第 4 卷　第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 4, No. 2
1966 年 4 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　April, 1966

相空間坐标受限时的最优控制問題*

张 嗣 瀛

摘　　要

对于相空间坐标受限的最优控制问题，P. B. 加姆克列利德泽等得到了控制最优性的必要条件（即熟知的极大值原理）和衔接点处的"跳跃条件"[1]. 但是文献[1]中所用的数学工具不是初等的，推证过程也较繁长，不易为工程技术界所理解. 本文在应用文献[1]中某些分析的基础上，采用文献[2,3]中的方法处理这一问题，作法较为简单，而且除了得到[1]中的结论外，还可得到一些新的结果，例如，文中所得到的某些充分条件以及对于线性系统"小范围"最优性的必要充分条件等.

一、最优軌綫全部位于受限区域边界上的情形

1. 问题的提出

设下面的方程组描述一个控制系统:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_r; t), \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{1}$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是广义坐标，$u_1(t), \cdots, u_r(t)$ 是控制参数（以后简称为"控制"）. 它们是定义在某一区间 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 的分段连续函数，在此区间有有限个第一类间断点，此外还受如下 l 个条件的限制:

$$q_k(u_1, \cdots, u_r) \leqslant 0, \quad (k = 1, \cdots, l) \tag{2}$$

此处 $q_k(u_1, \cdots, u_r)$ 是些连续可微的纯量函数，以后称满足条件(2)的控制为"容许控制"，表示容许控制的点 $u = (u_1, \cdots, u_r)$ 在 r 维空间中构成一个闭区域 U. 又，(1)式中函数 f_j 对于诸 x_i 有连续的一阶及二阶偏导数，对于 $u_1, \cdots, u_r$ 满足李普希兹条件.

考虑积分泛函

$$J = \int_{t_0}^{T} f_0(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_r; t)dt, \tag{3}$$

其中 f_0 的性质和 f_j 者相同. 另外，在 n 维相空间 X 中，给定一个闭域 B，它由下式确定

$$g(x_1, \cdots, x_n) \leqslant 0. \tag{4}$$

此区域的边界是超曲面

$$g(x_1, \cdots, x_n) = 0. \tag{5}$$

设此边界是光滑的，并对诸 x_i 有连续的一阶及二阶偏导数，且向量

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \operatorname{grad} g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)$$

* 本文于 1963 年 11 月 5 日收到.

在边界上总不为零.

我们提出如下的问题：在空间X中，给定两个属于闭域B的点 $x^0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$, $x^1=(x_1^1,\cdots,x_n^1)$. 今要求在一切使映象点由x^0到x^1且相应的轨线完全位于闭域B内的容许控制中,选取控制$u(t)=(u_1(t),\cdots,u_r(t))$ $(t_0\leqslant t\leqslant T)$,以使积分(3)有最小值. 这样的控制称为最优控制.

这里问题的特点是：在控制过程$t_0\leqslant t\leqslant T$中,须考虑(4)式的限制. 此节将讨论最优轨线全部位于边界(5)上的情形.

我们现引进新变量x_0,使

$$\frac{dx_0}{dt}=f_0(x,u,t). \tag{6}$$

于是问题可化为使$x_0(T)$有极小值的问题.

将式(1)及(6)合并,可写成

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\cdots,x_n;u_1,\cdots,u_r;t).\ (i=0,1,\cdots,n) \tag{7}$$

用$\mathbf{x}$标记$n+1$维向量$\mathbf{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$,又可将式(7)写成向量式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(x,u,t). \tag{8}$$

此外,n维空间中的区域B,在$n+1$维空间中将用G记之,且G由下式确定

$$g(\mathbf{x})=g(x_0,x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)\leqslant 0. \tag{9}$$

2. 问题的解

以下将逐步求解.

(1) 最优控制$u(t)$及最优轨线$\mathbf{x}(t)$所应满足的条件

今用$u(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$表示最优控制及与其相对应的最优轨线. 由于最优轨线完全位于区域G的边界上,故有

$$g(\mathbf{x}(t))\equiv 0.\ (t_0\leqslant t\leqslant T) \tag{10}$$

为了便于研究其他容许控制及其相应轨线所受的限制,我们引进与式(10)等价的关系式

$$g(\mathbf{x}(t_0))=0,\quad p(\mathbf{x}(t),u(t),t)\equiv 0,\quad (t_0\leqslant t\leqslant T) \tag{11}$$

其中

$$p(\mathbf{x},u,t)=\left(\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}},f(\mathbf{x},u,t)\right). \tag{12}$$

右端表示向量$\dfrac{\partial g}{\partial\mathbf{x}}$与向量$f(\mathbf{x},u,t)$的数积. $p(\mathbf{x}(t),u(t),t)$实质上是$g(\mathbf{x})$沿最优轨线的全导数.

最优控制$u(t)$或位于区域U之边界上,或位于U之内部. 又计及式(11),因此$u(t)$应满足

$$\left.\begin{aligned}&p(\mathbf{x},u,t)=0,\\&q_1(u)=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\&q_m(u)=0.\end{aligned}\right\}\quad(0\leqslant m\leqslant l) \tag{13}$$

($m=0$是$u(t)$为U之内点时的情形). 欲使式(13)对于$u_1,\cdots,u_r$有解，则必须以下诸

向量线性无关:

$$\frac{\partial p}{\partial u},\ \frac{\partial q_1}{\partial u},\ \cdots,\ \frac{\partial q_m}{\partial u}. \tag{14}$$

此时只要适当地对 $u_1, \cdots, u_r$ 的下标排列编号,就有(在 $u(t)$ 的连续性的点处)

$$\frac{\partial(p, q_1, \cdots, q_m)}{\partial(u_1, \cdots, u_{m+1})} \neq 0,$$

亦即可将 $u_1, \cdots, u_{m+1}$ 用 $u_{m+2}, \cdots, u_r$ 等来表示.

显然,此处 m 最大的值只能取 $m = r - 1$. 当 $m = 0$ 时,则化为要求

$$\frac{\partial p}{\partial u} \neq 0. \tag{15}$$

条件 $p(\mathbf{x}, u, t) = 0$ 和(15)式及(14)式合在一起,将称为"正则性条件".

(2) 容许控制及容许轨线

今用 $v(t) = u(t) + \delta u(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 表示其他容许控制及与其相对应的轨线. 我们要求 $\mathbf{y}(t)$ 不能跑出区域 G. 为此,引入函数[1]

$$R(\mathbf{y}, v, \mu, t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial h(\mathbf{y}, \mu)}{\partial \mathbf{y}_i} f_i(\mathbf{y}, v, t) = \frac{\partial h(\mathbf{y}, \mu)}{\partial \mathbf{y}}, f(\mathbf{y}, v, t), \tag{16}$$

其中

$$h(\mathbf{y}, \mu) = g\left(\mathbf{y} + \mu \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha(x) N_\alpha\right), \tag{17}$$

$\mu \geqslant 0$ 是充分小的数. $a_\alpha(x)$, N_α 等的意义见文献[1]. 当 $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, $v = u$, $\mu = 0$ 时, 显然有

$$R(\mathbf{x}(t), u(t), o, t) = p(\mathbf{x}(t), u(t), t). \tag{18}$$

据文献[1]中的分析可知: 若 $\mathbf{y}(t)$ 的初始值 $\mathbf{y}(t_0)$ 位于 G 之边界上或位于 G 的内部 G 之边界的微小邻域, 则当 $R(\mathbf{y}, v, \mu, t) = 0$ 时, $\mathbf{y}(t)$ 总位于 G 内. 因此,欲使 $\mathbf{y}(t)$ 不跑出区域 G, 对于 $\mathbf{y}$, v, 应有 $g(y(t_0)) \leqslant 0$ 和

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}, v, t), \\ &R(\mathbf{y}, v, \mu, t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

如在文献[1]中那样,将区间 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 分为一些充分小的分区间 $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$, 其中 τ_i, τ_{i+1} 等含有 $u(t)$ 及其导数的一切间断点. 同时,在这些分区间的左端, 有关各量取 $\tau_i + 0$ 时的值,右端取 $\tau_{i+1} - 0$ 时的值. 以后也均遵守此规定. 于是,在前面正则性条件下,就总可找到在每一这样区间上的 $v(t)$ 及 $\mathbf{y}(t)$,且使 $\mathbf{y}(t)$ 保证在 G 内(详见附录).

(3) 泛函改变量公式

我们即以这样的 $\mathbf{y}(t)$ 作为其他容许轨线, 与最优轨线 $\mathbf{x}(t)$ 相比较以推求泛函改变量公式.

据式(7),我们有

$$\delta \dot{x}_i = f_i(x + \delta x, u + \delta u, t) - f_i(x, u, t). \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

两端各乘以乘子 $\lambda_i(t)$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ (它们是非零函数, 稍后将说明此等函数如何确定),然后自 t_0 到 T 积分. 左端积分时用分部积分法,同时引入函数

$$H(\boldsymbol{\lambda}, x, u, t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(x, u, t), \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是 $n+1$ 维向量. 于是可得

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(t)\delta x_i(t)\Big|_{t_0}^{T} =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left[\sum_{i=0}^{n} \dot{\lambda}_i \delta x_i + H(\boldsymbol{\lambda}, x+\delta x, u+\delta u, t) - H(\boldsymbol{\lambda}, x, u, t) \right] dt. \tag{21}$$

如在文献[2]中的作法那样，今考虑由于要求轨线不跑出区域 G 而使 $\mathbf{y}$, v (从而 $\delta\mathbf{x}$, δu) 所受到的附加限制，据以上的讨论，得知这一限制就是

$$R(\mathbf{y}, v, \mu, t) = 0.$$

据此式，在 $u(t)$ 的连续性的点处，我们有

$$\frac{\partial R(\mathbf{x}, u, o, t)}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} + \frac{\partial R(\mathbf{x}, u, o, t)}{\partial u} \delta u + \frac{\partial R(\mathbf{x}, u, o, t)}{\partial \mu} \mu + o(\delta\mathbf{x}) = 0.$$

此处，为简单起见，我们用 $o(\delta\mathbf{x})$ 标记较 $\delta\mathbf{x}$, δu, μ 的更高阶微量. 由文献[3]中对 $\delta\mathbf{x}$ 的估值，可知 $\delta\mathbf{x}$ 与 δu 是同阶微量. 又，由于 μ 是充分小的量，在下面的分析中 $o(\mu)$ 将象 $o(\delta\mathbf{x})$ 那样不影响所得结果，故可以把它们都归入 $o(\delta\mathbf{x})$ 项中.

据式(18)，上式可写成

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} + \frac{\partial p}{\partial u} \delta u + \frac{\partial R}{\partial \mu} \mu + o(\delta\mathbf{x}) = 0. \tag{22}$$

此关系式对于一切 t, $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ 均成立.

控制 $v = u + \delta u$ 还须受到式(2)的限制. 为此，如文献[1]可令其满足

$$q_k(v) - q_k(u) = 0. \quad (k = 1, \cdots, m), \tag{23}$$

据此，对于任何 t, $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$，又有

$$\frac{\partial q_k(u)}{\partial u} \delta u + o(\delta u) = 0. \quad (k = 1, \cdots, m) \tag{24}$$

应用拉格朗日乘子，将式(22)乘以乘子 $r(t)$，式(24)分别乘以乘子 $\eta_k(t)(k = 1, \cdots, m)$，然后将两式相加，便得

$$r\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} + r\frac{\partial p}{\partial u} \delta u + r\frac{\partial R}{\partial \mu} \mu + \sum_{k=1}^{m} \eta_k \frac{\partial q_k}{\partial u} \delta u + o(\delta x) = 0. \tag{25}$$

我们选取乘子 $r(t)$, $\eta_k(t)$，使其满足条件

$$r\frac{\partial p}{\partial u} \delta u + \sum_{k=1}^{m} \eta_k \frac{\partial q_k}{\partial u} \delta u = -r\frac{\partial R}{\partial \mu} \mu. \tag{26}$$

在此条件下，据式(25)，有

$$r\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} + o(\delta\mathbf{x}) = 0. \tag{27}$$

此关系式对于一切 t, $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ 均成立，这也就是 $\delta\mathbf{x}$ 所应受的附加限制.

今先来讨论乘子 $r(t)$, $\eta_k(t)$, $(k = 1, \cdots, m)$. 在 $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ 上，由于要求 $\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$，故 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 存在. 因此，在这样的区间上，据式(8)我们有

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \delta\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u + o(\delta\mathbf{x}).$$

又,将式(22)乘以乘子 $\Lambda(t)$,然后与上式相加得

$$\delta\dot{\mathbf{x}}=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}+\Lambda\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\right)\delta\mathbf{x}+\Lambda\frac{\partial R}{\partial \mu}\mu+\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\Lambda\frac{\partial p}{\partial u}\right)\delta u+o(\delta\mathbf{x}).$$

此处设乘子 $\Lambda(t)$ 与 $r(t)$ 之间有如下关系:

$$r(t)=-(\lambda(t),\Lambda(t)),\tag{28}$$

故 $r(t)$ 是一个纯量. 我们先选取 $\Lambda(t)$,使

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\Lambda\frac{\partial p}{\partial u}\right)\delta u=0.\tag{29}$$

应注意此处是认为式(28)及式(29)均确定在式(26)之先. 在条件(29)之下, 据(28)式前面的关系式可得

$$\delta\dot{\mathbf{x}}=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}+\Lambda\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\right)\delta\mathbf{x}+\Lambda\frac{\partial R}{\partial \mu}\mu+o(\delta\mathbf{x}).\tag{30}$$

将式(29)两端乘以 $\lambda(t)$,并应用式(28)可得

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial u}\delta u-r\frac{\partial p}{\partial u}\delta u=0.$$

由于 $\lambda\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{\partial H}{\partial u}$,故上式又可写成

$$\frac{\partial H}{\partial u}\delta u=r\frac{\partial p}{\partial u}\delta u.\tag{31}$$

又,当 δu 充分小时,据式(24)可象文献[1]中那样,证明有

$$\frac{\partial q_k}{\partial u}\delta u=0.\quad(k=1,\cdots,m)\tag{32}$$

将式(31),(32)代入式(26)中可知

$$-r\frac{\partial R}{\partial \mu}\mu=\frac{\partial H}{\partial u}\delta u.\tag{33}$$

因此,由式(26)我们又可得

$$r\frac{\partial p}{\partial u}+\sum_{k=1}^{m}\eta_k\frac{\partial q_k}{\partial u}=\frac{\partial H}{\partial u}.\tag{34}$$

再写成分量式

$$\left.\begin{array}{l} r\dfrac{\partial p}{\partial u_1}+\eta_1\dfrac{\partial q_1}{\partial u_1}+\cdots+\eta_m\dfrac{\partial q_m}{\partial u_1}=\dfrac{\partial H}{\partial u_1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ r\dfrac{\partial p}{\partial u_r}+\eta_1\dfrac{\partial q_1}{\partial u_r}+\cdots+\eta_m\dfrac{\partial q_m}{\partial u_r}=\dfrac{\partial H}{\partial u_r}. \end{array}\right\}\tag{35}$$

由此可见,在区间 $\tau_i\leqslant t\leqslant\tau_{i+1}$ 上, 并在前面正则性的条件下, 据式(35)可对乘子 $r(t)$, $\eta_k(t)$ $(k=1,\cdots,m)$ 求解. 又,在 $t_0\leqslant t\leqslant T$ 上, $r(t)$ 可能有间断点.

同样,由式(32)及式(29), 可推知在正则性条件下乘子 $\Lambda(t)$ 也可据一定的关系式求解(这只须将式(32)乘以乘子 $\xi_k(t)$,然后与式(29)相加,就得到形式如式(34)的方程).

由此可见, 满足式(26),(28),(29)的乘子 $r(t)$, $\eta_k(t)(k=1,\cdots,m)$, $\Lambda(t)$ 等均可据一定关系式求解.

$r(t)$ 的性质既明，即可应用式(27)．

据式(27)，类似于式(32)的证明，我们在将 μ 写成 $\varepsilon\delta\mu$ 之后，还可证明有

$$r\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{x} = 0. \tag{36}$$

在式(21)中右端积分时，也可分为一些分区间 $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$，然后将式(36)自被积函数中减去，再将被积函数加减一项 $H(\boldsymbol{\lambda}, x, u+\delta u, t)$ 及一项 $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\partial H(\boldsymbol{\Lambda}, x, u, t)}{\partial x_i}\delta x_i$．于是可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(t)\delta x_i(t)\Big|_{t_0}^{T} = \int_{t_0}^{T}\Bigg\{&\sum_{i=0}^{n}\left(\dot{\lambda}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} - r\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \\ &+ [H(\boldsymbol{\Lambda}, x, u+\delta u, t) - H(\boldsymbol{\Lambda}, x, u, t)] + \\ &+ \left[\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\boldsymbol{\Lambda}, x, u+\delta u, t) - H(\boldsymbol{\Lambda}, x, u, t))\delta x_i\right] + \\ &+ \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\boldsymbol{\Lambda}, x+\theta\delta x, u+\delta u, t)\right]\Bigg\}dt,\quad 0<\theta(t)<1.\end{aligned} \tag{37}$$

我们选取乘子 $\lambda_i(t)$，使

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} + r\frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{38}$$

此外，在将其他容许轨线与最优轨线进行比较时，可设其他容许轨线的起始点与最优轨线者相同，亦即初始点 x^0 固定且均位于边界 $g(x) = 0$ 上(这自然满足式(19)所要求的条件 $g(\mathbf{y}(t_0)) \leqslant 0$)．在初始点固定的情形下，有

$$\delta x_j(t_0) = 0. \quad (j = 1, \cdots, n)$$

又，当 $t = t_0$ 时，泛函(3)不会有改变量，故据式(3)及式(6)我们有

$$\delta x_0(t_0) = 0.$$

因此，只要选取

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_0(T) = -1,\\ &\lambda_j(T) = 0, \quad (j = 1, \cdots, n)\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

并将它们作为式(38)的边界条件，式(37)的左端即为 $-\delta x_0(T) = -\Delta J$．这样一来，由式(37)，(38)得到

$$\begin{aligned}\Delta J = -\int_{t_0}^{T}\Bigg\{&[H(\boldsymbol{\Lambda}, x, u+\delta u, t) - H(\boldsymbol{\Lambda}, x, u, t)] + \\ &+ \left[\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\boldsymbol{\Lambda}, x, u+\delta u, t) - H(\boldsymbol{\Lambda}, x, u, t))\delta x_i\right] + \\ &+ \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\boldsymbol{\Lambda}, x+\theta\delta x, u+\delta u, t)\right]\Bigg\}dt,\quad 0<\theta(t)<1.\end{aligned} \tag{40}$$

这就是所欲推求的泛函改变量公式．

(4) 结论

据式(40)，用文献[2,3]中的作法，即可证明熟知的极大值条件即是控制最优性的必要条件．还可证明控制最优性某种意义下(即"小范围"最优性)的充分条件．

对于线性系统

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t)x_k+\varphi_j(u_1,\cdots,u_r)+b_j(t),\quad (j=1,\cdots,n) \tag{41}$$

容易看出：此时式(40)右端被积函数中只剩下 $H(\Lambda, x, u+\delta u, t)-H(\Lambda, x, u, t)$. 由此不难证明，极大值条件对于“小范围”最优性不仅必要，而且充分.

3. 一些讨论

(1) 关于边界条件

对于式(38)，除了形式如式(39)的边界条件，还有可能采用其他形式.

考虑乘积

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(T)\delta x_j(T)=(\lambda(T),\delta x(T))$$

右端括号内是两个 n 维向量，如果我们能够选取 $\lambda(T)=(\lambda_1(T),\cdots,\lambda_n(T))$，使

$$(\lambda(T),\delta x(T))=\delta c\leqslant 0, \tag{42}$$

此外仍取 $\lambda_0(T)=-1$，则此时代替式(40)将有

$$\Delta J-\delta c=-\int_{t_0}^{T}\{\cdots\}dt.\ (\delta c\leqslant 0) \tag{43}$$

此式右端和式(40)右端相同. 根据此式，用文献[3]中的作法，仍可证明极大值条件是控制最优性的必要条件.

若能够选取 $\lambda(T)$ 使

$$(\lambda(T),\delta x(T))=\delta c_1\geqslant 0, \tag{44}$$

则可得到

$$\Delta J-\delta c_1=-\int_{t_0}^{T}\{\cdots\}dt.\ (\delta c_1\geqslant 0) \tag{45}$$

据此公式类似于文献[2]，又可证明“小范围”最优性的充分条件.

如果由式(4)所表示的区域 B 是凸的，则满足式(42)及式(44)的 $\lambda(T)$ 确实存在. 这只要经过最优轨线的末端点 x^1（它在区域 B 的边界上），作区域 B 的支撑超平面，再经过 x^1 作此超平面的法线，并适当选定指向，即可得到一个向量并将它作为所需要的 $\lambda(T)$. 由于其他容许轨线的末端点均位于 B 内，因此所选定的 $\lambda(T)$ 必满足式(42)或式(44).

(2) 一些其他条件

1) 由于 H 及 f_i 中均不显含 x_0，故据式(38)可得

$$\lambda_0(t)=\text{常数}.$$

又由式(39)，故我们总有

$$\lambda_0(t)=-1,\quad t_0\leqslant t\leqslant T. \tag{46}$$

2) 可证在 $r(t)$ 的一切可微性的点处有

$$\frac{dr(t)}{dt}\leqslant 0. \tag{47}$$

据式(33)知

$$-r\frac{\partial R}{\partial\mu}\mu=\frac{\partial H}{\partial u}\delta u.$$

又，在 $u(t)$ 连续性的点处有

$$H(\Lambda, x, u+\delta u, t) - H(\Lambda, x, u, t) = \frac{\partial H}{\partial u}\delta u + o(\delta u).$$

由极大值条件有

$$\frac{\partial H}{\partial u}\delta u + o(\delta u) \leqslant 0,$$

从而必须

$$\frac{\partial H}{\partial u}\delta u \leqslant 0,$$

因此有

$$r\frac{\partial R}{\partial \mu}\mu \geqslant 0,$$

$$\int_{t_0}^{T}\left\{r(t)\frac{\partial R}{\partial \mu}\mu\right\}dt \geqslant 0.$$

再将文献[1]中对于 $\frac{\partial R}{\partial \mu}$ 的计算式

$$\frac{\partial R}{\partial \mu} = \frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}\left[a_\alpha(\mathbf{x}(t))\left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}}, N_\alpha\right)\right]$$

代入上式进行分部积分，同时注意到 $\mu \geqslant 0$ 以及由于在定义函数 $R(\mathbf{y}, v, \mu, t)$ 时所决定的条件[1]

$$a_i(\mathbf{x}(t_0)) = a_i(\mathbf{x}(T)) = 0, \quad (i = 1, \cdots, s)$$
$$\left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}}, N_\alpha\right) > 0, \quad a_\alpha(\mathbf{x}(t)) \geqslant 0,$$

于是可得

$$\int_{t_0}^{T}\frac{dr}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}a_\alpha(\mathbf{x}(t))\left(\frac{\partial g(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}}, N_\alpha\right)dt \leqslant 0.$$

从而推出

$$\frac{dr(t)}{dt} \leqslant 0.$$

以上两个条件在文献[1]中都有.

至此，我们得到了文献[1]中的基本结果. 但与文献[1]相较，我们还得到了泛函改变量公式及上述充分条件.

(3) 如果受限区域为开域，或者为闭域但最优轨线完全位于区域的內部，则在这两种情形下，我们有 $g(\mathbf{x}) < 0$, $g(\mathbf{y}) < 0$，且 $g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})$ 沒有确定的符号，亦即 $\delta\mathbf{x}$（从而 δu）不再受到某种确定关系式的限制. 故此时可与轨线不受任何限制时的情形作完全相同的处理.

二、最优軌綫部分位于受限区域的內部、部分位于受限区域边界上的情形以及跳跃条件

设最优轨线由有限个线段组成，其中部分线段完全位于区域 G 的內部，部分线段或者

完全位于G的边界上,或者只有有限个点位于G的边界上.

不失普遍性,我们将考虑最优轨线由两线段组成的情形: $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t < \tau$ 的一段完全位于G的内部, $\mathbf{x}(t)$, $\tau < t \leqslant T$ 的一段或者完全位于边界上,或者完全位于G的内部. $\mathbf{x}(\tau)$ 位于边界上,它称为衔接点.

先考虑 $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant T$ 完全位于边界上的情形.

对于 $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ 的那一段,要求其末端点达到边界上,亦即要求

$$g(\mathbf{x}(\tau)) = 0, \tag{48}$$

$$g(\mathbf{x}(\tau) + \delta\mathbf{x}(\tau)) \leqslant 0. \tag{49}$$

又,由于整个轨线是连续的,故在 $t = \tau$ 时, 前一段轨线的终点也是后一段轨线的起点. 亦即,对于 $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant T$,在 $t = \tau$ 时,也应满足条件式(48)及式(49).

对于 $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ 的那一段,我们有

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^-(\tau)\delta x_i^-(\tau) - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^-(t_0)\delta x_i^-(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{\tau} \Big\{ [H(\Lambda^-, x, u+\delta u, t) - H(\Lambda^-, x, u, t)] +$$

$$+ \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(H(\Lambda^-, x, u+\delta u, t) - H(\Lambda^-, x, u, t))\delta x_i\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\Lambda^-, x+\theta\delta x, u+\delta u, t)\right]\Big\} dt, \quad 0 < \theta(t) < 1, \tag{50}$$

其中附加符号"—"系用来区别前一段轨线与后一段轨线的有关量. 对于后一段轨线, 将用"+"号. 上式中的H其定义仍如式(20). 函数 $\lambda_i^-(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ 等满足方程

$$\dot{\lambda}_i^-(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

对于完全位于边界上的 $\mathbf{x}(t)$, $\tau \leqslant t \leqslant T$,又有

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^+(T)\delta x_i^+(T) - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^+(\tau)\delta x_i^+(\tau) =$$

$$= \int_{\tau}^{T} \Big\{ [H(\Lambda^+, x, u+\delta u, t) - H(\Lambda^+, x, u, t)] +$$

$$+ \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(H(\Lambda^+, x, u+\delta u, t) - H(\Lambda^+, x, u, t))\delta x_i\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\Lambda^+, x+\theta\delta x, u+\delta u, t)\right]\Big\} dt, \quad 0 < \theta(t) < 1, \tag{51}$$

其中 $\lambda_i^+(t)$ 等满足式(38).

将式(50)与式(51)相加,并注意到 $\delta x_j^-(\tau) = \delta x_j^+(\tau)(j = 1, \cdots, n)$, 于是相加后所得等式的左端为

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^+(T)\delta x_i^+(T) - [\lambda_0^+(\tau)\delta x_0^+(\tau) - \lambda_0^-(\tau)\delta x_0^-(\tau)] -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} [\lambda_j^+(\tau) - \lambda_j^-(\tau)]\delta x_j^+(\tau) - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^-(t_0)\delta x_i^-(t_0).$$

又，由于条件式(48)及式(49)的限制，如文献[2]，得知 $\delta x_j^+(\tau)$, $(j=1,\cdots,n)$ 之间还受到如下的附加限制：

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\delta x_1^+(\tau)+\cdots+\frac{\partial g}{\partial x_n}\delta x_n^+(\tau)=\delta c\leqslant 0$$

或

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\delta x_1^+(\tau)+\cdots+\frac{\partial g}{\partial x_n}\delta x_n^+(\tau)-\delta c=0,\ (\delta c\leqslant 0) \tag{52}$$

其中 $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ 等都是在点 $\mathbf{x}(\tau)$ 处取的。将此式乘以乘子 $\beta>0$，然后加于式(50)与式(51)相加后的关系式上，其左端将为

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^+(T)\delta x_i^+(T)-[\lambda_0^+(\tau)\delta x_0^+(\tau)-\lambda_0^-(\tau)\delta x_0^-(\tau)]-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda_j^+(\tau)-\lambda_j^-(\tau)-\beta\frac{\partial g}{\partial x_j}\right]\delta x_j^+(\tau)-\beta\delta c-\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^-(t_0)\delta x_i^-(t_0). \tag{53}$$

今设初始点为固定，于是总有

$$\delta x_j^-(t_0)=0.\quad (j=1,\cdots,n)$$

又，$\delta x_0^-(t_0)$ 表示泛函在 t_0 时的改变量，应有 $\delta x_0^-(t_0)=0$。此外，我们再选取如下的条件：

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_0^+(T)=-1,\quad (\lambda_0^+(t)=\text{常数}=-1)\\&\lambda_j^+(T)=0,\quad (j=1,\cdots,n)\\&\lambda_0^-(\tau)=-1,\quad (\lambda_0^-(t)=\text{常数}=-1)\\&\lambda_j^+(\tau)=\lambda_j^-(\tau)+\beta\frac{\partial g}{\partial x_j},\quad (j=1,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

并注意到

$$\delta x_0^+(T)+\delta x_0^-(\tau)=\Delta J,$$

此处 ΔJ 是自 t_0 到 T 整个过程中的泛函改变量，于是式(53)即可化为

$$-(\Delta J+\beta\delta c).$$

这样一来，式(50)，(51)及式(52)乘以 β 三式相加后将得

$$\begin{aligned}\Delta J+\beta\delta c=&-\int_{t_0}^{\tau}\Big\{[H(\Lambda^-,x,u+\delta u,t)-H(\Lambda^-,x,u,t)]+\\&+\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\Lambda^-,x,u+\delta u,t)-H(\Lambda^-,x,u,t))\delta x_i\right]+\\&+\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2H(\Lambda^-,x+\theta\delta x,u+\delta u,t)\right]\Big\}dt-\\&-\int_{\tau}^{T}\Big\{[H(\Lambda^+,x,u+\delta u,t)-H(\Lambda^+,x,u,t)]+\\&+\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\Lambda^+,x,u+\delta u,t)-H(\Lambda^+,x,u,t))\delta x_i\right]+\\&+\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2H(\Lambda^+,x+\theta\delta x,u+\delta u,t)\right]\Big\}dt,\ 0<\theta(t)<1,\ \beta\delta c\leqslant 0.\end{aligned} \tag{55}$$

这就是泛函改变量公式.

在此公式的基础上,如文献[2],可证"小范围"最优性的充分条件. 对于 $\delta c = 0$ 的情形(例如要求 $g(\mathbf{x}(\tau) + \delta\mathbf{x}(\tau)) = 0$),还可证明极大值条件为控制最优性的必要条件.

式(54)中的最后一组条件,就是跳跃条件. 对于此一组条件,还有另一种可能,即

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_j^-(\tau) + \beta\frac{\partial g}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, \cdots, n) \\ &\lambda_j^+(\tau) = 0. \qquad\qquad\quad (j = 1, \cdots, n) \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

自然,在这种情形中边界条件 $\lambda_j^+(\tau) = 0$ 及 $\lambda_j^+(T) = 0$ 须相容. 若不能相容,则仍须取 $\lambda_j^+(\tau) = \lambda_j^-(\tau) + \beta\dfrac{\partial g}{\partial x_j}$. 此时已无相容性问题了,因后者只表明 $\lambda_j^+(\tau)$, $\lambda_j^-(\tau)$ 之间所应满足的关系,并不要求 $\lambda_j^+(\tau)$ 取特定值.

对于边界条件 $\lambda_j^+(T)(j = 1, \cdots, n)$ 的其他形式以及控制最优性的必要及充分条件等,还可如上一节那样进行讨论.

若 $\mathbf{x}(t)$, $\tau < t \leqslant T$ 完全位于G的内部(亦即只有点 $\mathbf{x}(\tau)$ 位于受限区域的边界上),则仍可用上面的方法处理. 只是关于 $\lambda_j^+(T)(j = 1, \cdots, n)$ 的其他可能形式的问题须另作研究.

对于最优轨线由数个线段组成、衔接点也有数个的情形, 也可用上面的方法逐步处理.

由以上我们看到,此处推求跳跃条件的方法,较文献[1]中简单得多,且更便于直接理解要求满足跳跃条件的原因.

最后举一例题[1].

设相空间X被超曲面 $g(x) = 0$ 分为两部分 X_1, X_2, 在 X_1, X_2 中映象点的运动规律分别为

$$X_1: \quad \frac{dx}{dt} = f_1(x, u),$$

$$X_2: \quad \frac{dx}{dt} = f_2(x, u).$$

今要求选取容许控制, 以使自 X_1 中的点 x^1 出发的轨线落到 X_2 中与 x_0 轴相平行的轴 π 上,且其 x_0 轴方向的坐标最小.

对此问题, 我们只证明最优轨线与 $g(x) = 0$ 的相交点处(设此时 $t = \tau$)须满足跳跃条件. 此处,轨线在 $t = \tau$ 时要穿过 $g(x) = 0$,且在 $g(x) = 0$ 的两边 X_1, X_2 内的运动方程不同. 因此,我们应取一切在 $t = \tau$ 时正好到达 $g(x) = 0$ 的容许轨线来进行比较.

若用文献[1]中的方法,则须用到该书 330 页的引理,即 $\delta x(\tau)$ 必须指向 $g(x) = 0$ 的内部(此处应指向 X_1),而不能与 $g(x) = 0$ 相切. 可见对于此例该引理不能应用.

但用我们的作法, 则不会引起任何困难. 我们只要按前面推求泛函改变量公式的步骤进行,并注意到在 $t = \tau$ 时 $x(\tau)$ 及 $x(\tau) + \delta x(\tau)$ 所应受到的限制:

$$g(x(\tau)) = 0, \quad g(x(\tau) + \delta x(\tau)) = 0,$$

就可得到跳跃条件及泛函改变量公式.

据跳跃条件,不难推出一般变分法中的折射条件(可参看文献[1]中 343 页例 2).

附　　录

在正则性条件下，作出满足式(19)之 $v(t)$, $\mathbf{y}(t)$，其步骤如下：

(1) 设给定初始条件

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{x}(\theta) + \delta\mathbf{x}(\theta), \quad t_0 \leqslant \theta \leqslant T. \tag{1}$$

(2) 将区间 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 由以下的点

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k < \tau_{k+1} = T$$

划分为一些其长度为充分小的分区间 $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$, $i = 0, 1, \cdots, k$. 又，所选取的 τ_i 包含了 $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 的一切间断点.

(3) 设形式如 $v(t) = u(t) + \delta u(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ 的(19)式之解已经在 $\theta \leqslant t \leqslant \tau_i$ 上作出(若取 $i = 0$，就有 $\theta = \tau_0 = t_0$)，今将 $\mathbf{y}(t)$ 延拓到点 τ_{i+1}.

据正则性条件，向量

$$\frac{\partial R(\mathbf{x}(\tau_i), u(\tau_i + 0), \mu, \tau_i)}{\partial u}, \quad \frac{\partial q_1(u(\tau_i + 0))}{\partial u}, \cdots, \frac{\partial q_m(u(\tau_i + 0))}{\partial u}$$

线性无关，又因区间 $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ 的长度充分小，故向量

$$\frac{\partial R(\mathbf{x}(t), u(t), \mu(t), t)}{\partial u}, \quad \frac{\partial q_1(u(t))}{\partial u}, \cdots, \frac{\partial q_m(u(t))}{\partial u}$$

在半区间 $\tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}$ 上也是线性无关.

引入方程组

$$\sigma_k(v, t) = q_k(v) - q_k(u(t)) = 0, \quad (k = 1, \cdots, m) \tag{2}$$

并与

$$R(\mathbf{y}, v, \mu, t) = 0$$

合并，在上述正则性条件下，就有

$$\left.\frac{\partial(R, \sigma_1, \cdots, \sigma_m)}{\partial(v_1, \cdots, v_{m+1})}\right|_{\tau_i, v=u(\tau_i+0), x(\tau_i), \mu=0} = \frac{\partial(R, q_1, \cdots, q_m)}{\partial(u_1, \cdots, u_{m+1})} \neq 0,$$

从而在诸值 τ_i, $u(\tau_i + 0)$, $\mathbf{x}(\tau_i)$, $\mu = 0$ 的邻域，方程组 (2) 及 $R(\mathbf{y}, v, \mu, t) = 0$ 可单值地对 $m + 1$ 个变量 $v_1, \cdots, v_{m+1}$ 求解. 其余的 $v_{m+2}, \cdots, v_r$ 我们取 $v_{m+2} = u_{m+2}(t), \cdots, v_r = u_r$. 这样就得到

$$v = (v_1, \cdots, v_{m+1}, u_{m+2}, \cdots, u_r).$$

此处的 v 是容许控制，因此据(2)有

$$q_k(v) = q_k(u) \leqslant 0, \quad (k = 1, \cdots, m)$$

即

$$q_k(v) \leqslant 0. \quad (k = 1, \cdots, m).$$

将这样的 $v(t)$ 代入式(19)中，而在 $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ 上的初始值 $\mathbf{y}(\tau_i)$ 则据前一段加以确定，这样就可得到在 $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ 上方程 $\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}, v, t)$ 的解. 至此便完成了延拓.

用这种作法，可逐步延拓到 $i = k$.

参 考 文 献

[1] Понтрягин, Л. С. 等, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва, 1961.
[2] 张嗣瀛，轨线末端受限制时的最优控制问题，自动化学报，**1**(2)，1963.
[3] Розоноэр, Л. И., Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, *А и Т*, **20** (1959), № 10, 11, 12.

OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH RESTRICTED PHASE COORDINATES

CHANG SZU-YING

For the problem of optimal control with restricted phase coordinates R. V. Gamkrelidze et al.[1] obtained the necessary condition for optimality and the "jump conditions" at the jointed points of optimal trajectory. Since the mathematical tools used in their proof are not elementary, their method is somewhat difficult to understand by engineers.

In this paper, based on some analyses in [1], the problem is treated by using the method in [2, 3]. The chief results given in [1] are also obtained rather simply and, in addition, some new results, i.e., some sufficient conditions and the necessary and sufficient condition for optimality "in the small" for linear system, are obtained.