第3卷 第1期 自动化学报 Vol. 3, No. 1
1965年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1965

組合开关网絡的可靠性*

柳 維 長

摘 要

本文提出了一种在同时考虑到元件可靠性、开关网絡邏輯結构和輸入开关变数概率分布的情况下分析組合开关网絡可靠性的方法.

一、引 言

开关网絡的可靠性和一般的电子綫路不同,不但与元件的可靠性有关,且与网絡的邏輯結构和輸入开关变数的概率分布有关. 因此,不能用一般的可靠性理論来进行分析.

Maitra[1] 和 José Miró[2] 在組合开关网絡方面曾根据元件的可靠性和网絡的結构特性分析了网絡的可靠性. 然而,这些工作都沒有考虑到輸入开关变数的概率分布. 作者認为,忽略了这一点,往往会导致不正确的結果. 这可从以下簡单例子中看出. 图1是一个二极管"或"門. 假定二极管 d_1 和 d_2 都只可能产生断路失灵,失灵的概率分别为 p_1 和 p_2,且 $p_1 > p_2$. 在这种情况下,十分明显,当出現 y_2 的概率大于 y_1 时,綫路的可靠性要比在相反的情况下高得多. 在本文中,輸入变数的概率分布也和元件的可靠性及网絡的結构特性一样,是作为一个决定网絡可靠性的主要参数来考虑的.

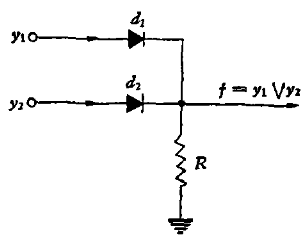

图1 二极管"或"门

二、网絡可靠性的計算

現在先来討論一下具有 n 个輸入端和一个輸出端的网絡. 以后将会看到,所得結果也可毫无困难地推广到多輸出端的网絡.

大家知道,具有 n 个輸入端和一个輸出端的二值組合开关网絡的特性,可用眞値表来表示. 如果对于某一組輸入变数,开关网絡輸出端的眞値与眞値表所規定的相符,則称为正常;否則,就称为誤动作. 开关网絡在一定时間內不发生誤动作的概率,称为可靠性.

这个定义与一般的定义不同. 一般所謂开关网絡的可靠性是指网絡的眞値表与原定的眞値表完全符合的概率. 为了說明这一点,現以图1的"或"門作为例子. 設出現輸入变数 y_1 和 y_2 的概率分别为 r_1 和 r_2. 这个"或"門的眞値表如表1a所示,表中左边的数表示出現某組輸入变数的概率. 假定这个"或"門只有一种可能失灵(失灵概率为 q),失灵后的眞値表如表1b所示,則根据上述一般的定义,这个"或"門的可靠性为 $1-q$,而根据新的定义,只有当 y_1 为0和 y_2 为1时网絡輸出才与原定的不符合,因此,它的可靠性应当是

* 本文于1964年2月11日收到.

$1-(1-r_1)\,r_2q$. 在极端情况下,如果 $r_1=1$ 或 $r_2=0$,则可靠性等于 1. 由此可见,新的可靠性定义是比較合理的.

表 1

(a)

	y_1	y_2	f
$(1-r_1)(1-r_2)$	0	0	0
$(1-r_1)r_2$	0	1	1
$r_1(1-r_2)$	1	0	1
r_1r_2	1	1	1

……

(b)

y_1	y_2	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

为了討論方便起見，現定义一个随机开关. 設某个开关 S 有 n 个輸入端和一个輸出端,輸入变数为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$,輸出的开关函数为 $f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $i=1, 2, \cdots, m$. 如果 m 为大于 1 的有限数,且輸出开关函数 $f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的概率 $p_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 都已知,则开关 S 称为随机开关. 大家知道, $f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 及相应的 p_i 都可以根据开关的邏輯結构和元件的失灵概率求得. 以后用矩陣:

$$\mathbf{F}=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \cdots\cdots f_m \\ p_1 & p_2 \cdots\cdots p_m \end{vmatrix} \tag{1}$$

来表征随机开关 S 的随机性. $\mathbf{F}$ 称为 S 的随机性矩陣. 如果在 S 某一时刻輸出端的开关函数为 f_i, 则称 S 处于第 i 种状态. 輸出端的函数称为随机开关函数.

由随机开关的定义可知,这个开关可大可小,大則是整个单輸出端的网絡,小则是一个单独的"或"門或"与"門. 下面将可看到,为了計算方便起見,以一个"或"門或"与"門作为一个随机开关将比較恰当.

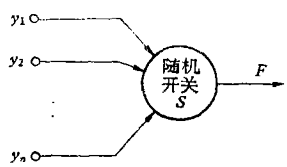

图 2 最简单的随机开关网络

現討論只包括一个随机开关的网絡(图 2). 我們用矢量

$$\mathbf{Y}_i=(y_1, y_2, \cdots, y_n), \quad y_j=0, 1 \tag{2}$$

来表示輸入变数的某一組合,脚注 i 是将 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 当作二进数时的数值. 如果出現輸入变数組合 $\mathbf{Y}_i$ 的概率 $r_i(i=1, 2, \cdots, 2^n-1)$都为已知,则这个网絡的可靠性可按以下步驟求得.

根据各种不同的輸入变数組合以及开关 S 可能完成的开关函数,作一 2^n-1 行和 m 列的矩陣:

$$\mathbf{E}=\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12}\cdots\cdots & e_{1m} \\ e_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ e_{2^n-1,1} & \cdots\cdots & e_{2^n-1,m} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

其中 e_{ij} (0 或 1) 表示当輸入組合为 $\mathbf{Y}_i$、随机开关 S 处于第 j 种状态时网絡輸出端的眞值. 因此,如果 $e_{ij}=e_{i1}$, 网絡为正确动作, 而当 $e_{ij}\neq e_{i1}$ 时, 则网絡为誤动作. 显然,产生一个 $e_{ij}\neq e_{i1}$ 誤动作的概率为 r_ip_j. 由于产生每个眞值 e_{ij} 的事件是互斥的, 因此将所有这样的概率相加,就是网絡产生誤动作的总概率.

为此，我們可定义一个矩陣 $\mathbf{G}$：

$$\mathbf{G}=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_{2^n-1,1} & \cdots & \cdots & g_{2^n-1,m} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

其中

$$g_{ij}=e_{i1}+e_{ij}(\bmod 2),$$
$$i=1,2,\cdots,2^n-1,\quad j=1,2,\cdots,m.$$

这个网絡的总的誤动作概率 Q 可表示为

$$Q=\sum_{i,j} g_{ij}r_ip_j. \tag{5}$$

根据上述可靠性的定义，网絡的可靠性为

$$R=1-Q=1-\sum_{i,j} g_{ij}r_ip_j. \tag{6}$$

由以上分析可知，当一个网絡的邏輯結构比較复杂时，将它当作一个随机开关来处理，在計算上是很复杂的．在这种情况下，最好将网絡分成两級或多級网絡，每級只包括由較簡单的网絡所組成的随机开关．

現在先来討論两級开关网絡的可靠性．任何单輸出端的两級网絡总可用图 3 的网絡来表示．n 个輸入变数先送入第一級随机网絡 N 中，后者包括 l 个随机开关，它們的輸出被送到第二級随机开关 S．

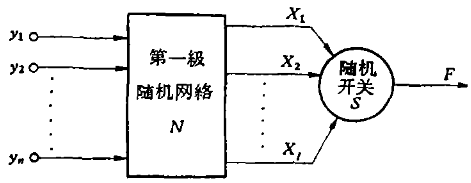

图 3　两级随机开关网络

設这个网絡所完成的开关函数为 $f_1(y_1, y_2, \cdots, y_n)$．此时，第一級网絡的各个輸出相应地为 $x_{i1}(i=1,2,\cdots,l)$．根据第一級网絡 N 的結构和所用元件的可靠性，可求得 N 中各开关的随机性矩陣为

$$\mathbf{X}_i=\begin{vmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \cdots\cdots & x_{im_i} \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots\cdots & p_{im_i} \end{vmatrix}.\quad (i=1,2,\cdots,l) \tag{7}$$

設 S 的随机性矩陣为：

$$\mathbf{S}=\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdots\cdots & s_h \\ p_{s_1} & p_{s_2} & \cdots\cdots & p_{s_h} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

这里 $s_1, s_2\cdots s_h$ 都是 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots\mathbf{X}_l$ 的函数．

現在的問題是如何根据式(7)、(8)中的矩陣以及輸入变数的概率分布 r_i 来求得网絡輸出端的随机开关函数 $\mathbf{F}$．

为了計算 $\mathbf{F}$ 中的各个概率，現引入

$$p_{f_k}[S_i(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\cdots,\mathbf{X}_l)]=\sum_j a_j(p_{1i})(p_{2i})\cdots(p_{li}), \tag{9}$$

式中 (p_{ji}) 表示 $\mathbf{X}_j$ 中下面一行 m_j 个 p 元素里的任一个元素，而 a_j 則由下式决定：

$$a_j = \begin{cases} 1, & 当\ S_i[(x_{1i}), (x_{2i}), \cdots (x_{li})] = f_k(y_1, y_2, \cdots, y_n), \\ 0, & 在其他情况下. \end{cases} \tag{10}$$

式(10)中的 (x_{ji}) 表示 $\mathbf{X}_j$ 中与 (p_{ji}) 相对应的 x 元素，式(9)中的 $\sum$ 号表示对所有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_l$ 个組合求和.

从式(9)和式(10)可知，$p_{f_k}[S_i]$ 是开关 S 处于 i 状态时輸出端的开关函数为 f_k 的概率. 故对所有 h 个可能的状态，輸出端的开关函数为 f_k 的概率是

$$p_k = \sum_{i=1}^{h} p_{s_i} p_{f_k}[S_i]. \tag{11}$$

根据所有的 $S_i[(x_{1i}), (x_{2i}), \cdots (x_{li})]$，可求得可能得到的 $f_k(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，而根据式(11)，則可求得出現 f_k 的概率 p_k. 故可得到輸出端的随机开关函数为

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \cdots f_m \\ p_1 & p_2 \cdots p_m \end{vmatrix}.$$

这样，两級网絡的輸出函数就归結为式(1)的矩陣形式. 根据式(3),(4),(5),(6),則可求得这个网絡的可靠性.

上述分析两級开关网絡可靠性的方法，也可推广到多級网絡，因为任一单輸出端的 k 級网絡都可分解为两部分：卽由第一級到第 $k-1$ 級所組成的网絡 M 和第 k 級的随机开关 S (見图 4).

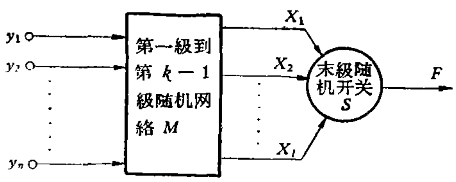

图 4 k 级随机开关网络

根据上述方法，可以逐級求得每个开关的輸出随机开关函数，进而求得 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots \mathbf{X}_l$. 这样，就归結为求两級网絡的可靠性問題.

对于具有 P 个輸出端的多端网絡，可按以下步驟計算可靠性：先任意地将各端加以編号，再用上述方法求得 1 端的可靠性 $R(1)$ 以及各条件可靠性 $R_1(2)$, $R_{1,2}(3)$, $\cdots R_{1,2\cdots p-1}(p)$，其中 $R_{1,2,\cdots i}(j)$ 表示在 1, 2, $\cdots i$ 端的工作都为正常条件下 j 端的可靠性. 将这些可靠性相乘，卽得整个网絡的可靠性. 在特殊情况下，当各端的开关函数沒有公用元件时，网絡的可靠性等于各端可靠性的乘积；而在另一种极端情况下，当 i 端的开关函数包括其他所有輸出端的开关函数所用到的元件时，网絡的可靠性卽等于 $R(i)$.

三、計算实例

設有一个三元組件的“或”門[1] (見图 5)，每个“或”門都由图 1 所示的二极管“或”門組成. 为簡单起見，假定图 1 中的电阻可靠性为 1，并設每个二极管的短路失灵和断路失灵的概率都相同，分別为 p_s, p_0, 故二极管的可靠性为 $p = 1 - p_0 - p_s$.

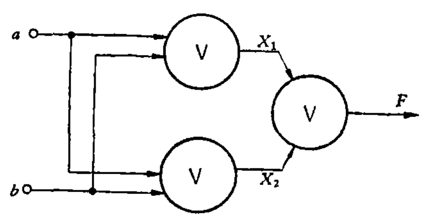

图 5 由三个“或”门组成的三元组件

現在，我們来計算这个网絡的可靠性.

由图 1 和“或”門的邏輯特性可知，在上述假定条件下，单个二极管“或”門的随机性矩陣为:

1) 这种元件主要用来提高可靠性.

$$\mathbf{F}_\vee = \begin{vmatrix} a\vee b & a\wedge b & a & b & 0 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} & p_{05} \end{vmatrix},$$

其中：

$$p_{01} = (1 - p_s - p_0)^2,\ p_{02} = p_s^2,\ p_{03} = (p_0 + p_s) - (p_0 + p_s)^2 + p_0 p_s,$$

$$p_{04} = p_{03},\ p_{05} = p_0^2.$$

故可得到

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{F}_\vee,$$

以及

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} \mathbf{X}_1\vee\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & 0 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} & p_{05} \end{vmatrix}.$$

根据式(9),(10)和(11),可求得输出端的随机开关函数为

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} a\vee b & a\wedge b & a & b & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{vmatrix},$$

其中：

$$\begin{aligned} p_1 = {} & p_{01}(p_{01} + 2p_{01}p_{03} + 2p_{03}^2 + 2p_{03} + p_{01}p_{02}) = 1 - 8p_0^2 - 7p_s - 12p_0p_s + 14p_0^3 + \\ & + 10p_s^3 + 34p_0^2p_s + 30p_0p_s^2 - 46p_0^2p_s^2 - 18p_0p_s^3 - 34p_0^3p_s - 3p_s^4 - 9p_0^4 + 24p_0^3p_s^2 + \\ & + 16p_0^2p_s^3 - 2p_s^5 + 2p_0^5 + 14p_0^4p_s - 2p_0p_s^4 + p_s^6 - 5p_0^4p_s^2 - 4p_0^3p_s^3 + 2p_0p_s^5 - \\ & - 2p_0^5p_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 = {} & p_{02}(p_{01}p_{02} + p_{01}p_{05} + 2p_{03} + 2p_{03}^2 + 4p_{02}p_{03} + p_{02}^2) = p_0^2 + p_s^2 + 6p_sp_0 - \\ & - 4p_0^3 + 2p_s^3 - 4p_0^2p_s + 2p_0p_s^2 + 6p_0^2p_s^2 - 10p_0p_s^3 + 12p_0^3p_s + 6p_0^4 - 5p_s^4 - \\ & - 12p_0^3p_s^2 + 2p_s^5 - 4p_0^5 - 12p_0^4p_s + 10p_0p_s^4 + p_s^6 + p_0^6 + 7p_0^4p_s^2 - 2p_0^2p_s^4 - 4p_0^3p_s^3 - \\ & - 2p_0p_s^5 + 4p_0^5p_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 = {} & p_{03}(p_{01}p_{03} + 2p_{01}p_{02} + 2p_{01}p_{05} + 2p_{03} + p_{02}p_{03}) = 3p_0^2 + 3p_s^2 + 6p_0p_s - 6p_0^3 - \\ & - 6p_s^3 - 16p_0^2p_s - 16p_0p_s^2 + 20p_0^2p_s^2 + 14p_0p_s^3 + 12p_0^3p_s + 2p_0^4 + 4p_s^4 + 2p_0^5 - \\ & - 4p_0p_s^4 - 8p_0^2p_s^3 - 6p_0^3p_s^2 - p_0^6 - p_s^6 + p_0^2p_s^4 - p_0^4p_s^2 - 2p_0^5p_s, \end{aligned}$$

$$p_4 = p_3,$$

$$\begin{aligned} p_5 = {} & 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = p_{05}(p_{01}p_{05} + 2p_{02} + 2p_{03} - p_{02}p_{05} + 1) = p_0^2 - p_0^4 + \\ & + 2p_0^3 + 2p_0^2p_s - 2p_0^3p_s - 2p_0^4p_s - 2p_0^5 + p_0^6 + 2p_0^5p_s. \end{aligned}$$

如果出现真值为 $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a}b$, $a\bar{b}$, ab 的概率分别为 r_0, r_1, r_2 和 r_3，则根据式 (3), (4), (5),(6),可求得这个三元组件的可靠性为：

$$R = 1 - [(r_1 + r_2)(p_2 + p_3) + (r_1 + r_2 + r_3)p_5]^{1)}.$$

在特殊情况下,当 $r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = 0.25$ 时,略去三次以上的各项,则得

$$R = 1 - 2.75p_0^2 - 2p_s^2 - 6p_0p_s + 2p_s^3 + 3.5p_0^3 + 8.5p_0^2p_s + 7p_0p_s^2.$$

参　考　文　献

[1] Maitra, K. K., Stability of Logical Networks and Its Application to Improvement of Reliability,

1) 将 p_{02}, p_{03}, p_{05} 代替此式中的 p_2, p_3, p_5，则得单个"或"门的可靠性. 与此式相比，可以发现利用三元组件后可靠性将得到提高.

Trans. IRE, **CT-8** (1961), No. 3, 335—341.
[2] José Miró, Reliability Analysis of Feedforward Logical Nets, Proc. 8th National Symposium on Reliability and Quality Control, 473—483.

RELIABILITY OF COMBINATIONAL SWITCHING NETWORKS

LIU WEI-CHANG

In this paper a method for analyzing the reliability of combinational switching networks is proposed. In the analysis, the reliability of the network elements, the logical configurations as well as the probability distributions of input variables are all considered.