第2卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 2, No. 4
1964 年 10 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　October, 1964

李雅普諾夫第二方法与最优控制器分析設計問題

黃 琳　鄭应平　張 迪

摘　　要

本文应用李雅普諾夫第二方法与貝尔曼的动态規划法，討論了最优控制器的分析設計問題，并提出了一种对理論分析与实际計算都比較方便的序列逼近法．在第一节中，給出了最优控制器分析設計問題的一般提法与作为必要条件的貝尔曼方程．在第二节中，給出了对进一步研究所需的有关李雅普諾夫第二方法的基本結果，以便使以后的論証更为簡捷．在第三节中，給出了在一般提法下分析設計問題的一般性結果，其中包括唯一性定理、貝尔曼方程的充分性、序列逼近法及其基本性質．在第四节中，研究了常系数綫性系統，解决了最优控制的存在唯一性問題，文中列举了数例，以說明序列逼近法具有較快的收斂速度，并論証了这种方法的收斂速度系按指数进行的．在第五节中，研究了拟常系数綫性系統，并分别对緩变系数綫性系統与定常拟綫性系統进行了討論，給出了例題以說明理論結果．最后在第六节中，討論了某些进一步推广的問題．本文所引入的方法，均直接針对綜合問題而給出，因而在理論研究与实际运用上，是方便可行的．

一、問題的一般提法与貝尔曼方程

从設計控制系統的角度出发，解决最优控制器的綜合問題具有重要意义．在綫性最速系統研究方面，宋健等曾作了詳尽的研究[3]．按积分指标的最优控制問題，錢学森亦早有闡述[1]，而这方面比較系統的工作則是由 Летов 开始的，他称此类問題为最优控制器的分析設計問題[13]．此后，这一問題又得到了进一步的发展[4,13—17,20,21,24]．

在近代控制系統动力学研究方面，用作研究稳定性問題的李雅普諾夫第二方法，有了很大的发展，它已被用来研究系統的过程品質和对系統进行設計[9,22,25,26]．在最优控制器的分析設計問題中，这一方法也同样有效．研究表明这一方法与貝尔曼动态規划法有着本質上的連系．本文基于这一方法提出了一种比較有效的序列逼近法．

設受控系統由向量微分方程

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

描述，其中 x 是 n 維欧氏空間 X 中的元素，u 系 r 維控制向量，其取値域为 U，f 是定义在 $X \times U$ 上分段光滑的連續函数．一般常称无控系統

$$\dot{x} = f(x, 0) = g(x) \tag{1.2}$$

为对应(1.1)的自由系統．当給定初値

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.3}$$

后，自由系統的运动即被完全确定，而对于(1.1)，則在初值(1.3)下系統的运动还将依賴于

控制 u 的給定. u 受有限制

$$u \in U. \tag{1.4}$$

設系統的理想工作状态由函数組

$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, \cdots, x_n), \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{1.5}$$

取特定值 φ_{i0}（不失一般性，可令 $\varphi_{i0} = 0$）来描述，亦即有

$$\varphi_i(x_1, \cdots, x_n) = 0. \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \tag{1.6}$$

显然，它在空間 X 中确定一个 $n-k$ 維流形，記其为 $\mathscr{F}_{n-k}$. 通常均設 $\mathscr{F}_{n-k}$ 是 (1.2) 的一个不变集合，即假定有

$$\Phi_i(x) = [\operatorname{grad} \varphi_i, g] \equiv 0, \ i = 1, \cdots, k, \ x \in \mathscr{F}_{n-k}, \tag{1.7}$$

其中 $\operatorname{grad} \varphi_i$ 表示 φ_i 的梯度向量，$[a, b]$ 表示 a, b 两向量的內积. 条件 (1.7) 表明系統处于理想工作状态下不加控制亦能具有保持能力. 这一条件为实际工作所允許，因此可作为一个基本前提.

以后常称点集

$$\mathscr{F}_{n-k}(H) = \left\{x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} \varphi_i^2(x) \leqslant H^2\right\} \tag{1.8}$$

为 $\mathscr{F}_{n-k}$ 按 φ 定义的 H 邻域. 在文献 [9] 中，研究了动力学系統对此类流形的稳定性問題. 对不变流形 $\mathscr{F}_{n-k}$ 所进行的稳定性及最优控制的研究，这是一种具有普遍意义的工作，它常以变系数系統的零解問題及部分变元問題为其特例.

为描述系統中偏离理想状态的扰动过程的品質，我們以积分指标

$$J(x, u) = \int_0^\infty w(\varphi, u)\, dt \tag{1.9}$$

来描述其优劣，其中 w 系 φ_i 与 u 的正定函数，而 φ_i 与 u 均在以初值 x 下的解代入.

以下称控制 $u = u(x)$ 是可准的，系指

1. u 是取值 U 且为 x, t 的分段光滑函数；

2. 对应此 $u(x, t)$，系統

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \tag{1.10}$$

在初值 $x_0 \in \mathscr{F}_{n-k}(H)$ 时对 (1.6) 漸近稳定[9]，并使指标 (1.9) 取有限值.

最优控制器分析設計的任务是确定可准控制 $u_0(x)$，使泛函指标 (1.9) 对一切 x 取最小值，即有

$$J(x, u_0(x)) = \operatorname*{Inf}_{u(x)} [J(x, u(x))]. \tag{1.11}$$

若再記 $I(x) = J(x, u_0(x))$，則称 $I(x)$ 与 $u_0(x)$ 为对应問題的最优指标与最优控制，有时亦称 $I(x)$ 为最优李雅普諾夫函数.

若設 $I(x)$ 連續且分段光滑，則应用貝尔曼最优原理可以証明 $I(x)$ 与 $u_0(x)$ 必滿足下述貝尔曼方程：

$$\begin{aligned}[\operatorname{grad} I(x), f(x, u_0(x))] + w(\varphi, u_0(x)) = \\ = \min_{u \in U} \{[\operatorname{grad} I(x), f(\dot{x}, u)] + w(\varphi, u)\} = 0.\end{aligned} \tag{1.12}$$

若系統对控制作用綫性，即

$$\dot{x} = g_1(x) + u g_2(x), \tag{1.13}$$

而对应函数 w 是 φ 与 u 的正定二次型

$$w = w^{(2)}(\varphi) + uw^{(1)}(\varphi) + u^2 \tag{1.14}$$

(其中 $w^{(2)}$ 是 φ 的正定二次型，$w^{(1)}$ 是 φ 的綫性函数)，則方程(1.12)可改写为下述联立方程:

$$\left.\begin{aligned} &[\operatorname{grad} I(x),\ g_1(x)] + w^{(2)}(\varphi) + u_0[w^{(1)}(\varphi) + (\operatorname{grad} I(x),\ g_2(x))] + u_0^2 = 0, \\ &u_0(x) = -\frac{1}{2}\{[\operatorname{grad} I(x), g_2(x)] + w^{(1)}(\varphi)\}. \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

又若 $\mathscr{F}_{n-k}$ 退化成坐标原点，且 w 是 x 及 u 的正定二次型，則有

$$\left.\begin{aligned} &[\operatorname{grad} I(x),\ g_1(x)] + u_0(x)[w^{(1)}(x) + (\operatorname{grad} I(x),\ g_2(x))] + u_0^2(x) + w^{(2)}(x) = 0, \\ &u_0(x) = -\frac{1}{2}[(\operatorname{grad} I(x),\ g_2(x)) + w^{(1)}(x)]. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

显然，方程(1.16)是 Летов 的研究問題在非綫性系統时的情形.

二、李雅普諾夫第二方法的若干基本結果

現研究动力学系統

$$\dot{x} = X(x), \tag{2.1}$$

它满足对解的存在唯一性条件，其理想工作状态是不变流形

$$\mathscr{F}_{n-k}:\ \varphi_i(x) = 0. \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k) \tag{2.2}$$

以后称可微函数

$$v = v(x_1,\ \cdots,\ x_n) \tag{2.3}$$

为对于(2.2)的李雅普諾夫函数，系指有当 $x \in \mathscr{F}_{n-k}$ 时总有 $v(x) = 0$. 在文献 [9] 中曾应用李雅普諾夫第二方法討論了上述提法下的穩定性問題. 这里闡述一些为今后应用所必須的結果.

在以后的討論中，設系統不会发生在有限时間內能跑向无穷远点的逃逸运动.

定理 2.1 若系統(2.1)对于(2.2)漸近穩定，則有:

1. 若有对 (2.2) 的李雅普諾夫函数 v，它对系統的全导数

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{2.1} = [\operatorname{grad} v,\ X(x)] \tag{2.4}$$

在 $\mathscr{F}_{n-k}$ 的吸引区(或邻区)內負常号，則 v 在此吸引区 (或邻域) 內非負;

2. 若存在对于(2.2)的李雅普諾夫函数 v，使(2.4)在 $\mathscr{F}_{n-k}$ 的吸引区 (或邻域) 內負定，則 v 在 $\mathscr{F}_{n-k}$ 的吸引区(或邻域)內对于(2.2)正定.

又不論系統是否对于 (2.2) 穩定，若对于(2.2)的李雅普諾夫函数 v 的全导数(2.5)在 $\mathscr{F}_{n-k}$ 吸引区內負定，則只要 v 非負，它必对于(2.2)正定. 由此可得系統对于(2.2)漸近穩定.

以上定理是不难得到証明的，故从略.

定理 2.2 对拟綫性系統

$$\dot{x} = Ax + X^{(2)}(x), \tag{2.5}$$

設坐标原点为其平衡位置，$X^{(2)}(x)$ 是 x 的不低于二次的函数，矩陣 A 的特征値均具有負

实部．这时，对任意給定的正定二次型

$$w(x) = x'wx, \tag{2.6}$$

均存在正定的李雅普諾夫函数 $v(x)$，使得

1. $v(x)$ 对系統(2.5)的全导数为

$$[\text{grad}\, v(x),\ Ax + X^{(2)}(x)] = -w(x); \tag{2.7}$$

2. $v(x)$ 在(2.5)的零解吸引区 $\mathring{G}$ 內均有定义、正定，且在 $\mathring{G}$ 內 (2.7) 均成立；$v(x)$ 还在 $\mathring{G}$ 的边界 r 上具有无穷大下界，即

$$\lim_{x\to r} v(x) = +\infty,\quad r = \partial\mathring{G}. \tag{2.8}$$

由此可知，利用此 v 可以判定在整个吸引区 $\mathring{G}$ 內的任何运动是漸近稳定的；

3. 当 $X^{(2)} = 0$ 时，上述 $v(x)$ 是正定二次型；

4. 当 $w = w^{(2)} + w^{(3)}$ 正定(其中 $w^{(2)}$为正定二次型，$w^{(3)}$是 x 的不低于三次的函数)，上述結論 1 与 2 仍成立；

5. 若 $X^{(2)}$ 任意次可微，則 $v(x)$ 任意次可微．

本定理的証明見附录 I 中．

定理 2.3　考虑微分方程組序列

$$\dot{x} = A_n x + X_n^{(2)}(x), \tag{2.9}$$

其中：1. A_n 收斂至 A，A_n 与 A 均漸近稳定，

2. 系統序列(2.9)具有共同的吸引区 $\mathring{G}$，

3. 对任何閉集 $\Omega \leqslant \mathring{G}$，$X_n^{(2)}(x)$ 一致收斂至 $X^{(2)}(x)$，則在同一初值下，(2.9) 的解 $x^{(n)}(t)$ 在閉区間 $t\in[0,+\infty]$ 上一致收斂至解 $x(t)$．这里，$x(t)$ 是极限系統 $\dot{x} = Ax + X^{(2)}(x)$ 的解．

我們只要指出由于极限系統 $\dot{x} = Ax + X^{(2)}(x)$ 是粗系統，則上述結論显然成立．

三、一般性結論

現研究受控系統

$$\dot{x} = X_1(x) + uX_2(x), \tag{3.1}$$

其对应的自由系統是

$$\dot{x} = X_1(x), \tag{3.2}$$

而它的不变流形是

$$\mathscr{F}_{n-k}\colon \sum_{i=1}^{k} \varphi_i^2(x_1,\cdots,x_n) = 0. \tag{3.3}$$

定理 3.1　对系統(3.1)，若存在分段光滑函数 $v_0(x)$ 和 $u_0(x)$，使得

1. $\dot{x} = X_1(x) + u_0(x)X_2(x)$ 对于 (3.3) 漸近稳定，

2. $u_0(x)$ 与 $v_0(x)$ 滿足貝尔曼方程，即

$$[\text{grad}\, v_0(x),\ X_1 + u_0X_2] + w(\varphi, u_0) = \min_{u\in U}\{[\text{grad}\, v_0,\ X_1 + uX_2] + w(\varphi, u)\} = 0, \tag{3.4}$$

則系統(3.1)对于指标

$$J(x, u) = \int_0^\infty w(\varphi, u)\, dt \tag{3.5}$$

的最优李雅普諾夫函数与最优控制卽是 $v_0(x)$ 与 $u_0(x)$.

定理 3.1 表明在系統(3.1)的情况下,貝尔曼方程是最优化問題的充分必要条件.

定理 3.2 对系統 (3.1), 若存在两組控制 $u_1(x)$ 与 $u_2(x)$ 和两个指标函数 $v_1(x)$ 与 $v_2(x)$, 使有

1. 系統 $\dot{x} = X_1(x) + u_i(x)X_2(x), \ i = 1, 2, \cdots$ (3.6)

对于(3.3)漸近稳定,

2. $u_1(x)$, $v_1(x)$ 与 $u_2(x)$, $v_2(x)$ 均滿足貝尔曼方程 (3.4), 又 w 是 φ 与 u 的正定函数,則

$$u_1(x) = u_2(x), \ v_1(x) = v_2(x). \tag{3.7}$$

定理 3.3 設对系統(3.1)存在有可准控制 $u_1(x)$, 其对应的对于(3.3)的吸引区为 G_1, 又若

1. 存在 $v_1(x) \in C_1$, 对于(3.3)正定,并有

$$\dot{v}_1|_{u_1} = [\mathrm{grad}\, v_1, X_1 + u_1X_2] = -w(\varphi, u_1), \tag{3.8}$$

2. 滿足条件

$$[\mathrm{grad}\, v_1, X_1 + uX_2] + w(\varphi, u) = \min \tag{3.9}$$

的 $u = u_2(x)$ 存在,且是 x 的分段光滑函数,則有

1. 系統 $\dot{x} = X_1(x) + u_2(x)X_2(x)$ (3.10)

对于(3.3)漸近稳定,且吸引区不小于 G_1;

2. 对系統(3.10)来說,积分

$$v_2(x) = \int_0^\infty w(\varphi, u_2)\, dt \leqslant v_1(x) \tag{3.11}$$

存在并連續于 G_1 内;

3. 又若 $v_2(x) \in C_1$, 且滿足

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{u_2} = w(\varphi, u_2), \tag{3.12}$$

則可継續由上述方法建立 $u_3(x)$ 与 $v_3(x)$. 如果这样的作法可以延續下去, 則可得两个序列 $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$, 其中 $v_n(x)$ 单調下降收斂至 $v_0(x)$. 又若 $v_0(x)$ 可微, 且 $u_n(x)$ 收斂至 $u_0(x)$, 則 $v_0(x)$ 与 $u_0(x)$ 是对应貝尔曼方程的解.

以上三个定理的証明,均見附录 II.

定理 3.3 建立序列 $\{v_n(x)\}$, $\{u_n(x)\}$ 的办法,常称为序列逼近法.

四、常系数綫性受控系統

設受控对象的扰动运动方程为

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{4.1}$$

其中 A 为常数矩陣, x, b 为 n 維向量, u 为可取任何实数值的标量. 系統的理想状态是 $x = 0$.

設描述系統品質的指标是

$$J = \int_0^\infty w(x, u)\, dt, \tag{4.2}$$

其中 w 是 x, u 的正定常系数二次型，它可写成

$$w(x, u) = w^{(2)}(x) + uw^{(1)}(x) + u^2, \tag{4.3}$$

其中 $w^{(i)}$ 表示 x 的 i 次型式.

先研究系統(4.1)按指标(4.2)的可控性問題.

显然，对給定的 A 与 b，总存在 $k \leqslant n$ 使向量組 $b, Ab, A^2b, \cdots, A^{k-1}b$ 綫性无关，而

$$A^kb = \mu_1 b + \cdots + \mu_k A^{k-1}b. \tag{4.4}$$

現令 $e_1 = b, \cdots, e_k = A^{k-1}b$，并在其上再迭加 $n-k$ 个向量 $e_{k+1}, \cdots, e_n$ 使构成一組基. 作綫性变換

$$x = Cy, \quad C = [e_1, e_2, \cdots, e_n] \tag{4.5}$$

則可将系統(4.1)化成如下标准型

$$\dot{y} = By + du, \quad B = C^{-1}AC, \quad d = C^{-1}b, \tag{4.6}$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} B_{11}, & B_{12} \\ 0, & B_{22} \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 0, & \cdots, & 0, & \mu_1 \\ 1, & \cdots, & 0, & \mu_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0, & \cdots, & 1, & \mu_k \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

显然，B_{22} 的特征值与矩陣 C 的构成无关，完全由 A 的特征值确定.

定理 4.1　对于系統(4.6)，可以选择綫性控制

$$u = [p, y], \tag{4.8}$$

使系統(4.6)满足可控性要求的充要条件是 B_{22} 特征值的实部为負，并且适当选择系数向量 p，可使合成系統(4.6)中对应 B_{11} 的部分具有任何事前給定的特征值.

本定理的証明見附录 III. 本定理表明文献 [15] 中可控性条件实际上是綫性可控的充要条件，并且合成系統对应 B_{11} 的那一部分可按事前要求給定.

定理 4.2　若常系数綫性系統(4.1)满足定理 4.1 的要求，則对指标(4.2)說来，最优控制存在唯一是 x 的綫性函数，最优指标是 x 的正定二次型，它們都可以通过序列逼近法求得，并且序列逼近法按指数收斂. 序列逼近法运算归結为代数运算.

定理 4.2 的証明亦見附录 III.

若指标(4.3)为以下包含 $\dot{u}$ 的指标

$$J(x, u, \dot{u}) = \int_0^\infty w(x, u, \dot{u})\, dt, \tag{4.9}$$

(其中 w 为 $x, u, \dot{u}$ 的正定二次型所代替) 則在引入新坐标 $x_{n+1} = u, \dot{u} = v$ 后，問題就全部归結为前述两定理討論的命題. 一般利用(4.2)建立最优控制将是理想控制器 $u = (p, x)$，实現起来在物理上有一定困难，而利用指标(4.9)，則得到非理想控制器 $\dot{u} = [q, x] + ru$ 的型式，这在物理上由于考虑到慣性而易于实現. 但从理論方法的研究角度看，这两种方法实为一种，故以后只討論前者.

若控制 u 是 r 維向量，則指标 (4.2) 中 w 应理解为 $n + r$ 維正定二次型，并且系統可控的充要条件是对应于 A 的非負实部特征值根的子空間包含在由所有下列形式的向量 A^jb_k $(j = 0, 1, \cdots, n-1, k = 1, \cdots, r)$ 所組成的子空間中. 同时，若系統可控，則

按綫性控制的 $u=[p,x]$ 一定可控，其中 p 为 $n\times r$ 常数矩陣．当系統綫性可控时，最优控制存在唯一且是 x 的綫性函数，而最优指标仍为 x 的正定二次型，它們都可以通过序列逼近法近似求出．

在附录 IV 中列举了几个数值例，以表示方法的进程与方便性．

五、拟常系数綫性系統

現研究变系数綫性系統

$$\dot{x}=Ax+B(t)x+bu,\quad (t\geqslant 0) \tag{5.1}$$

其中 A 为常数矩陣，$B(t)$ 是連續函数矩陣，且有 $\lim\limits_{t\to\infty}B(t)=0$，$b$ 为列向量．描述系統品質的指标是

$$I(u)=\int_{t_0}^{\infty}w(x,u,t)\,dt=\int_0^{\infty}\sum_{i=1}^{n}[a_i(t)x_i^2+u^2]\,dt, \tag{5.2}$$

其中 $a_i(t)\to a_i>0$（当 $t\to\infty$）．显然，w 是 u 及 x_i 的变系数正定二次型．

定理 5.1　若矩陣 A 与向量 b 满足第四节定理 4.1 的要求（可控性假定），則系統（5.1）对指标（5.2）而言是綫性可控的，并且最优控制存在唯一且是 x 的变系数綫性函数，而最优指标則是 x 的变系数正定二次型．它們在 $t\to\infty$ 时的极限是对应系統

$$\dot{x}=Ax+bu \tag{5.3}$$

在指标 $J=\int_0^{\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^2+u^2\right)dt$ 下的解．又最优控制与最优指标均可用序列逼近法求得．

本定理証明見附录 V．若向量 b 以变系数向量 $b(t)$ 代替（其中 $b(t)\to b$），則前述結論仍正确．

現研究拟綫性定常系統

$$\dot{x}=Ax+X^{(2)}(x)+bu+X^{(1)}(x)u, \tag{5.4}$$

其中 $X^{(i)}$ 为不低于 i 次的函数．若系統的品質指标是

$$I(u)=\int_0^{+\infty}w(x,u)\,dt=\int_0^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2+u^2\right)dt,\ \ a_i>0 \tag{5.5}$$

則我們有下述結論．

定理 5.2　对系統（5.4），若 A，b 满足前述可控性假定，則系統是按綫性可控的，并且可以通过序列逼近法逐步改进系統的品質．每一个改进了的系統均具有相同吸引区，且指标函数序列收斂．又若利用序列逼近法所得到的两个序列 $\{v_n(x)\}$，$\{u_n(x)\}$ 有 $v_n(x)\to v_0$，$u_n\to u_0$（v_0 逐段可微），則 $v_0(x)$ 与 $u_0(x)$ 是对应最优化問題的解．

应用定理[2.2]与定理[3.3]，便不难証明此定理的正确性．

在附录 IV 中列举了对应定理 5.1 与 5.2 的例証．例 2 表明改进系統的吸引区依賴于控制序列的初始給定．

六、結　　論

李雅普諾夫第二方法問世以来，至今有了很大的发展，已被用来研究动力学系統的稳定性与过渡过程．从物理上可将李雅普諾夫函数比拟为某个矢量場的波前，而不变流形

則相当于一个汇. 李雅普諾夫第二方法正是一种从整体上对系統进行討論的方法. 最优控制理論中的动态規划方法在本文討論的問題前提下，也是从整体上抓住一个量的最优李雅普諾夫函数进行討論的，因此，它特别适合于解决綜合問題. 这点表明在李雅普諾夫第二方法与动态規划法中有着本质的联系.

本文所应用的方法，可以推广如下:

1. 控制作用 u 受有限制 $|u|\leqslant 1$ 时，这时綜合过程可这样进行:

1) 先不顾限制 $|u|\leqslant 1$，用前述方法建立最优控制 $u_0(x)$ 与最优李雅普諾夫函数 $v_0(x)$;

2) 考察超曲面 $\Gamma_{\pm}$, $u_0(x)=\pm 1$，設 Ω 为由 $\Gamma_{\pm}$ 分出的包含原点的区域（如图 1），S 为 Ω 中滿足下列条件的点的集合:

(1) 若 $x^0\in S$，則对任何 $t>0$，$x(x^0, t)\in S$,

(2) 当 $t\to\infty$，对任何 $x^0\in S$，均有 $x(x^0, t)\to 0$. 記 S 的边界为 Γ，研究下列方程的 Cauchy 問題:

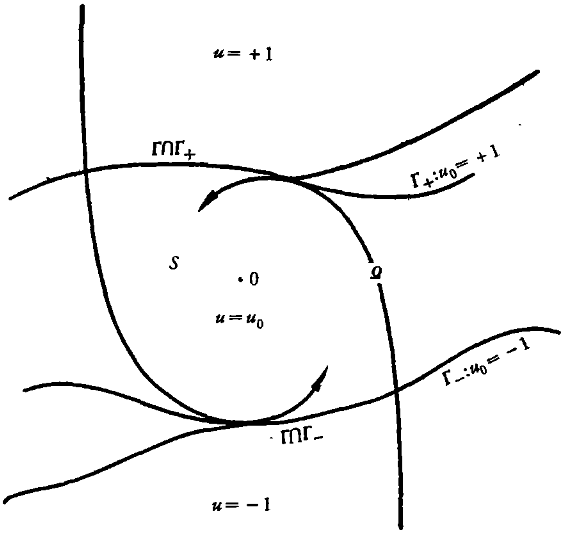

图 1.

$$[\operatorname{grad} v(x),\ Ax\pm b+X^{(2)}\pm X^{(1)}]+w(x,\ \pm 1)=0,$$

其中 ± 1 号分别相应于 $u=\pm 1$ 的情形，Cauchy 問題的边値是

$$v(x)=v_0(x),\ \text{当}\ x\in\Gamma\cap\Gamma_{\pm},$$

其中 v_0 是 1) 中求得的解.

从理論上講，上述 Cauchy 問題可以求解，由此总可以沿 $\Gamma\cap\Gamma_{\pm}$ 向外按 $u=\pm 1$ 延拓而得到区域的貝尔曼方程的解. 这种延拓可以継續下去，但計算将比較复杂困难.

本文討論的主要部分是对控制 u 不加限制 $|u|\leqslant 1$ 的問題，但实际上由于泛函指标中已經包含 u 因而可以达到一定的抑制 u 的变化的作用，而从前述 1 的討論可見，对 u 不加限制的研究，应作为 u 受限制問題的基础.

2. 对于第二节所討論的最一般提法下最优調节器的分析設計問題，只要引入系統关于不变流型按指数漸近稳定的概念并建立类似的引理，則第五节中的定理[5.2]可推广到一般情况.

3. 对于不能用普通微分方程描述的动力学系統，序列逼近法亦适用. 例如，对具有随机变化的参数的系統，其方程为依賴于 η 的綫性方程

$$\dot{x}=A(\eta)x+b(\eta)u,$$

其中 $\eta(t)$ 为取有限个状态的齐时純不連續的馬尔可夫过程. 对下列过渡过程指标

$$I(u)=M\left\{\int_0^\infty\left(\sum_{i=1}^n x_i^2+u^2\right)dt\,\Big|_{x_i^0,\eta^0}\right\}$$

提出的分析設計問題(参看文献[21]),可以証明在满足[21]中的可控条件时,恆可选择綫性控制

$$u_1(x)=[p(\eta),x],$$

使系統按指数均方漸近稳定,从而可以通过解代数方程将迭代过程进行下去.

迭代过程的收斂性与最优控制的存在性,其証明与前面完全相似.

4. 对由差分方程描述的系統,上述方法亦适用. 在这一方面将有专文論述.

用序列逼近法解决另一类最优控制器的分析設計問題,在文献[27]中已有了論述.

附 录

I. 定理 2.2 的証明

不失一般性,可令 $t_0=0$. 显然 3 是經典結果,故証明从略. 現令 $v=\int_0^\infty e^{A't}we^{At}\,dt$, 则有

$$v^{(2)}(x)=x'vx,\quad [\operatorname{grad} v^{(2)}(x),Ax]=-w(x). \tag{I-1}$$

实际上,由于 $X^{(2)}$ 不低于二次,则有 $\varepsilon>0$ 使

$$[\operatorname{grad} v^{(2)}(x),X^{(2)}]<\frac{1}{2}w(x),\ 当\ x\in\{x|v^{(2)}\leqslant\varepsilon\}. \tag{I-2}$$

由此不难証明对系統(2.5)应有

$$\left.\frac{dv^{(2)}}{dt}\right|_{2.5}\leqslant-\frac{1}{2}w(x),\ 当\ x\in\{x|v^{(2)}(x)\leqslant\varepsilon\}. \tag{I-3}$$

若記 M 为 $v^{(2)}$ 的最大特征值,而 m 为 w 的最小特征值,并令 $\alpha=m/2M$, 則对从区域 $\{x|v^{(2)}\leqslant\varepsilon\}$ 中出发的运动总有

$$v^{(2)}(x(t))\leqslant\varepsilon e^{-\alpha t}. \tag{I-4}$$

考虑到任何有界閉集 $\Omega\subseteq\mathring{G}$, 故对初值在 Ω 上的一切运动衰减至区域 $\{x|v^{(2)}\leqslant\varepsilon\}$ 的时間一致有上界 $T(\Omega)$. 考察函数

$$\psi(t)=\max_{x_0\in\{x|v^{(2)}=\varepsilon\}}[v(x(x_0,-t))],\quad 0\leqslant t\leqslant T(\Omega) \tag{I-5}$$

显然,它是有界的. 研究函数

$$\Phi(A,t)=Ae^{\alpha t}-\psi(t), \tag{I-6}$$

不难証明恆有 $A>0$ 存在,使 $\Phi(A,t)$ 当 $t\in[0,T(\Omega)]$ 时非負,由此可知用这样的 A 就可使一切初值在 Ω 上的运动满足

$$v^{(2)}(x(t))\leqslant Ae^{-\alpha t}, \tag{I-7}$$

其中 A 与 $T(\Omega)$ 有关,因此它依賴于 Ω.

再考虑任一点 $x\in\mathring{G}$, 記由 x 出发的解是 $x=\xi(x,t)$, 引入用下一积分定义的函数

$$v(x)=\int_0^\infty[\xi(x,t)]'w[\xi(x,t)]\,dt, \tag{I-8}$$

显然,由于 (I-7), 它对任何 $x\in\mathring{G}$ 有定义、連續且有

$$\left.\begin{array}{l}1.\ v(0)=0,\\ 2.\ v(x)>0,\ 当\ x\in\mathring{G},\ x\neq 0.\end{array}\right\} \tag{I-9}$$

由于 $\mathring{G}$ 是开集,则按微分方程对解的唯一性,我們不难証明

$$\lim_{x\to r}v(x)=+\infty.$$

又由于 $\xi(x,t)$ 满足积分方程

$$\xi(x,t)=e^{At}\left[x+\int_0^t X^{(2)}[\xi(x,t)]e^{-A\tau}\,d\tau\right], \tag{I-10}$$

考慮到 $|X_i^{(2)}|$、$\left|\dfrac{\partial X^{(2)}}{\partial x_j}\right|$ 在 $\{x|v\leqslant \varepsilon\}$ 一致有界，并令 M 为其上界，将 (I-10) 对 x_j 求导数，則有

$$\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right|\leqslant \|e^{At}\|\left[\delta_{ij}+\int_0^t M\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right|e^{-A\tau}\,d\tau\right]. \tag{I-11}$$

由此，我們应用貝尔曼不等式就能証明

$$\eta_j(x,t)=\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right|\leqslant \|e^{At}\|\left[1+\int_0^t nM\eta(x,\epsilon)\,e^{-A\tau}\,d\tau\right]\leqslant A_2e^{-\beta t}, \tag{I-12}$$

其中 A_2 是与 x 邻近的一个閉区域有关的正数，$\beta>0$．由此我們可知 $\dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$ 按指数趋近于零．据此，按 (I-8) 定义的 $v(x)$ 可将求偏导数的过程挪过积分号，并且有

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{2.5}=[\operatorname{grad} v,\,X^{(2)}+Ax]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{t+\Delta t}^t w[\xi(x,t)]\,d\tau=-w(x). \tag{I-13}$$

至此，定理的 1、2、3 全部得到証明．

应用前述方法，亦可証明 4 与 5 成立．

II. 定理 3.1 的証明

由于系統

$$\dot{x}=X_1(x)+uX_2(x) \tag{II-1}$$

对于(3.3)漸近稳定，且 v_0 与 u_0 滿足方程 (3.4)，故 u_0 是可准控制，亦即

$$\int_0^\infty w(\varphi,u_0)\,dt=v_0(x)-v_0(x^*)=v_0(x)<\infty, \tag{II-2}$$

其中 $x^*=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)\in\mathscr{F}_{n-k}$.

設 $u_0(x)$ 不是最优的，則存在 $u_1(x)$ 使当 $x\in\mathscr{F}_{n-k}(H)$ 时有

$$\int_0^\infty w(\varphi,u_1)\,dt<\int_0^\infty w(\varphi,u_0)\,dt, \tag{II-3}$$

其中不等式左端是以系統

$$\dot{x}=X_1(x)+u_1X_2(x) \tag{II-4}$$

的解代入的．由于 (II-4) 对 (3.3) 漸近稳定，并考慮到方程 (3.4)，則有

$$\left.\frac{dv_0}{dt}\right|_{u_1}+w(\varphi,u_1)\geqslant\left.\frac{dv_0}{dt}\right|_{u_0}+w(\varphi,u_0)=0. \tag{II-5}$$

由此可得

$$\left.\frac{dv_0}{dt}\right|_{u_1}\leqslant -w(\varphi,u_1). \tag{II-6}$$

将此式两边按系統 u_1 积分之，則有

$$v_0(x)\leqslant\int_0^\infty w(\varphi,u_1)\,dt.$$

这与归謬法的假定相矛盾，故定理得到証明．

定理 3.2 的証明

由于 u_1、u_2、v_1、v_2 均滿足貝尔曼方程且使对应的系統漸近稳定，故按定理 3.1，

$$v_1(x)=v_2(x). \tag{II-7}$$

由于考慮到系統对于 u 綫性，又 w 是 φ, u 的正定二次型，故有 $u_1=u_2$.

定理 3.3 的証明

首先按(3.8)，我們有

$$v_1(x)=\int_0^{+\infty}w[\varphi(\xi(x,t)),\,u_1(\xi(x,t))]\,dt, \tag{II-8}$$

其中 $\xi(x, t)$ 是系統

$$\dot{x} = X_1(x) + u_1(x)X_2(x) \tag{II-9}$$

当 $t = 0$ 时由点 $x \in \mathring{G}$ 出发的解. 显然，$v_1(x)$ 在 $\mathring{G}_1$ 上有定义，并在其边界上具有无穷大下界且满足(3.8). 再由(3.8)，我們有

$$0 = \frac{dv_1}{dt}\Big|_{u_1} + w(\varphi, u_1) \geqslant \frac{dv_1}{dt}\Big|_{u_2} + w(\varphi, u_2). \tag{II-10}$$

由此可得

$$\frac{dv_1}{dt}\Big|_{u_2} \leqslant -w(\varphi, u_2).$$

故系統(3.10)对于(3.3)漸近稳定，且吸引区不小于 $\mathring{G}_1$.

以(3.10)的解代入(II-10)，并对 t 积分，則

$$v_2(x) = \int_0^\infty w(\varphi, u_2)\, dt \leqslant v_1(x) \tag{II-11}$$

是收斂的，且此收斂对任一有界閉集中的 x 是一致的，故 $v_2(x)$ 連續.

显然，若上述过程可延續下去，則对应的序列 $v_1(x), \cdots, v_n(x) \cdots$ 是单調下降的正序列. 由此，极限函数一定存在，并記为 $v_0(x)$. 若可微，則当 $u_n(x)$ 收斂至 $u_0(x)$ 时，v_0 与 u_0 便是貝尔曼方程的解.

遺留的問題是 $v_0(x)$ 的可微性与 $u_n(x)$ 的收斂性以及这种过程是否一定可以持續下去，但这在第四节与第五节所討論的問題中，已得到回答.

III. 定理 4.1 的証明

关鍵問題在于証明对于 k 維系統

$$\dot{y}' = B_{11}y' + d'u \tag{III-1}$$

(其中 B_{11} 如(4.7)所示，$d' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 k 維列向量) 可以有綫性函数 $u = \sum_{i=1}^{k} p_i y_i$ 以使对应的綫性系統具有事前所要求的特征值. 事实上，以 $u = [p, y']$ 代入后，系統的特征方程应为

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda, & p_2, & \cdots\cdots & p_{K-1} & p_K + \mu_1 \\ 1, & -\lambda, & \cdots\cdots & 0, & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ 0, & \cdots & \cdots\cdots & -\lambda & \mu_{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & 1, & \mu_k - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^k [\lambda^k + \lambda^{k-1}(-p_1 - \mu_k) + \lambda^{k-2}(-p_2 + p_1\mu_k - \mu_{k-1}) + $$

$$+ \cdots + (-p_k + p_{k-1}\mu_k + \cdots + p_1\mu_2 - \mu_1)] =$$

$$= (-1)^k [\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\lambda + \lambda_k]. \tag{III-2}$$

由此显然可知，对任何事前給定的 a_i 总可通过 p_i 的选择来达到，这是因为 p_i 所满足的方程是代数方程，其系数矩陣是非退化的三角矩陣. 至此，定理得到証明.

定理 4.2 的証明

由定理 4.1 及此定理的假定，可知对系統(4.1)，存在 x 的綫性函数 $u_1(x)$，使(4.1)漸近稳定. 再按定理 2.2 之 3，則有正定二次型 $v_1(x)$ 存在，使

$$[\mathrm{grad}\, v_1, Ax + bu_1(x)] = -w(x, u_1(x)), \tag{III-3}$$

而条件

$$[\mathrm{grad}\, v_1, Ax + bu] + w(x,u) = \min \tag{III-4}$$

可唯一地确定綫性函数

$$u_2(x) = -\frac{1}{2}[\operatorname{grad} v_1, b]. \tag{III-5}$$

按第三节的一般性結果，可知对应 u_2 的綫性系統 $\dot{x} = Ax + bu_2(x)$ 是漸近稳定的，从而可以有正定二次型 $v_2(x)$，使 $[\operatorname{grad} v_2, Ax + bu_2] = -w(x, u_2(x))$。上述过程可以継續下去，由此就有两个序列

$$\begin{gathered} v_1(x), v_2(x), \cdots, v_n(x), \cdots, \\ u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots. \end{gathered} \tag{III-6}$$

显然，此二序列收斂，其极限函数为 $v_0(x)$ 与 $u_0(x)$。$v_0(x)$ 与 $u_0(x)$ 滿足貝尔曼方程，$v_0(x)$ 是单調下降二次型序列的极限，且是非負二次型．考虑到

$$[\operatorname{grad} v_0, Ax + bu_0] = -w(x, u_0(x)), \tag{III-7}$$

可知 v_0 必正定．由此，极限系統

$$\dot{x} = Ax + bu_0(x) \tag{III-8}$$

漸近稳定．应用定理 3.1，則 $v_0(x)$ 与 $u_0(x)$ 是对应最优化問題的解．

从上面証明可以看出，在这里求解最优化問題的过程，只是对常系数綫性系統按給定二次型求李雅普諾夫函数的过程，这一种計算可归結为解一次代数方程組．

最后証明序列逼近法按指数收斂．

由于表达式

$$G_k(x, u) = [\operatorname{grad} v_k(x), Ax + bu] + w(x, u) \tag{III-9}$$

是 u 的二次凸函数，且 $G_k(u, u_k) = 0$，u_{k+1} 又使其取最小值，故有

$$G_k(x, u_{k+1}) = -2(u_{k+1} - u_k)^2 \leqslant 0. \tag{III-10}$$

将其与 $G_{k+1}(x, u_{k+1})$ 相減，可得

$$[\operatorname{grad}(v_{k+1}(x) - v_k(x)), Ax + bu_{k+1}] = \frac{1}{2}[\operatorname{grad}(v_k(x) - v_{k-1}(x)), b]^2. \tag{III-11}$$

利用矩陣記法，設 $v_{k+1}(x) - v_k(x) = \Delta v_x(x) = x'\Delta v_k x$，并将上式积分，則有

$$\Delta v_k = \int_0^\infty e^{\bar{A}_{k+1}t} \Delta v_{k-1} bb' \Delta v'_{k-1} e^{\bar{A}'_{k+1}t}\, dt, \tag{III-12}$$

其中 $\bar{A}_{k+1} = A + bb'v_k$．設各 $\bar{A}_{k+1}$ 的特征根实部模的下确界为 $\eta > 0$，$\delta \in [0, \eta]$ 为某一正数．由于各 $\bar{A}_{k+1}$ 的模一致有界，故存在 p 使对任何 k 有

$$\|e^{\bar{A}_k t}\| \leqslant pe^{-\delta t}. \tag{III-13}$$

由此可得 $\|\Delta v_k\|$ 的估計值：

$$\begin{aligned} \|\Delta v_k\| &\leqslant \frac{1}{2} p^2 \|\Delta v_{k-1}\| \cdot \|bb'\| \cdot \|\Delta v_{k-1}\| \int_0^\infty e^{-2\delta t}\, dt = \\ &= \frac{1}{2} p^2 \frac{1}{2\delta} \|bb'\| \cdot \|\Delta v_{k-1}\|^2 \equiv Q \|\Delta v_{k-1}\|^2. \end{aligned} \tag{III-14}$$

由此可見当 Δv_k 較小时，它大致以指数函数 α^{2^k} 方式接近于零，其中 $|\alpha| < 1$．

至此，定理 4.2 全部得到証明．

应用定理 2.3，不难証明系統序列 $\dot{x} = Ax + bu_n(x)$ 出自同一初値的解，在 $t \in [0, +\infty]$ 一致收斂至极限系統 (III-8) 出自同一初值下的解．

IV. 几个数例

例 1.　在图 2 上所示二阶系統，其方程是

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -4x - y + u.$$

取指标为

$$I(u) = \int_0^\infty (x^2 + y^2 + u^2)\, dt,$$

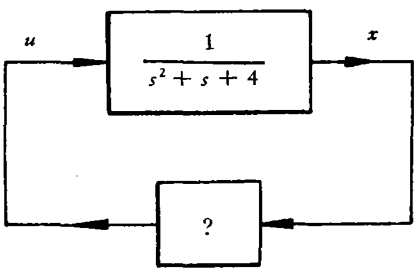

图 2.

不难証明該問題的精确解是

$$u(x, y) = 0.1231x - 0.4987y.$$

当利用序列逼近法时，若令 $v_k(x, y) = m_k x^2 + 2n_k xy + p_k y^2$，則 $u_k(x, y) = -n_{k-1}x - p_{k-1}y$. 利用迭代程序可有公式

$$n_k = \frac{1 + n_{k-1}^2}{2(4 + u_{k-1})}, \quad p_k = \frac{1 + p_{k-1}^2 + 2n_k}{2(1 + p_{k-1})}.$$

选择 $u_1 = 0$，則我們有

$$n_1 = 0.1250, \ n_2 = 0.1231, \ n_3 = 0.1231, \ \cdots$$

$$p_1 = 0.6250, \ p_2 = 0.5037, \ p_3 = 0.4987.$$

显然，只要經过三次迭代，即可准确至四位小数.

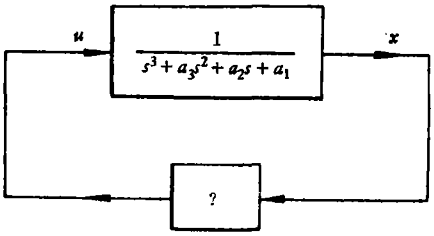

图 3.

例 2. 图 3 所示的三阶系統，其方程是

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3t^u,$$

而其指标为

$$I(u) = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^3 c_i x_i^2 + cu^2\right) dt.$$

若对此系統应用貝尔曼方程求精确解，則必需解四次代数方程，并对結果逐个判别系統稳定性以确定最优控制，这显然是比較复杂的. 以下用序列逼近法，将易于得到結果.

設 $v^{(k-1)}(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} v_{ij}^{(k-1)} x_i x_j \ (v_{ij} = v_{ji})$，則有

$$u^{(k)}(x) = -\frac{1}{c}\left[v_{13}^{(k-1)}x_1 + v_{23}^{(k-1)}x_2 + v_{33}^{(k-1)}x_3\right].$$

利用迭代手續，可得 $v_{ij}^{(k-1)}$ $(i = 1, 2, 3)$ 应滿足的迭代方程:

$$v_{13}^{(k)} = \frac{c_1 + \frac{1}{c} v_{13}^{(k-1)^2}}{2\left(a_1 + \frac{1}{c} v_{13}^{(k-1)}\right)},$$

$$v_{33}^{(k)} = \frac{2v_{13}^{(k)}\left(a_3 + \frac{v_{33}^{(k-1)}}{2}\right) - \frac{2}{c} v_{13}^{(k-1)} v_{33}^{(k-1)} + c_2 + \frac{v_{23}^{(k-1)^2}}{c} + \left(a_2 + \frac{v_{23}^{(k-1)}}{c}\right)\left(c_3 + \frac{v_{33}^{(k-1)^2}}{c}\right)}{-2\left(a_1 + \frac{1}{c} v_{13}^{(k-1)}\right) + 2\left(a_2 + \frac{1}{c} v_{23}^{(k-1)}\right)\left(a_3 + \frac{1}{c} v_{33}^{(k-1)}\right)},$$

$$v_{23}^{(k)} = \left(a_3 + \frac{1}{c} v_{33}^{(k-1)}\right) v_{33}^{(k)} - \frac{c_3}{2} - \frac{1}{2c} v_{33}^{(k-1)^2}.$$

为确定初始控制 u_1，我們取

$$u_1(x) = (a_1 - 1)x_1 + (a_2 - 3)x_2 + (a_3 - 3)x_3.$$

此时，系統的特征值均为 -1.

对下列数字进行迭代:

$$a_1 = -4, \ a_2 = 3, \ a_3 = 0,$$

$$c = c_1 = c_2 = c_3 = 1,$$

此时，无控系統有一个不稳定环节，因而是不稳定的(图 4).

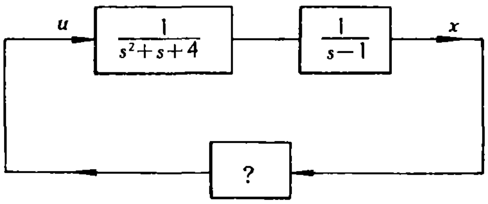

图 4.

利用前述迭代公式可得

次数	1	2	3	4	5
v_{13}	13.00	9.44	8.28	8.12	8.12
v_{33}	4.94	3.58	2.76	2.45	2.45
v_{23}	9.81	5.00	3.00	2.45	2.45

由此可知迭代四次可准确至三位有效数字.

V. 定理 5.1 的証明

首先由第四节的結果可知,可选取綫性可准控制 $u_1 = [p, x]$, 以使系統

$$\dot{x} = Ax + bu_1 \tag{V-1}$$

漸近稳定. 又由于这种漸近稳定的粗性和 t 充分大时 $B(t)$ 充分小,故系統(5.1)是綫性可控的,并且对应 u_1 的系統按指数漸近稳定. 由此积分得

$$v_1(x, t) = \int_t^\infty w(\xi(x, t), u_1(\xi), \tau)\, d\tau < +\infty,$$

其中 $\xi(x, t)$ 是 (5.1) 当 $u = u_1$ 时由 $x(t) = x$ 出发的解,并且 v_1 滿足方程

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + [\mathrm{grad}\, v_1, Ax + B(t)x + bu_1] + w(x, u, t) = 0.$$

$v_1(x, t)$ 的极限 $v_1(x, \infty)$ 則滿足方程

$$[(Ax + bu_1), \mathrm{grad}\, v_1(x, \infty)] + w(x, u_1, \infty) = 0.$$

$v_1(x, t)$ 是具有无穷小上界的正定二次型,当 $t \to \infty$ 时,它趋近于一个常数正定二次型.

作逼近序列,則有

$$u_2 = -\frac{1}{2}[b, \mathrm{grad}\, v_1(x, t)] = u_2^{(1)} + u_2^{2)} =$$

$$= -\frac{1}{2}[b, \mathrm{grad}\, v_1(x, \infty)] - \frac{1}{2}[b, \mathrm{grad}\,(v_1(x, t) - v_1(x, \infty))].$$

显然,当 $u = u_2$ 并代入系統后,系統将按指数漸近稳定, 由此又可以求出 $v_2(x, t)$; 如此下去,則有两个序列:

变系数正定二次型序列:

$$v_1(x, t), v_2(x, t)\cdots, v_n(x, t)\cdots,$$

变系数綫性控制序列:

$$u_1(x, t), u_2(x, t)\cdots, u_n(x, t)\cdots.$$

显然, 由于 $v_n(x, t)$ 对每个 $t > 0$ 都是单調下降的正定二次型, 因此它一定收斂至非負二次型 $v_0(x, t)$. 另一方面, u_n 的系数完全由 $v_n(x, t)$ 的系数确定,因此 $u_n(x, t)$ 收斂至 $u_0(x, t)$, u_0 与 v_0 滿足貝尔曼方程, 并且不难証明当 $t \to \infty$, $v_0(x, t)$ 以 $v_0(x, \infty)$ 为极限,当 $t \to \infty$, $u_0(x, t)$ 以 $u_0(x, \infty)$ 为极限,而 $v_0(x, \infty)$ 与 $u_0(x, \infty)$ 就是 $v_n(x, \infty)$ 与 $u_n^{(1)}(x, t)$ 的极限.

至此,定理 5.1 得到証明.

显然,当 b 以 $b(t)$ 代替,而 $b(t) \to b$ 时,結論显然正确.

VI. 拟常系数綫性系統的举例

例 1. 变系数綫性系統:

$$\dot{x} = ax + \frac{1}{t+1}x + bu, \quad t \geqslant 0$$

$$I(u) = \int_0^\infty (x^2 + u^2)\, dt = \int_0^\infty w(x, u)\, dt.$$

以 $u_1(x, t) = -\frac{1}{b}(a + \sqrt{a^2 + b^2})x$ 代入, 可求出

$$v_1(x,t)=\frac{1}{b^2}\left[a+\sqrt{a^2+b^2}\right]\left[1+\frac{1}{(t+1)\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{(a^2+b^2)(t+1)^2}\right]x^2,$$

$$u_2(x,t)=-\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)\left[1+\frac{1}{(t+1)\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{(a^2+b^2)(t+1)^2}\right]x.$$

由 u_2 可进一步求出 v_2，但继續計算下去将十分复杂，甚至无法用初等函数表示。

事实上，一般变系数系統

$$\dot{x}=A(t)x+b(t)u$$

其貝尔曼方程的展开形式是

$$\frac{\partial v}{\partial t}+[A(t)x,\ \mathrm{grad}\,v(x,t)]+\sum_{i=1}^{n}a_i(t)x_i^2=\frac{1}{4}[b(t),\ \mathrm{grad}\,v]^2.$$

当以 v 为变系数二次型代入时，可得到其系数满足 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 元的 Riccati 型方程組。 在上例情况下，它是

$$v=x^2f(t),\quad \dot{f}(t)+2f(t)\left[a+\frac{1}{t+1}\right]+1=b^2f^2(t).$$

众所周知，Riccati 方程的解通常是无法用初等函数表示的，因此，在运用序列逼近法的过程中将遇到困难。

例 2. 設受控对象方程在极坐标下的形式为

$$\dot{r}=r(r-1)+u,\quad \dot{\theta}=\sigma=\mathrm{const.},$$

对应的无控系統 $(u=0)$ 以原点为稳定焦点，吸引区为极限环 $r=1$ 的內部。

考虑指标是

$$I(u)=\int_0^\infty(r^2+u^2)\,dt,$$

显然可选 u 是 r 的函数。

对应的貝尔曼方程是

$$\frac{\partial v}{\partial r}[r(r-1)+u]+r^2+u^2=\min=0.$$

由此可求出 $u=-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial r}$. 将此代入上式，則得到

$$-2u[r(r-1)+u]+r^2+u^2=0.$$

从而

$$u=-(r-1)r\pm r\sqrt{1+(1-r)^2},$$

而对应于漸近稳定的系統的最优控制为

$$u_{\text{最优}}=-r\sqrt{1+(1-r)^2}-r(r-1),$$

对应的最优指标为

$$v_{\text{最优}}=\int_0^r\left[\sqrt{1+(1-r)^2}+r-1\right]2r\,dr.$$

再用序列逼近法求解，例如选 $u_1=0$，則根据一般步驟可得

$$u_{k+1}=\frac{1}{2}\,\frac{r^2+u^2k}{r(r-1)+u_k},$$

$$v_{k+1}=\int_0^r\frac{-(r^2+u_k^2)}{r(r-1)+u_k}\,dr=-2\int_0^r u_{k+1}\,dr.$$

不难驗証各 u_k 均在 $r=1$ 有一阶极点，v_k 也在 $|r|<1$ 有无穷大下界。在这种控制下，系統只在 $|r|<1$ 內有定义，并漸近稳定。

序列 $\{u_k\}$ 单調下降趋于 $v_{最优}$，但只是在任一 $|r|\leqslant\alpha<1$ 內收斂一致，而在整个吸引区虽收斂但并不一致(图 5)。

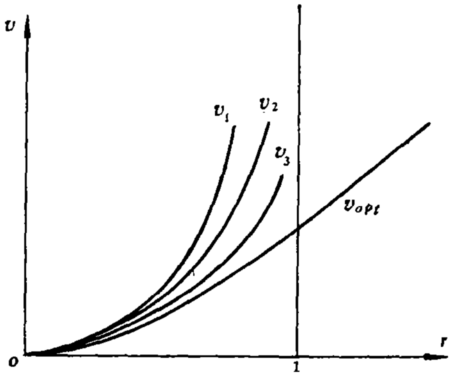

图　5.

用逼近控制序列所得系統的吸引区与 u_1 的选取有关，例如，若选

$$u_1 = -r(r-1) + r(r-k),$$

就可得到在 $|r|<k$ 內漸近稳定的逼近序列。

如何选取初始控制使吸引区最大，仍是一个有待研究的問題。

参　考　文　献

[1] 錢学森，工程控制論，科学出版社，北京，1958.

[2] 秦元勳，运动稳定性的一般問題講义，科学出版社，北京，1958.

[3] 宋　健、韓京清，綫性最速控制系統的分析与綜合理論，数学进展，1962 年，第 5 卷，第 4 期，263—283.

[4] 章仁为，Одна задача синтеза оптимальных систем по принципу максимума, *Автоматика и Телемеханика*, **22** (1961), № 10, 1302—1308.

[5] 蔡燧林，常系数綫性微分方程組的 Ляпунов 函数的公式，数学学报，1959 年，第 9 卷，第 4 期，455—468.

[6] 高維新，Ляпунов 函数的造法，北京大学学报（自然科学），1962 年，第 3 期.

[7] 张学銘，微分方程稳定性理論講义，山东人民出版社，济南，1959.

[8] 許淞庆，常微分方程稳定性理論，上海科学技术出版社，上海，1962.

[9] 黄　琳，On the Estimation of the Decaying Time, Preprints of the 2nd IFAC, London, 1963.

[10] Понтрягин, А. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва, 1961.

[11] Bellman, R., Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, 1957.

[12] Kalman, R. E., Glicksberg, G. I., Gross, O. A., Some Aspects of the Mathematical Theory of Control Processes, RAND Corporation, California, 1958.

[13] Летов, А. М., Аналитическое конструирование регуляторов, I-V, *Автоматика и Телемеханика*, **21** (1960), № 4, 436—441; № 5, 561—568; № 6, 661—665; **22** (1961), № 4, 425—435; **23** (1962), № 11, 1405—1413.

[14] Красовский, Н. Н., Летов, А. М., К теории аналитического конструирования регуляторов, *Автоматика и Телемеханика*, **23** (1962), № 6, 713—720.

[15] Кириллова, Ф. М., К задаче об аналитическом конструировании регуляторов, ПММ, **25** (1961), № 3, 433—439.

[16] Курцвейль, Я., К аналитическому конструированию регуляторов, *Автоматика и Телемеханика*, **22** (1961), № 6, 688—695.

[17] Салуквадзе, М. Е., К вопросу аналитического конструирования оптимального регулятора, *Автоматика и Телемеханика*, **24** (1963), № 4.

[18] Bellman R., Stability Theory of Differential Equations, McGraw Hill, New York, 1953 (R. 貝尔曼，微分方程的解的稳定性理論，张燮譯，科学出版社，北京，1957).
[19] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, Москва, 1950.
[20] Красовский, Н. Н., Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени, ПММ, **26** (1962), № 1, 39—51.
[21] Лидский, Э. А., Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами, ПММ, **27** (1963), № 1, 33—57.
[22] Kalman, R. E., Bertram, J. E., Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunoff, *Journal of the Basic Engineering*, June, 1960.
[23] Зубов, В. И., Колебания в нелинейных и управляемых системах, Судпромгиз, Ленинград, 1962.
[24] Альбрехт, Э. Г., Об оптимальной стабилизации нелинейных систем, ПММ, **25** (1961), № 5, 836—844.
[25] Четаев, Н. Г., О выборе параметров устойчивости механической системы, ПММ, **15** (1951), № 3.
[26] 黄 琳，控制系統动力学及运动稳定性理論的若干問題，力学学报，1963 年，第 2 期，89—110.
[27] Вайсборд, Э. М., Об одном приближенном методе оптимального управления, *Автоматика и Телемеханика*, **24** (1963), № 12, 1626—1632.

THE "SECOND METHOD" OF LIAPUNOV AND THE ANALYTICAL DESIGN OF THE OPTIMUM CONTROLLER

Hwang Ling Zheng In-ping Chang Di

In this article, the problem for the analytical design of the optimum controller is studied by means of the "Second Method" of Liapunov and Bellman's method of "Dynamic Programming". A sequential approximation method is proposed, it is very convenient both for theoretical analysis and practical calculation.

In section 1, a very general statement of the problem is given and it is shown that Bellman's equation is the basic equation for this problem. In section 2, some basic results related to the Liapunov's "Second Method" which are necessary for the following study are given in a clearer and simpler manner.

In section 3, some results about the problem of the optimum controller are given in general terms, viz: the theorem of uniqueness, the sufficient condition of the optimum problem in terms of Bellman's equation and the technique of the sequential approximation together with its basic properties.

In section 4, the case of the stationary linear system is discussed, the existence and uniqueness problems are solved. Some examples are given in appendix V to explain the method introduced and to show its rapid convergence. It is proved that it converges exponentially.

In section 5, two quasi-stationary linear systems are studied, viz: the linear system with slowly-variable coefficients and quasi-linear system. Some interesting examples illustrating some applications of the theoretical results are given in appendix VI.

In the last section, some future developments of the problem are discussed.

The methods introduced in this paper are all given for the synthesis problem, it is thus very convenient both for theoretical study and for practical application.