

用继电器组成可靠的继电器电路¹⁾

許廷鈺

摘 要

全文分三部分,在第一部分中,作者根据继电器接点在动作时刻的实际要求,改进了 Moore E. F. 和 Shannon C. E. 提出的继电器接点的状态模型^[1](图 1),提出了一种继电器接点状态的新模型(图 2)。根据新模型及理論分析,证明了衡量继电器电路是否可靠的新准则应该是下列两式

$$R(q^{(1)}, q^{(2)}) > 1 - \delta,$$

$$R(s^{(2)}, s^{(1)}) > 1 - \delta$$

同时被满足,从而改进了文献[1]中衡量继电器电路是否可靠的准则。在本文的后两部分中,作者应用了文献[1]的若干结果,重新估计了可靠电路中继电器接点的数目。最后与文献[1]的结果进行了比较,从理論分析及计算数据说明了本文的结果一般較佳。

一、新模型及新准则

在 Moore 和 Shannon 的論文“用不可靠的继电器组成可靠的电路”^[1]中,对继电器的接点状态提出了一个模型,在这个模型中,控制接点在繞组激发与不激发时具有接通或不接通两种可能状态(图 1)。但是在很多情况下,特別在多节拍的继电器系統中^[2,3],不但要考虑控制接点在继电器繞组激发(或不激发)时是否接通(或断开),而且还需要考虑(这更重要)接点是从什么时刻开始接通,什么时刻开始断开。而这在 Moore-Shannon 模型中并没有得到反映。为此需要建立一个新模型来反映这类系統对继电器的要求²⁾。图 2 给出了这个模型。

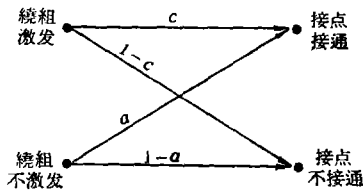


图 1. Moore-Shannon 模型

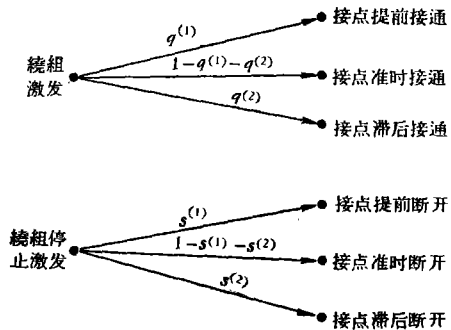


图 2. 新模型

接点在繞组激发时具有提前接通、准时接通和滞后接通三种互不相容的可能状态,而

1) 本文曾在 1963 年 7 月中国自动化学会模拟技术和运动技术专业会议上宣读。
 2) 文中所談的继电器均为上述接点继电器,以后不再作其它解释。

在繞組停止激發時則具有提前斷開、準時斷開和滯後斷開三種互不相容的可能狀態。新模型可以認為是一個具有二元輸入和三元輸出的信道(圖3)。圖3中的參數意義如下：

$q^{(1)}$ ——繞組激發時接點發生提前接通的概
率；

$q^{(2)}$ ——繞組激發時接點發生滯後接通的概
率；

$1 - q^{(1)} - q^{(2)}$ ——繞組激發時接點發生準時
接通的概

率；
 $s^{(1)}$ ——繞組停止激發時接點提前斷開的概
率；

$s^{(2)}$ ——繞組停止激發時接點滯後斷開的概
率；

$1 - s^{(1)} - s^{(2)}$ ——繞組停止激發時接點準時斷開的概

率。爲使新模型中提出的參數有更確切的意義，現給出如下定義：

定義 1. 對繼電器 J 確定兩個時間區間 $[\alpha, \beta]$ 、 $[\gamma, \sigma]$ ，設 t_a (或 τ_a) 爲 J 的繞組激發(或停止激發)時接點的接通(或斷開)時刻。(1)若 $t_a < \alpha$ ，則稱 J 發生提前接通，用 $(J)_1$ 表示此事件；若 $t_a \geq \beta$ ，則稱 J 發生滯後接通，用 $(J)_{-1}$ 表示此事件；若 $\alpha \leq t_a < \beta$ ，則稱 J 是準時接通的，用 $(J)_0$ 表示此事件。(2)若 $\tau_a < \gamma$ ，則稱 J 發生提前斷開，用 $(J)^1$ 表示此事件；若 $\tau_a \geq \sigma$ ，則稱 J 發生滯後斷開，用 $(J)^{-1}$ 表示此事件；若 $\gamma \leq \tau_a < \sigma$ ，則稱 J 是準時斷開的，用 $(J)^0$ 表示此事件。因此

$$q^{(1)} = p[(J)_1]; \quad q^{(2)} = p[(J)_{-1}]; \quad 1 - q^{(1)} - q^{(2)} = p[(J)_0];$$

$$s^{(1)} = p[(J)^1]; \quad s^{(2)} = p[(J)^{-1}]; \quad 1 - s^{(1)} - s^{(2)} = p[(J)^0].$$

要求 J 的兩個正常工作概

率 $p[(J)_0]$ 與 $p[(J)^0]$ 和 1 非常接近，然而常常由於生產技術條件的限制不容易做到。現仍採用文獻 [1] 的方法，用若干個繼電器 J 構成一個兩端電路 u ，使得 u 的兩種正常工作概

$$h(p) = \sum_{n=0}^m A_n p^n (1-p)^{m-n}, \quad (1)$$

率 $p[(u)_0]$ 和 $p[(u)^0]$ 與 1 的差距小於預先給定的正數 δ 。

文獻 [1] 已經指出，若 J 的接通概

率爲 p ，那麼由 m 個 J 所組成的兩端電路 u 的接通概

$$p[(u)_1] = h(q^{(1)}), \quad (2.1)$$

$$p[(u)_{-1}] = 1 - h(1 - q^{(2)}), \quad (2.2)$$

$$p[(u)_0] = h(1 - q^{(2)}) - h(q^{(1)}), \quad (2.3)$$

$$p[(u)^1] = 1 - h(1 - s^{(1)}), \quad (3.1)$$

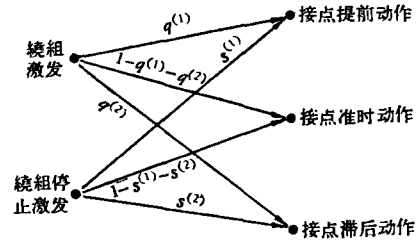


圖 3. 新模型是一個具有二元輸入和三元輸出的信道

$$p[(u)^{-1}] = h(s^{(2)}), \quad (3.2)$$

$$p[(u)^0] = h(1 - s^{(1)}) - h(s^{(2)}). \quad (3.3)$$

証明:

在同一个电路 u 中, 下面(1), (2), (3)三个命题等价.

(1) u 在接点 a_1, a_2, \dots, a_n 均接通和其它接点均不接通时是接通的.

(2) u 在接点 a_1, a_2, \dots, a_n 均提前接通和其它接点均不提前接通时是提前接通的.

(3) u 在接点 a_1, a_2, \dots, a_n 均滞后断开和其它接点均不滞后断开时是滞后断开的.

因而使得电路 u 接通或是提前接通或是滞后断开的 n 个接点的选择方法是同样多的, 即具有相同的 A_n . 由式(1)可知

$$p[(u)_1] = p[t_u < \alpha] = \sum_{n=0}^m A_n q^{(1)n} (1 - q^{(1)})^{m-n} = h(q^{(1)}),$$

$$p[(u)^{-1}] = p[\tau_u \geq \sigma] = \sum_{n=0}^m A_n s^{(2)n} (1 - s^{(2)})^{m-n} = h(s^{(2)}),$$

于是式(2.1)与(3.2)成立. 由以上的証明可知

$$p[(u)_{-1}] = 1 - p[(u)_1 U(u)_0] = 1 - p[t_u < \beta] = 1 - h(1 - q^{(2)}),$$

$$p[(u)^1] = 1 - p[(u)^0 U(u)^{-1}] = 1 - p[\tau_u \geq \gamma] = 1 - h(1 - s^{(1)}),$$

因而式(2.2)与(3.1)亦成立. 由式(2.1)和(2.2)、式(3.1)和(3.2)立刻可証得(2.3)和(3.3) (証毕).

令 $R(u, v)$ 函数为如下形式:

$$R(u, v) \equiv h(1 - v) - h(u).$$

于是由定理 1 可知

$$p[(u)_0] \equiv R(q^{(1)}, q^{(2)}), \quad p[(u)^0] \equiv R(s^{(2)}, s^{(1)}).$$

下面给出在新模型下衡量电路 u 是否可靠的新准则.

定义 2. 给定很小的正数 δ , 若电路 u 的 R 函数满足不等式:

$$R(q^{(1)}, q^{(2)}) > 1 - \delta, \quad (4.1)$$

$$R(s^{(2)}, s^{(1)}) > 1 - \delta, \quad (4.2)$$

则称电路 u 是可靠的, 否则称 u 是不可靠的.

二、可靠电路中继电器接点数的估计

在以下全部讨论中都认为有

$$q^{(1)} + q^{(2)} < 1, \quad s^{(1)} + s^{(2)} < 1,$$

因而

$$q^{(1)} < 1 - q^{(2)}, \quad s^{(2)} < 1 - s^{(1)}. \quad (5)$$

下一个定理指出了不能组成可靠电路的继电器.

定理 2. 设 $0 < \delta < \frac{1}{2}$, 若继电器 J 的概率特性具有不等式

$$\max \{q^{(1)}, s^{(2)}\} \geq \min \{1 - q^{(2)}, 1 - s^{(1)}\}, \quad (6)$$

则不能用 J 组成可靠电路.

証明：

根据式(5)和(6)可知应有下面一个不等式成立

$$1 - q^{(2)} \leq s^{(2)} \quad \text{或} \quad 1 - s^{(1)} \leq q^{(1)}. \quad (7)$$

假若存在着由 JI 組成的可靠电路,則应有

$$R(q^{(1)}, q^{(2)}) \equiv h(1 - q^{(2)}) - h(q^{(1)}) > 1 - \delta,$$

$$R(s^{(2)}, s^{(1)}) \equiv h(1 - s^{(1)}) - h(s^{(2)}) > 1 - \delta.$$

考慮到 $0 \leq h(p) \leq 1$ 和 $0 < \delta < \frac{1}{2}$, 則有

$$h(1 - q^{(2)}) > 1 - \delta > \delta > h(s^{(2)}),$$

$$h(1 - s^{(1)}) > 1 - \delta > \delta > h(q^{(1)}).$$

因为 $h(p)$ 是單調上升的, 所以

$$1 - q^{(2)} > s^{(2)} \quad \text{和} \quad 1 - s^{(1)} > q^{(1)}$$

均應成立. 这与式(7)相矛盾, 故此时可靠电路不存在(証毕).

下面应用文献[1]的若干結果对具有某些性质的电路中接点的数目进行一些估計.

定理 3. 給定 $0 < \delta < \frac{2}{e}$, $0 < q^{(1)} < 1 - q^{(2)} < 1$, $0 < s^{(2)} < 1 - s^{(1)} < 1$. 令 $\theta = \min \{ \ln q^{(1)} \cdot \ln q^{(2)}, \ln s^{(1)} \cdot \ln s^{(2)} \}$, 若存在可靠电路 u , 則 u 中的接点数 n 滿足不等式

$$n \geq \frac{\left(\ln \frac{\delta}{2} \right)^2}{\theta}. \quad (8)$$

証明：

因为电路 u 可靠, 故式(4.1)成立, 那么存在 ε 使得 ($0 < \varepsilon < \delta$)

$$h(q^{(1)}) < \varepsilon, \quad h(1 - q^{(2)}) > 1 - (\delta - \varepsilon).$$

根据条件 $0 < q^{(1)} < 1 - q^{(2)} < 1$ 以及文献[1]的結果, 可知

$$n \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln q^{(1)}} \cdot \frac{\ln (\delta - \varepsilon)}{\ln q^{(2)}}. \quad (A)$$

不难知道 $\varepsilon^* = \frac{\delta}{2}$ 是 $f(\varepsilon) = \ln \varepsilon \cdot \ln (\delta - \varepsilon)$ 在 $(0, \delta)$ 中的极小值点, 于是由式(A)可得

$$n \geq \frac{\left(\ln \frac{\delta}{2} \right)^2}{\ln q^{(1)} \cdot \ln q^{(2)}}. \quad (B)$$

同理, 由于 u 滿足式(4.2), 亦有

$$n \geq \frac{\ln \left(\frac{\delta}{2} \right)^2}{\ln s^{(1)} \cdot \ln s^{(2)}}. \quad (C)$$

由式(B)和式(C)立即可得式(8)(証毕).

定理 4. 給定 $0 < \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 < q^{(1)} < 1 - q^{(2)} < 1$, $d_1 = \max \left\{ \frac{1 + (q^{(1)} - q^{(2)})}{2}, \right.$

$\frac{1 + (q^{(2)} - q^{(1)})}{2}$ }, 则存在着接点数不多于

$$N_1 = 81 \left[\frac{\log \frac{1 - q^{(1)} - q^{(2)}}{4}}{\log d_1} \right] \left(\frac{1}{1 - q^{(1)} - q^{(2)}} \right)^{\frac{\log 9}{\log 3/2}} (1 + 2 \log_2 \delta)^2 \quad (9)$$

的电路满足式(4.1).

证明:

设 ε 是满足不等式 $0 < \varepsilon < \delta$ 的定数. 再令 $\varepsilon^* = \min \{ \varepsilon, \delta - \varepsilon \}$. 文献[1]的结果指出, 存在着接点数不多于

$$81 \left[\frac{\log \frac{c - a}{4}}{\log d} \right] \left(\frac{1}{c - a} \right)^{\frac{\log 9}{\log 3/2}} \left(\frac{\log \sqrt{8 \delta}}{\log \sqrt{2}} \right)^2$$

的电路使得不等式

$$h(a) < \delta \text{ 与 } h(c) > 1 - \delta$$

成立. 此处 $d = \max \left\{ \frac{c + a}{2}, 1 - \frac{c + a}{2} \right\}$, $0 < a < c < 1$.

若令 $c = 1 - q^{(2)}$, $a = q^{(1)}$, 再应用上述文献[1]的结果, 便知存在着接点数不多于

$$N_\varepsilon = 81 \left[\frac{\log \frac{1 - q^{(1)} - q^{(2)}}{4}}{\log d_1} \right] \left(\frac{1}{1 - q^{(1)} - q^{(2)}} \right)^{\frac{\log 9}{\log 3/2}} \left(\frac{\log \sqrt{8 \varepsilon^*}}{\log \sqrt{2}} \right)^2 \quad (D)$$

的电路使得不等式

$$h(q^{(1)}) < \varepsilon^* \leq \varepsilon \text{ 与 } h(1 - q^{(2)}) > 1 - \varepsilon^* \geq 1 - (\delta - \varepsilon)$$

均成立. 又由 ε^* 的定义及对 δ 的限制, 可知

$$0 < \varepsilon^* \leq \frac{\delta}{2} < \frac{1}{\sqrt{8}} < 1,$$

$$\therefore (\log \sqrt{8 \varepsilon^*})^2 \geq (\log \sqrt{2 \delta})^2. \quad (E)$$

从(D)、(E)可知, 当 $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ (此时 $\varepsilon^* = \frac{\delta}{2}$) 时, N_ε 取得最小值, 即存在着接点数不多于

$$\begin{aligned} N_1 &= 81 \left[\frac{\log \frac{1 - q^{(1)} - q^{(2)}}{4}}{\log d_1} \right] \left(\frac{1}{1 - q^{(1)} - q^{(2)}} \right)^{\frac{\log 9}{\log 3/2}} \left(\frac{\log \sqrt{2 \delta}}{\log \sqrt{2}} \right)^2 = \\ &= 81 \left[\frac{\log \frac{1 - q^{(1)} - q^{(2)}}{4}}{\log d_1} \right] \left(\frac{1}{1 - q^{(1)} - q^{(2)}} \right)^{\frac{\log 9}{\log 3/2}} (1 + 2 \log_2 \delta)^2 \end{aligned}$$

的电路满足

$$h(q^{(1)}) < \frac{\delta}{2}, \quad h(1 - q^{(2)}) > 1 - \frac{\delta}{2}. \quad (F)$$

由式(F)即知此电路亦使得式(4.1)成立(证毕).

类似地也可以证得下面的定理.

定理 4'. 給定 $0 < \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 < s^{(2)} < 1 - s^{(1)} < 1$, $d_2 = \max \left\{ \frac{1 + (s^{(1)} - s^{(2)})}{2}, \frac{1 + (s^{(2)} - s^{(1)})}{2} \right\}$, 則存在着接點數不多於

$$N_2 = 81 \left[\frac{\log \frac{1 - s^{(1)} - s^{(2)}}{4}}{\log d_2} \right] \left(\frac{1}{1 - s^{(1)} - s^{(2)}} \right)^{\frac{\log 9}{\log 3/2}} (1 + 2 \log_2 \delta)^2 \quad (10)$$

的電路滿足式(4.2).

定理 5 給出了可靠電路中接點數的估計公式.

定理 5. 給定 $0 < \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 若 $q^{(1)}, q^{(2)}, s^{(1)}, s^{(2)}$ 滿足 $0 < x = \max \{q^{(1)}, s^{(2)}\} < y = \min \{1 - q^{(2)}, 1 - s^{(1)}\} < 1$, 且 $d = \max \left\{ \frac{x + y}{2}, 1 - \frac{x + y}{2} \right\}$, 則存在接點數不多於

$$N_* = 81 \left[\frac{\log \frac{y - x}{4}}{\log d} \right] \left(\frac{1}{y - x} \right)^{\frac{\log 9}{\log 3/2}} (1 + 2 \log_2 \delta)^2 \quad (11)$$

的電路是可靠的.

證明:

根據文獻[1]和定理 4 的證明, 可知存在着接點數不多於 N_* 的電路滿足

$$h(x) < \frac{\delta}{2}, \quad h(y) > 1 - \frac{\delta}{2}. \quad (G)$$

由本定理的條件可知

$$h(q^{(1)}) \leq h(x) < \frac{\delta}{2}, \quad h(s^{(2)}) \leq h(x) < \frac{\delta}{2},$$

$$h(1 - q^{(2)}) \geq h(y) > 1 - \frac{\delta}{2}, \quad h(1 - s^{(1)}) \geq h(y) > 1 - \frac{\delta}{2},$$

於是此電路同時滿足(4.1)與(4.2)兩式, 因而此電路是可靠的(証畢).

特別是當定理 5 中的參數 x 和 y 滿足

$$0 < x < \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4} < y < 1$$

時, 亦可以得到與文獻[1]相應的估計公式¹⁾, 即此時存在着接點數不多於

$$N_{**} = 9 \left(\frac{\log \sqrt{2} \delta}{\log \sqrt{8} g^*} \right)^2 \quad (12)$$

的電路是可靠的, 其中

$$0 < \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g^* = \max \{x, 1 - y\}. \quad (\text{証略})$$

1) 實際上這裡不需要再考慮組成可靠電路的前兩個步驟, 只需直接採用第三個步驟(見文獻[1]).

三、与 Moore-Shannon 結果的比較

1. 前面已經指出文献 [1] 的模型及准則沒有考虑继电器接点的动作时刻, 这是与本文的基本区别。但是本文的模型和准則仍然适用于文献 [1], 因为在文献 [1] 中未将提前接通和提前断开看作是故障, 即有 $q^{(1)} = s^{(1)} = 0$, 这样式 (4.1) 和 (4.2) 就变成

$$h(1 - q^{(2)}) > 1 - \delta, \quad h(s^{(2)}) > 1 - \delta,$$

这就是文献 [1] 的准則。此处 $s^{(2)}$ 和 $1 - q^{(2)}$ 相当于文献 [1] 中的 a 与 $1 - c$ 。以上說明本文仍然能解决文献 [1] 的模型和对象。本文的模型和准則較之文献 [1] 的应用范围更广, 更有实际意义。

2. 若对文献 [1] 中的参数 a 和 c 在本文的意义下与 $q^{(1)}, q^{(2)}, s^{(1)}, s^{(2)}$ 之間建立一定的关系, 则可証明本文的公式 (12) 所表示的 N_{**} 較之文献 [1] 相应的公式

$$N_{**} = 9 \left(\frac{\log \sqrt{8\delta}}{\log \sqrt{8g}} \right)^2, \quad g = \max \{a, 1 - c\} \quad (12')$$

所表示的 N_{**} 在 δ 充分小的情况下更佳。为了証明这点, 現用 $(J)_*$ 表示事件“继电器 J 的接点在不应接通时接通”, 而用 $(J)^*$ 表示事件“继电器 J 的接点在应该接通时不接通”。于是便有

$$\left. \begin{aligned} (J)_* &= (J)_1 U (J)^{-1}, \\ (J)^* &= (J)^{-1} U (J)_1. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

在文献 [1] 的模型 (图 1) 中, 由 $a, 1 - c$ 的意义作下面的假设是合理的, 即設

$$a = p[(J)_*], \quad 1 - c = p[(J)^*]. \quad (14)$$

由 (13) 和 (14) 可知

$$a > \max \{q^{(1)}, s^{(2)}\} = x, \quad c < \min \{1 - q^{(2)}, 1 - s^{(1)}\} = y, \quad (15)$$

因而

$$\begin{aligned} g &= \max \{a, 1 - c\} > \max \{x, 1 - y\} = g^*, \\ \log \sqrt{8g} &> \log \sqrt{8g^*}. \end{aligned} \quad (A)$$

由于 $\sqrt{8g}$ 和 $\sqrt{8g^*}$ 均小于 1, 故 $\log \sqrt{8g}$ 和 $\log \sqrt{8g^*}$ 均小于零。由式 (A) 得

$$\frac{\log \sqrt{8g^*}}{\log \sqrt{8g}} > 1. \quad (B)$$

此外, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \sqrt{2\delta}}{\log \sqrt{8\delta}} = 1.$$

于是当 δ 充分小时, 总有

$$\frac{\log \sqrt{8g^*}}{\log \sqrt{8g}} > \frac{\log \sqrt{2\delta}}{\log \sqrt{8\delta}},$$

因此

$$\frac{\log \sqrt{8\delta}}{\log \sqrt{8g}} > \frac{\log \sqrt{2\delta}}{\log \sqrt{8g^*}} > 0.$$

將上式兩邊平方後乘以 9，便可得到

$$N^{**} > N_{**}. \quad (16)$$

因此，當 δ 充分小時， N_{**} 較之 N^{**} 更佳。

在式(13)中若設 $(J)_1$ 和 $(J)^{-1}$ 獨立， $(J)_{-1}$ 和 $(J)^1$ 獨立，則有

$$a = q^{(1)} + s^{(2)} - q^{(1)}s^{(2)}, \quad 1 - c = q^{(2)} + s^{(1)} - q^{(2)}s^{(1)} \quad (17)$$

成立。現根據式(17)舉出下面的例子來驗證式(16)。

例 1. 取 $q^{(1)} = q^{(2)} = s^{(1)} = s^{(2)} = 10^{-2}$

(1) 當 $\delta = 10^{-5}$ 時，可算得

$$N^{**} \doteq 119, \quad N_{**} \doteq 88, \quad N^{**} - N_{**} \doteq 31;$$

(2) 當 $\delta = 10^{-10}$ 時，可算得

$$N^{**} \doteq 549, \quad N_{**} \doteq 364, \quad N^{**} - N_{**} \doteq 185;$$

(3) 當 $\delta = 10^{-20}$ 時，可算得

$$N^{**} \doteq 2201, \quad N_{**} \doteq 1479, \quad N^{**} - N_{**} \doteq 722.$$

例 2. 取 $q^{(1)} = q^{(2)} = s^{(1)} = s^{(2)} = 10^{-1}$

(1) 當 $\delta = 10^{-5}$ 時，可算得

$$N^{**} \doteq 2558, \quad N_{**} \doteq 676, \quad N^{**} - N_{**} \doteq 1882;$$

(2) 當 $\delta = 10^{-10}$ 時，可算得

$$N^{**} \doteq 11561, \quad N_{**} \doteq 2916, \quad N^{**} - N_{**} \doteq 8645.$$

在本文寫作中，曾得到朱洪昌先生很多幫助，在此謹表謝意。

參 考 文 獻：

- [1] Moore, E. F., Shannon, C. E., Reliable Circuits Using Less Reliable Relays, *J. Franklin Inst.*, 262 (1956), No. 3, 191—208; No. 4, 281—297 (俄譯文見《Кибернетический сборник》，ил. 1960)。
- [2] Гаврилов, М. А., Теория релейно-контактных схем, Изд-во АН СССР, 1950。
- [3] 陸益壽，继电器接点电路邏輯基礎，上海科學技術出版社，1958。

RELIABLE CIRCUITS USING LESS RELIABLE RELAYS

SÜ TING-YÜ

This article consists of three parts. In the first part, based upon the practical requirement for the operation time of relay contacts, the author improved the state model of Moore and Shannon and established a new model. Through theoretical analysis of the new model, it has been proved that the new criterion for measuring the reliability of relay circuit should be the simultaneous fulfilment of the following two inequalities:

$$R(q^{(1)}, q^{(2)}) > 1 - \delta,$$

$$R(s^{(2)}, s^{(1)}) > 1 - \delta.$$

In the second and third parts the author made use of some results in [1] to estimate again the number of relays' contact points in a reliable circuit. Finally, theoretical analysis and numerical computation show, that in general, the results obtained by the new method are better than that obtained by the method of Moore and Shannon.