^*b_1<0$.

此系的证法与系 1 类同. 仿效文献[17]，可证：

系 3 若把定理 2 中的 $\delta>0$ 改为 $\delta<0$，而其余的条件不改变，则系统(2)的平衡位置是不稳定的.

定理 3 若系统 (2) 的参数满足条件：1) 矩阵 $\widetilde{A}_1$ 粗稳定；2) $\tilde{a}_1^*\tilde{b}_1<0$，$\alpha\beta=\lim\limits_{\omega\to 0}\mathrm{Re}\,\omega^2\widetilde{G}(i\omega)<0$；3) $(\widetilde{A}_1\tilde{a}_1,\tilde{b}_1)>0$，$\mathrm{Re}\,i\omega\tilde{\widetilde{G}}_1(i\omega)>0$，$-\infty<\omega<+\infty$， (12)

则其平衡位置全局稳定，其中 $\tilde{\widetilde{G}}_1(s)=\dfrac{1}{s}\tilde{b}_1^*(\widetilde{A}_1-sE)^{-1}\tilde{a}_1$ 1).

系 4 若系统(2)中 $\widetilde{A}_1$ 粗稳定，$\alpha\beta<0$，$\tilde{a}_1^*\tilde{b}_1<0$，向量 $\tilde{a}_1(\tilde{b}_1)$ 是矩阵 $\widetilde{A}_1(\widetilde{A}_1^*)$ 的特征向量，则其平衡位置全局稳定.

系 5 若把定理 3 中的 $\alpha\beta<0$ 改为 $\alpha\beta>0$，而其余的条件不改变，则系统(2)的平衡位置是不稳定的.

这两个系的证法分别类似于系 2，3 的证法.

定理 1，2，3 及系 1 的证明见附录 I.

最后不难看出系统(2)可化成(就稳定性而论)等价系统：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=Ax+a\varphi(\sigma)\\&\dot{\xi}=\varphi(\sigma)\\&\sigma=(\tilde{b},x)-\tilde{\gamma}\xi\end{aligned}\right\}\qquad \varphi(\sigma)=\left\{\begin{array}{ll}+1 & \text{当 }\sigma>0\\ \zeta(t) & \text{当 }\sigma=0\\ -1 & \text{当 }\sigma<0\end{array}\right\} \tag{13}$$

其中 $\tilde{b}=A^{*-1}b$，$\tilde{\gamma}=b^*A^{-1}a$.

由于矩阵 B 的秩为 $n-1$，在集合 $\sigma=\dot{\sigma}=0$ 上无非零奇点，故可仿效文献[10]利用 B. M. 波波夫法(即拉普拉斯变换法)证得：

定理 4 若系统(2)的参数适合条件：1) 矩阵 A 粗稳定，矩阵 B 无纯虚数的特征根(或 $\widetilde{G}_1(i\omega)\neq 0$)；2) $a^*b<0$，$b^*A^{-1}a>0$；3) 存在非负数 $q\geqslant 0$，使得不等式

$$\mathrm{Re}(1+i\omega q)\widetilde{G}(i\omega)\geqslant 0,\ -\infty<\omega<+\infty,$$

则系统(2)的平衡位置全局稳定.

四、简 例

现考察继电自动调节系统[10]：

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\eta}+M\dot{\eta}=-N\xi\\&\dot{\xi}=\varphi(\sigma)\\&\sigma=\eta+\mu\dot{\eta}\end{aligned}\right\}\qquad \varphi(\sigma)=\left\{\begin{array}{ll}+1 & \text{当 }\sigma>0\\ \zeta(t) & \text{当 }\sigma=0\\ -1 & \text{当 }\sigma<0\end{array}\right\} \tag{14}$$

其中 $M>0$，$N>0$.

引进新的未知函数 $x_1=\dot{\eta}$，$x_2=\ddot{\eta}$ 便将系统(14)化为形式如(2)的系统，这时

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -M\end{pmatrix},\ a=\begin{pmatrix}0\\ -N\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\ \mu\end{pmatrix}.$$

1) $(\widetilde{A}_1\tilde{a}_1,\tilde{b}_1)=(Aa,b)$，$\mathrm{Re}\,i\omega\tilde{\widetilde{G}}_1(i\omega)=\mathrm{Re}\,i\omega\widetilde{G}_1(i\omega)$；条件 $\tilde{a}_1^*\tilde{b}_1<0$ 似可改为 $a^*b<0$.

由于 A 的特征根 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -M < 0$, 故可应用定理 3. 定理 3 的条件 2) 可归结为 $\mu > 0$. 不难算出系统(14)线性部分的传递函数:

$$G(s) = \frac{N(1+\mu s)}{s^2(s+M)}.$$

于是

$$\alpha\beta = \lim_{\omega\to 0} \mathrm{Re}\, \omega^2 \widetilde{G}(i\omega) = \lim_{\omega\to 0} \frac{-N(\mu\omega^2 + M)}{\omega^2 + M^2} = -\frac{N}{M} < 0.$$

而定理 3 的条件 3) 可分别归结为

$$\mu M > 1, \tag{15}$$

$$\mathrm{Re}\, i\omega \widetilde{G}_1(i\omega) = \frac{N(\mu M - 1)}{\omega^2 + M^2} > 0, \quad -\infty < \omega < +\infty. \tag{16}$$

显见只要(15)成立，则(16)必成立. 因此不等式(15)卽是系统(14)平衡位置全局稳定的充分条件.

系统(14)在某种意义下描述装有自动驾驶仪的反馈失灵的中位飞机的运动，其中 η 描述飞机的航行角度，ξ 描述舵的旋转角度，σ 是操纵舵的伺服马达的特征函数的宗量，μ 是人工阻尼，M 是飞机的自然阻尼，N 是舵的设备示性.

五、继电系統平衡位置的全局稳定性[3]的一个記注

本节讨论文献[2,3]研究过的继电直接调节系统1)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\varphi(\sigma) \\ \sigma &= (k, x) \end{aligned}\right\} \qquad \varphi(\sigma) = \left\{\begin{array}{ll} +1 & \text{当 } \sigma > 0 \\ \zeta(t) & \text{当 } \sigma = 0 \\ -1 & \text{当 } \sigma < 0 \end{array}\right\} \tag{17}$$

的平衡位置的全局稳定性.

如同文献[2,3],假定系统(17)满足条件：1) 矩阵 A 粗稳定，2) $k^*b<0$，3) $k^*A^{-1}b>0$，则可证:

定理 5　若存在常数 $q \geqslant 0$,使对一切实数 ω 成立有

$$\mathrm{Re}(q + i\omega)G(i\omega) > 0, \tag{18}$$

则系统(17)的平衡位置全局稳定. 这里 $G(s) = k^*(A - sE)^{-1}b$, $i = \sqrt{-1}$.

系 6　若系统(17)中矩阵 A 粗稳定，向量 $b(k)$ 是矩阵 $A\,(A^*)$ 的特征向量，则其平衡位置全局稳定的充要条件是 $k^*b < 0$.

定理 5 及系 6 的证明见附录 II.

现从定理 5 出发进行一些讨论.

(1)　应用文献[1]的定理 2 于文献[3]的定理 1，则它的充分判据变为相当于要求:

$$(k, b) + \mathrm{Re}(q + i\omega)G(i\omega) > 0, \quad -\infty < \omega < +\infty,$$

$$(k, A^2b) + q(K, Ab) \neq 0.$$

显见此结果被包含在本文的定理 5 中2). 又式(18)虽以严格的不等式出现,然而沒有对矩

1) 这里和附录 II 的记号同文献[3].

2) 应用文献[1]的定理 2 于文献[2]的定理 1，则它的充分判据变为相当于要求：$\mathrm{Re}\, i\omega G(i\omega)>0$, $-\infty<\omega<+\infty$. 显见此结果包含在本文的定理 5 中.

阵 $B = A - (k, b)^{-1}bk^*A$ 无纯虚数特征根(此为文献[3]的定理 2 的条件之一)的要求，故本文的判据对应用来说可能要较文献[2,3]方便些.

(2) 计算表明矩阵 $B = A - (k, b)^{-1}bk^*A$ 的特征多项式

$$L(s) = -(k,b)^{-1}sk^*(A - sE)^{-1}b\det(A - sE) = -(k,b)^{-1}sG(s)\det(A - sE), \quad (19)$$

当 $s = i\omega$ 时与 $\Pi(i\omega) = \mathrm{Re}(1 + i\omega q)G(i\omega)$ 有如下的关系:

$$\Pi(i\omega) = -(k, b)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1 + i\omega q}{i\omega\det(A - i\omega E)}L(i\omega)\right\}. \quad (20)$$

由于矩阵 A 粗稳定，故 $\det(A - i\omega E) \neq 0$. 从式(19)可看出，判定矩阵 $B = A - (k, b)^{-1}bk^*A$ 有无纯虚数特征根可归结为判定 $G(i\omega)$是否为零. 矩阵 B 的秩为 $n - 1$[13]. 当 $G(i\omega) = 0$ 时，波波夫不等式(11)[3] 以等号成立. 又从(19),(20)式可以看出，讨论系统(17)的平衡位置全局稳定性的问题最终都归结为讨论系统的传递函数 $G(s)$(或频率特性 $G(i\omega)$)或矩阵 $B = A - (k, b)^{-1}bk^*A$ 的特征多项式 $L(s)$的性状.

仿效文献[18]，从图式分析表明在使用定理 5 的充分判据时，只要对 $\varepsilon \leqslant \omega < +\infty$ ($\varepsilon > 0$ 充分小)来验证判据就够了.

附 录 I

定理 1 的证明

作李雅普诺夫函数

$$V(x, \sigma) = (Hx, x) + |\sigma| + \frac{q}{2b^*A^{-1}a}(b^*A^{-1}x - \sigma)^2,\ H = H^*,\ q \geqslant 0. \quad (21)$$

若

$$-G = A^*H + HA < 0, \quad (22)$$

$$Ha + \frac{1}{2}qA^{*-1}b + \frac{1}{2}b = 0 \quad (23)$$

成立，则当 $\sigma \geqslant 0$ 或 $\sigma \leqslant 0$ 时，函数 $V(x, \sigma)$ 依正系统(4)(或负系统(5))对 t 的全导数为 $\dot V_+(x,\sigma) = \dot V_-(x, \sigma) = -(Gx, x) - q|\sigma| < 0$，而函数 $V(x, \sigma)$ 在超平面 $\sigma = \dot\sigma = 0$ 上依系统(6)对 t 的全导数，根据 $\sigma = 0, \dot\sigma = b^*x = 0$ 以及关系式(23)可算出 $\dot V_c(x, 0) = -(Gx, x)$.

由此可看出要求导数 $\dot V(x, \sigma)$ 是定负(当 $q > 0$)或常负的($q = 0$)，仅须 $G > 0$. 根据文献[1]的定理 2 可推知，矩阵-向量不等式(22),(23)有解 $H = H^*$, $H > 0$ 的充要条件为对一切实数 ω 成立不等式(8)及

$$\varphi_{\mathrm{II}}(\omega) = \mathrm{Re}\left((A - i\omega E)^{-1}a,\ \frac{1}{2}qA^{*-1}b + \frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(q + i\omega)\tilde G(i\omega) > 0.$$

此即条件(9). 故对系统(2)存在有定正的李雅普诺夫函数(21)，其依系统(2)对 t 的全导数定负(当 $q > 0$)或常负(当 $q = 0$)，亦即系统(2)的平衡位置小范围稳定[2,7].

其次我们指出，当 $q = 0$ 时在相空间中使 $\dot V \equiv 0$ 的点集不含有系统(2)除原点而外的整条正半轨. 事实上，由 $\dot V \equiv 0$，依 $G > 0$ 得到 $x(t) \equiv 0$; 以 b^* 左乘系统(2)的第一个方程的两端并利用 $x(t) \equiv 0$ 可推知 $a^*b\varphi(\sigma(t)) \equiv 0$; 又根据假定 $a^*b < 0$，可知 $\varphi(\sigma(t)) \equiv 0$，故 $\sigma(t) \equiv 0$.

显见 $V(x, \sigma)$具有无穷大下限，满足了 E. A. 巴尔巴辛-H. H. 克拉索夫斯基[16]关于全局稳定性定理的所有条件，故系统(2)的平衡位置全局稳定. 至此证毕.

定理 2 的证明

作李雅普诺夫函数(21)，这里

$$H=\begin{pmatrix}H_1 & \\ & H_2\end{pmatrix},\ H_1=H_1^*,\ H_2=\begin{pmatrix}\kappa & 0\\ 0 & \kappa\end{pmatrix},\ \kappa>0,\ q=\frac{\gamma\omega_0}{\delta}\geqslant 0. \tag{24}$$

依 $\gamma\geqslant 0$, $\delta>0$ 推知,可选取 $\kappa>0$ 使它适合

$$2\kappa\alpha_1-\frac{q}{\omega_0}\beta_2+\beta_1=0,\quad 2\kappa\alpha_2+\frac{q}{\omega_0}\beta_1+\beta_2=0. \tag{25}$$

若

$$H_1a_1+\frac{1}{2}\frac{\gamma\omega_0}{\delta}A_1^{*-1}b_1+\frac{1}{2}b_1=0, \tag{26}$$

$$-G_1=A_1^*H_1+H_1A_1<0, \tag{27}$$

成立,则函数(21)依系统(2)对 t 的全导数可写成

$$\dot V(x,\sigma)=\begin{cases}\dot V_+(x,\sigma)=-(G_1x_1,x_1)-q\sigma, & \text{当 } \sigma\geqslant 0,\\ \dot V_-(x,\sigma)=-(G_1x_1,x_1)+q\sigma, & \text{当 } \sigma\leqslant 0,\\ \dot V_c(x,0)=-(G_1x_1,x_1), & \text{当 } \sigma=\dot\sigma=0,\end{cases}$$

故 $\dot V(x,\sigma)\leqslant 0$.

同样,依[1]的定理 2 可推知矩阵-向量不等式(26),(27)有解 $H_1=H_1^*$, $H_1>0$ 的充要条件,即定理 2 的条件 3).

我们指出,在相空间中使 $\dot V(x,\sigma)\equiv 0$ 的点集不含有系统(2)除原点而外的整条正半轨. 事实上,若 $q>0$, 依 $G_1>0$ 可由 $\dot V(x,\sigma)\equiv 0$ 得到 $x_1(t)\equiv 0$, $\sigma(t)\equiv 0$, $\dot\sigma(t)\equiv 0$; 又由 $\dot\sigma(t)=b_1^*x_1(t)+b_2^*x_2(t)\equiv 0$, $x_1(t)\equiv 0$, $\sigma(t)\equiv 0$, 可从系统(2)推得

$$\dot x_2=A_2x_2,\ b_2^*x_2(t)\equiv 0,$$

故 $x_2(t)\equiv 0$[17].

若 $q=0$, 同样依 $G_1>0$ 可由 $\dot V(x,\sigma)\equiv 0$ 得到 $x_1(t)\equiv 0$. 我们以 $b_1^*A_1^{-1}$ 左乘系统(2)中关于 x_1 的方程的两端,便得

$$b_1^*A_1^{-1}\dot x_1=b_1^*A_1^{-1}x_1+b_1^*A_1^{-1}a_1\varphi(\sigma).$$

依 $x_1(t)\equiv 0$, 可得 $b_1^*A_1^{-1}a_1\varphi(\sigma(t))\equiv 0$; 又依 $q=\dfrac{\gamma\omega_0}{\delta}=0$,而有 $(A^{-1}a,b)=b_1^*A_1^{-1}a_1>0$, 故 $\varphi(\sigma(t))\equiv 0$, $\sigma(t)\equiv 0$, $\dot\sigma(t)\equiv 0$. 又将 $\dot\sigma(t)\equiv 0$, $x_1(t)\equiv 0$, $\varphi(\sigma(t))\equiv 0$ 代入系统(2),则得

$$\dot x_2=A_2x_2,\ b_2^*x_2(t)\equiv 0,$$

从而 $x_2(t)\equiv 0$[17].

又函数 $V(x,\sigma)$ 具有无穷大下限,满足了 E. A. 巴尔巴辛-H. H. 克拉索夫斯基[16]关于全局稳定性定理的所有条件,故系统(2)的平衡位置全局稳定. 至此证毕.

定理 3 的证明

依 $\alpha\beta<0$ 总可找到正数 χ 使得 $2\chi\alpha+\beta=0$. 作函数

$$V(x,\sigma)=\chi\tilde x_2^2+(\tilde H_1\tilde x_1,\tilde x_1)+|\sigma|,\ \tilde H_1=\tilde H_1^*, \tag{28}$$

若成立下列关系式:

$$\tilde H_1\tilde a_1+\frac{1}{2}\tilde b_1=0,\quad -\tilde G_1=\tilde A_1^*\tilde H_1+\tilde H_1\tilde A_1<0, \tag{29}$$

则 $V(x,\sigma)$ 依系统(2)对 t 的全导数可写成

$$\dot V(x,\sigma)=\begin{cases}\dot V_+(x,\sigma)=-(\tilde G_1\tilde x_1,\tilde x_1) & \text{当 } \sigma\geqslant 0,\\ \dot V_-(x,\sigma)=-(\tilde G_1\tilde x_1,\tilde x_1) & \text{当 } \sigma\leqslant 0,\\ \dot V_c(x,0)=-(\tilde G_1\tilde x_1,\tilde x_1) & \text{当 } \sigma=\dot\sigma=0,\end{cases}$$

故 $\dot V(x,\sigma)\leqslant 0$.

同样,依文献[1]的定理 2 可推知矩阵-向量不等式(29)有解 $\tilde H_1=\tilde H_1^*$, $\tilde H_1>0$ 的充要条件,即定理

3 的条件 3)。

我们指出,在相空间中使 $\dot{V}(x,\sigma)\equiv 0$ 的点集不含有系统(2)除原点而外的整条正半轨。事实上,由于 $\tilde{G}_1>0$,可从 $\dot{V}(x,\sigma)\equiv 0$ 推得 $\tilde{x}_1(t)\equiv 0$,故 $\varphi(\sigma(t))\equiv 0$, $\sigma(t)\equiv 0$, $\dot{\sigma}(t)\equiv 0$;又依 $\dot{\sigma}(t)\equiv 0$, $\tilde{x}_1(t)\equiv 0$, $\alpha\beta<0$,可由(2)的第二个方程推得 $\tilde{x}_2(t)\equiv 0$.

又函数 $V(x,\sigma)$ 具有无穷大下限,满足了 E. A. 巴尔巴辛-H. H. 克拉索夫斯基[16]关于全局稳定性定理的所有条件,故系统(2)的平衡位置全局稳定. 至此证毕.

系 1 的证明

由于向量 $a(b)$ 是矩阵 $A(A^*)$ 的特征向量,故

$$Aa = -\tilde{\alpha}a(\tilde{\alpha}>0),\ (A^*b = -\tilde{\beta}b\ (\tilde{\beta}>0)), \tag{30}$$

从而

$$(A-i\omega E)^{-1}a = -\frac{\tilde{\alpha}-i\omega}{\omega^2+\tilde{\alpha}^2}a,\ \left(b^*(A-i\omega E)^{-1} = -\frac{\tilde{\beta}-i\omega}{\omega^2+\tilde{\beta}^2}b^*\right).$$

于是

$$\mathrm{Re}\, i\omega\tilde{G}(i\omega) = \mathrm{Re}\, b^*(A-i\omega E)^{-1}a = -\frac{\tilde{\alpha}}{\omega^2+\tilde{\alpha}^2}a^*b;\ \left(\mathrm{Re}\, i\omega\tilde{G}(i\omega) = -\frac{\tilde{\beta}}{\omega^2+\tilde{\beta}^2}a^*b\right).$$

因此若要对一切实的 ω 成立 $q=0$ 的不等式(9),只要 $a^*b<0$ 即可. 又依关系式(30)及条件 $a^*b<0$ 有

$$b^*A^{-1}a = -\frac{1}{\tilde{\alpha}}a^*b>0,\ \left(b^*A^{-1}a = -\frac{1}{\tilde{\beta}}a^*b>0\right),$$

$$(Aa,b) = b^*Aa = -\tilde{\alpha}a^*b>0,\ ((Aa,b) = b^*Aa = -\tilde{\beta}a^*b>0),$$

故按 $q=0$ 的定理 1 可知这时系统(2)的平衡位置全局稳定. 至此证毕.

系 1 的必要性是显然的(见定理 1 后的附注).

附 录 II

定理 5 的证明

作李雅普诺夫函数

$$V(x) = x^*Hx + \int_0^\sigma \varphi(\sigma)d\sigma,\quad H = H^*. \tag{31}$$

若

$$-G = A^*H + HA,\quad -g = Hb + \frac{1}{2}A^*k + \frac{1}{2}qk, \tag{32}$$

$$D = G + (b,k)^{-1}gg^*>0, \tag{33}$$

成立,则函数(31)依系统(17)对 t 的全导数(参看文献[3])可写为

$$\dot{V}(x) = \begin{cases} \dot{V}_+(x) = -(Dx,x) + b^*k[1-(b,k)^{-1}(g,x)]^{2-q\sigma} & \text{当 } \sigma\geqslant 0, \\ \dot{V}_-(x) = -(Dx,x) + b^*k[-1-(b,k)^{-1}(g,x)]^2 + q\sigma & \text{当 } \sigma\leqslant 0, \\ \dot{V}_c(x) = -(Dx,x) + b^*k[-(b,k)^{-1}(b,Ax)-(b,k)^{-1}(g,x)]^2 & \text{当 } \sigma = 0. \end{cases}$$

依文献[1]的定理 1 可推知矩阵-向量不等式(32),(33)有解 $H=H^*$, $H>0$ 的充要条件,即归结为对一切实数 w 不等式(18)成立.

故对系统(17)存在正定的李雅普诺夫函数(31),其依系统(17)对 t 的全导数 $\dot{V}(x)$ 负定. 这样一来,对于系统(17)按衔接法定义的任一解,函数 $V(x(t))$ 是单调下降的,又 $V(x)$ 具有无穷大下限,故如同文献[3]一样,可证系统(17)的平衡位置是全局稳定的.

系 6 的证明与系 1 的证明类同.

附 录 III

现举例说明频率式判据对于数字式继电调节系统的应用也是很方便的.

考察 A. И. 鲁里耶研究过的间接继电调节系统：

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\eta}+10\dot{\eta}+9\eta=-\xi\\&\dot{\xi}=\varphi(\sigma)\\&\sigma=\eta+0.5\dot{\eta}\end{aligned}\right\}\qquad \varphi(\sigma)=\left\{\begin{array}{ll}+1 & 当\ \sigma>0\\ \xi(t) & 当\ \sigma=0\\ -1 & 当\ \sigma<0\end{array}\right\} \tag{34}$$

引入新的未知函数 $x_1=\dot{\eta}$, $x_2=\ddot{\eta}$ 将系统(34)化为形式如式(2)的方程组，这时

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -9 & -10\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\ 0.5\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的两个特征根分别为 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-9$，故应该用定理 1 来判定系统(34)平衡位置的全局稳定性．由于 $b^*A^{-1}a=\frac{1}{9}>0$, $a^*b=-0.5<0$，故定理 1 的条件 1) 被满足．

不难算出系统(34)线性部分的传递函数：

$$\tilde{G}(s)=\frac{1+0.5s}{s(s^2+10s+9)}.$$

于是定理 1 的条件 2) 就相当于要求

$$4-0.5q>0,$$

$$\operatorname{Re}(q+i\omega)\tilde{G}(i\omega)=\frac{(4-0.5q)\omega^2+9-5.5q}{\omega^4+82\omega^2+81}>0,\ -\infty<\omega<+\infty.$$

我们可以很方便地取得 $q\geqslant 0$ 的 q，例如取 $q=0$ 而使上面两个不等式同时成立，从而根据定理 1 获知系统(34)的平衡位置是全局稳定的．

本文一至四节是在金福临导师指导下写出的，并得到叶彦谦老师和李训经先生的指正．特此致谢．

参　考　文　献

[1] Якубович, В. А., Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования, *ДАН СССР*, **143** (1962), № 6.

[2] Алимов, Ю. И., О построении функций Ляпунова для релейных систем регулирования, *А и Т*, **XXI** (1960), № 6.

[3] 谢惠民，继电系统平衡位置的全局稳定性，高等学校自然科学学报(数学、力学、天文)，试刊第 3 期，1964 年 (复旦大学学报，**8**(2)，1963)．

[4] Цыпкин, Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, М. Л. Гостехиздат, 1955.

[5] Аносов, Д. В., Об устойчивости положении равновесия релейных систем, *А и Т*, **XX** (1959), № 2.

[6] Киняпин, С. Д., Неймарк, Ю. И., Об устойчивости состояния равновесия релейной систем, *А и Т*, **XX** (1959), № 9, 1153—1163.

[7] Алимов, Ю. И., Об устойчивости в целом равновесного состояния релейных систем регулирования, Изв. высш. уч. зав., Радиофизика, **2** (1959), № 6.

[8] Барбашин, Е. А., Алимов, Ю. И., К теории релейных дифференциальных уравнений, Изв. высш. уч. зав., Математика, № 1 (26), 1962, 3—13.

[9] Гелиг, А. Х., О применении второго метода Ляпунова к исследованию устойчивости движения нелинейных разрывных систем, *Вестник ЛГУ*, **2** (1962), № 7.

[10] 陈少豪，继电调节系统平衡位置的全局稳定性，复旦大学学报(自然科学)，**10** (2, 3)，1965.

[11] Цыпкин, Я. З., Об устойчивости релейных автоматических систем «в большом», Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, **3**, 1963.

[12] Гелиг, А. Х., Исследование устойчивости нелинейных разрывных систем автоматического регулирования с неединственным равновесным состоянием, *А и Т*, **XXV** (1964), № 2.

[13] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, *М. Л. Гостехиздат*, 1953 (矩阵论，柯召译，高等教育出版社，1955).

[14] André, J., Seibert, P., Über stückweise lineare Differentialgleichungen, die bei Regelungs-problemen auftreten, *Archiv d. math.* **VII** (1956), 148—164.

[15] Степанов, В. В., Немыцкий, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М. Л. Гостехиздат, 1949 (微分方程定性论，王柔怀、童勤谟译，科学出版社，1956).
[16] Барбашин, Е. А., Красовский, Н. Н., Об устойчивости движения в целом, *ДАН СССР*, **LXXXVI** (1952), № 3.
[17] 李训经等,间接调节系统的绝对稳定性,复旦大学学报，**7**(1)，1962.
[18] Айзерман, М. А., Гантмахер, Ф. Р., Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд. АН СССР, М., 1963.

COMPLETE STABILITY OF A RELAY CONTROL SYSTEM

Chen Shao-hao

In this paper the problem of complete stability of a relay control system with non-hard feedback (i.e. $\rho = 0$) is discussed and some sufficient criteria in frequency domain are obtained by Liapunov's second method and Yakubovich's results[1].

By the same method the problem of complete stability of direct relay control systems is also discussed. We obtain a criterion in frequency domain which is more easily applicable than that given in the papers[2,3].