

# 线性复合自动控制系统的图解综合法<sup>1)</sup>

叶 正 明

## 摘 要

本文主要讨论了复合系统(具有开环及闭环控制回路的系统)的综合方法。文中拟出了一种用系统的对数频率特性计算系统误差平方积分值的简易方法,用这种方法可以很方便地综合前馈网络。对于执行环节输出有积分限制条件和用断续回路作为前馈单元的情形,文中也讨论了它们的综合方法。

## 一、前 言

如图1的结构图,设 $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ ,  $\epsilon(t)$ 分别表示控制系统的输入讯号、输出讯号及误差讯号;于是不难得到下列关系式:

$$E(p) = \frac{\Delta'(p)}{\Delta(p)} \Theta_1(p), \quad (1)$$

$$\Delta'(p) = 1 - Y_1(p)Y_3(p)Y_4(p), \quad (1a)$$

$$\Delta(p) = 1 + Y_2(p)Y_3(p)Y_4(p). \quad (1b)$$

上式中 $\Theta_1(p)$ ,  $\Theta_2(p)$ ,  $E(p)$ 分别表示 $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ ,  $\epsilon(t)$ 的拉普拉斯变换式;  $Y_1(p)$ ,  $Y_2(p)$ ,  $Y_3(p)$ ,  $Y_4(p)$ 分别表示图1中各环节的传递函数。

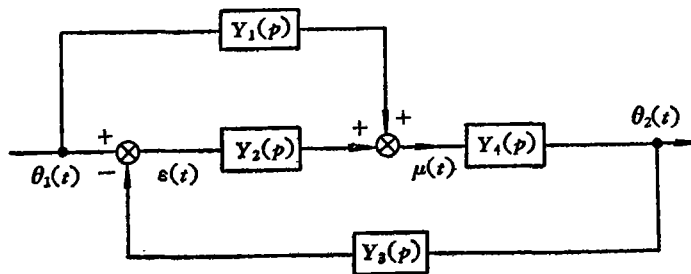


图1. 复合自动调节系统结构图

由式(1)可看出,如 $\Delta'(p) = 0$ ,则在任何 $\theta_1(t)$ 情况下, $\epsilon(t) \equiv 0$ ,这就是“绝对不变性条件”<sup>[1]</sup>。但在 $Y_3(p)Y_4(p)$ 分母的阶次较高时,这些条件在工程上的实现可能性将受到限制,因此在很多文献<sup>[1,2]</sup>中又提出了“近似不变性”原理。

在近似不变性中,有所谓“位移不变性”及“速度不变性”<sup>[1]</sup>。这些都是指静态误差而言,而对于一个系统的动态过程,并不能通过这些系数来进行综合。

文献[3]中提出的综合复合控制系统的方法,在系统的阶次高于三次时,综合得到的 $Y_1(p)$ 微分次数往往太高,不易实现;而在实际的 $Y_1(p)$ 和综合结果不相符合时,对系统

1) 本文的主要内容曾在1961年11月中国自动化学会天津会议上宣读。

动态过程的影响又不易看出,因此对设计者是非常不便的。同时还需说明,这种方法只是使幅-频曲线和希望幅-频特性相同,因此计算误差较大。当  $\theta_1(t)$  不是阶跃函数,而是其他已知的時間函数时,使用这一方法就更加复杂。

本文提出的图解综合法,可用在  $\theta_1(t)$  是一个已知的時間函数和对误差的要求是其积分平方值为最小(即  $\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \min$ ) 的情况下。此时,可配合其他要求(如  $Y_1(p)$ ,  $Y_2(p)$ ) 实现的形式,执行机构的参数受限制的情形来综合  $Y_1(p)$ ,  $Y_2(p)$  的参数。

## 二、一种计算误差平方积分值的方法

在图 1 中,设控制系统在  $\theta_1(t)$  未接入前,误差及其各阶导数都为零。根据巴西凡尔(Parseval)定理<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{\Delta'(p)}{\Delta(p)} \cdot \Theta_1(p) \right|_{p=j\omega}^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Delta'(j\omega)|^2 \cdot \left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2)$$

设  $\Theta_1(j\omega)$  的截止频率为  $\omega_H$ ,则可近似认为在  $\omega > \omega_H$  时,  $E(j\omega) \doteq 0$ ; 又设  $\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ , 则必能找到一个  $\omega_0$  值,使  $\omega < \omega_0$  时,  $E(j\omega) \doteq 0$ 。(当  $\varepsilon(\infty) \neq 0$  时,则采用  $\int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) - \varepsilon^2(\infty)] dt = \min$  的准则,同样一定能找到  $\omega_0$  值,使  $\omega < \omega_0$  时,  $|E(j\omega)|^2 - \left| \frac{\varepsilon(\infty)}{\omega} \right|^2 \doteq 0$ 。下述方法同样能用。)因此由式(2)得

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \doteq \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} |\Delta'(j\omega)|^2 \cdot \left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 d\omega. \quad (3)$$

令

$$d\omega = \omega \cdot d(\ln \omega),$$

则式(3)又可转变为

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \doteq \frac{1}{\pi} \int_{\ln \omega_0}^{\ln \omega_H} |\Delta'(j\omega)|^2 \cdot \left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 \cdot \omega \cdot d(\ln \omega). \quad (4)$$

假如将  $|\Delta'(j\omega)|^2 \cdot \left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 \cdot \omega \sim \omega$  曲线画在半对数坐标纸上(横坐标为对数坐标,表示  $\omega$  值,纵坐标为等分坐标,表示  $\omega$  的函数),这一曲线在坐标纸上自  $\omega_0$  至  $\omega_H$  和横坐标所包含的面积除以  $\pi$  后即代表式(4)的数值。由于这种方法是利用对数频率特性来计算  $\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$  值,因此比之一般使用代数法<sup>[4]</sup>,在系统阶次较高时,计算比较简便。在  $\Theta_1(p)$ ,  $\Delta(p)$ ,  $\Delta'(p)$  不能化成代数多项式时,代数法就不适用,而用这一方法则并无限制。

## 三、 $Y_1(p)$ 及 $Y_2(p)$ 的综合

先设  $Y_1(p) = 0$ , 用综合一般调节系统的零点极点分布法<sup>[5]</sup>,使系统的过渡过程取决于閉路方程式中两个主要的共轭复根 ( $-\alpha \pm j\omega_0$ )。因此这时

$$\varepsilon(t) \doteq A e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (5)$$

根据系统的动态要求和系统的限制条件(如放大倍数的限制,校正网络的限制等),用一般零点极点分布法<sup>[5]</sup>,选定  $\alpha, \omega_0, \xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$  等值,然后决定  $Y_2(p)$  的参数。这样综合的结果如尚不能满足系统要求时,再引入  $Y_1(p)$ 。

由于  $Y_1(p)$  不会改变闭环方程式  $\Delta(p)$  的根,而在实现近似不变性时,  $Y_3(p), Y_4(p)$  的极点被  $Y_1(p)$  的零点所近似抵消。因此在式(1)中对过渡过程有很大影响的极点是不会增加的。这时式(5)中,  $\alpha, \omega_0$  不变,只是  $A, \varphi$  值变了。由式(5),得

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \doteq \frac{A^2}{4\omega_0} \left[ \frac{1}{\xi} + \frac{\xi \cos 2\varphi - \sin 2\varphi}{1 + \xi^2} \right]. \quad \left( \xi = \frac{\alpha}{\omega_0} \right) \quad (6)$$

如  $A$  为定值,  $\varphi$  从  $(-\tan^{-1}\xi)$  变化到  $(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\xi)$ , 则式(6)从它的最大值  $\frac{A^2}{4\omega_0} \left( \frac{1}{\xi} + \frac{1 + \xi}{(1 + \xi^2)^2} \right)$  单调下降到最小值  $\frac{A^2}{4\omega_0} \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1 + \xi}{(1 + \xi^2)^2} \right)$ 。因此在引入  $Y_1(p)$  后, 式(6)值的减少, 可能是  $A$  值减少, 也可能是  $\varphi$  值从  $(-\tan^{-1}\xi)$  向  $(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\xi)$  方向的变化。不论是哪一种原因,  $\varepsilon(t)$  的绝对值在大部分时间间隔内都是减小的。因此, 如接近似不变性的准则来综合  $Y_1(p)$ , 并保证  $\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$  值比  $Y_1(p)$  未引入前为小, 则误差的绝对值在大部分时间间隔内趋向于减小, 而不致引起意想不到的振荡情形。近似不变性的要求应保证  $\Delta'(p) \doteq 0$ , 这时  $\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \rightarrow 0$ 。假如选用  $\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \min$  作为综合指标, 显然可以符合上述的两个要求。

设  $Y_3(p)Y_4(p) = K_{34} \frac{N(p)}{B(p)}$ ,  $Y_1(p) = K_1 \frac{D(p)}{C(p)}$ , 而  $\frac{N(p)}{B(p)} \Big|_{p=0} = 1$ ,  $\frac{D(p)}{C(p)} \Big|_{p=0} = 1$ , 如欲使  $\varepsilon(\infty) \equiv 0$ , 则必须使  $K_1 \cdot K_{34} = 1^{[1]}$ 。故

$$\Delta'(p) = 1 - Y_1(p)Y_3(p)Y_4(p) = 1 - K_1 K_{34} \frac{D(p)N(p)}{C(p)B(p)} = 1 - \frac{D(p)N(p)}{C(p)B(p)}. \quad (7)$$

设  $\frac{N(p)}{B(p)} = \frac{N_1(p)N_2(p)}{B_1(p)B_2(p)}$  ( $N_1(p), B_1(p)$  为阶次相同的  $p$  多项式, 其零点都在复数左半平面上, 而  $N_2(p)$  的零点都不在复数左半平面上), 则首先选

$$\frac{D(p)}{C(p)} = \frac{B_1(p)D_2(p)}{N_1(p)C_2(p)}. \quad (8)$$

先设  $\frac{D_2(p)}{C_2(p)} = 1$ , 并画出这种情形下的曲线  $\left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 |\Delta'(j\omega)|^2 \sim \omega$ 。如这条曲线在某一频率范围内 ( $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ ) 幅值较大, 而在别的部分幅值都较小, 则在综合时只须保证在  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  范围内,  $\Delta'(j\omega) \doteq 0$ , 首先挑出此范围内幅值最大的一点 ( $\omega = \omega_m$ ) 作为综合的试验点, 即使  $|\Delta'(j\omega_m)| \doteq \min$ 。

设  $\frac{N_2(p)}{B_2(p)} \Big|_{p=j\omega_m} = L_{NB} \angle \theta_{NB}$ , 而  $\frac{D_2(p)}{C_2(p)}$  的形式选为

$$\frac{(1 + T_1 p)}{(1 + \alpha T_1 p)} \cdot \frac{(1 + T_2 p)}{(1 + \alpha T_2 p)} \cdot \dots \cdot \frac{(1 + T_i p)}{(1 + \alpha T_i p)}, \quad \alpha \ll 1 \quad (9)$$

$\alpha$  值根据实现  $\frac{D_2(p)}{C_2(p)}$  的限制条件而定。如  $\frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega\alpha T_1}$  在相角值较大的频率段内的相角平均值为  $\Phi_1$ , 则式(9)中  $i$  值可取稍大于  $\frac{-\theta_{NB}}{\Phi_1}$  的整数。  $\frac{T_2 \cdots T_i}{T_1}$  的比值在  $\frac{\omega_m}{\omega_1}, \frac{\omega_m}{\omega_2}$  范围内可选取几组数据。在  $\frac{N_2(j\omega)}{B_2(j\omega)}$  滞后相角较大的频率段内 ( $\omega_3 \leq \omega \leq \omega_4$ ), 所取的  $\frac{T_2 \cdots T_i}{T_1}$  在  $\frac{\omega_m}{\omega_3}, \frac{\omega_m}{\omega_4}$  范围内的个数应相应增多, 使  $|\Delta'(j\omega)|$  在  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  普遍较小。取  $\frac{T_2}{T_1} \cdots \frac{T_i}{T_1}$  某一组数值, 再变化  $T_1$  值, 在复数平面内画出  $\frac{D_2(j\omega_m)}{C_2(j\omega_m)}$  矢量终端的轨迹  $d_1 \cdots d_k$  (见图3)。由于

$$\Delta'(j\omega_m) = 1 - \frac{D_2(j\omega_m)}{C_2(j\omega_m)} \cdot \frac{N_2(j\omega_m)}{B_2(j\omega_m)} = \left\{ \left[ \frac{N_2(j\omega_m)}{B_2(j\omega_m)} \right]^{-1} - \frac{D_2(j\omega_m)}{C_2(j\omega_m)} \right\} \frac{N_2(j\omega_m)}{B_2(j\omega_m)}, \quad (10)$$

因此, 由式(10)可知  $|\Delta'(j\omega_m)|$  正比于一向量。其终端为  $\left[ \frac{N_2(j\omega_m)}{B_2(j\omega_m)} \right]^{-1}$  向量的终端, 其始端为  $\frac{D_2(j\omega_m)}{C_2(j\omega_m)}$  向量的终端。如以  $\left[ \frac{N_2(j\omega_m)}{B_2(j\omega_m)} \right]^{-1}$  向量终端为圆心, 画出半径最小的圆, 和轨迹  $d_1 \cdots d_k$  相切, 便可由切点定出  $T_1$  值, 使  $|\Delta'(j\omega_m)| = \min$ 。几组  $\frac{T_2 \cdots T_i}{T_1}$  数值, 按上法决定  $T_1$  值后, 便可根据  $|\Delta'(j\omega)|$  在  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  内的情形, 最终选定  $\frac{T_2 \cdots T_i}{T_1}$  值。这时,  $Y_1(p)$  的参数即可全部决定。

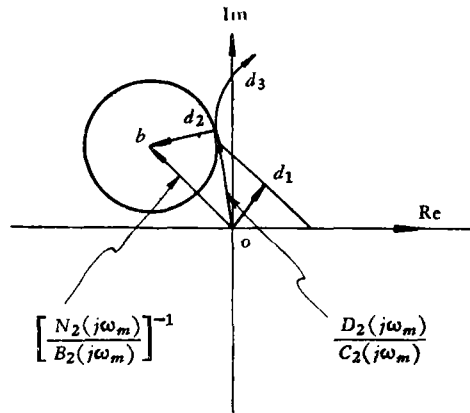


图2. 用图解法求  $|\Delta'(j\omega_m)| = \min$

**例1.** 设  $Y_3(p)Y_4(p) = \frac{4(1+4p)}{(1+10p)(1+0.32p)(1+0.2p)(1+0.1p)}$ ,  $Y_2(p)$  已由零点极点分布法决定为  $\frac{5(1+10p)(1+0.32p)(1+0.2p)}{(1+4p)(1+3.04p)(1+0.0106p)}$ , 主要的两个根为  $-4.75 \pm 6.8$ , 输入函数  $\theta_1(t)$  见图3a, 求  $Y_1(p)$ , 使  $\int_0^\infty e^2(t) dt = \min$ .

**解:** 使静态误差系数  $C_0 = 0$ ,  $e(\infty) \equiv 0$ , 则  $K_1 = \frac{1}{K_{34}} = 0.25$ . 因  $\frac{N_1(p)}{B_1(p)} = \frac{1+4p}{1+10p}$ , 故  $\frac{D(p)}{C(p)} = \frac{1+10p}{1+4p} \cdot \frac{D_2(p)}{C_2(p)}$ . 现  $\Theta_1(p) = \frac{20}{p^2}(1 - e^{-p} - e^{2p} + e^{-3p})$ ,  $\Delta(p) = 1 +$

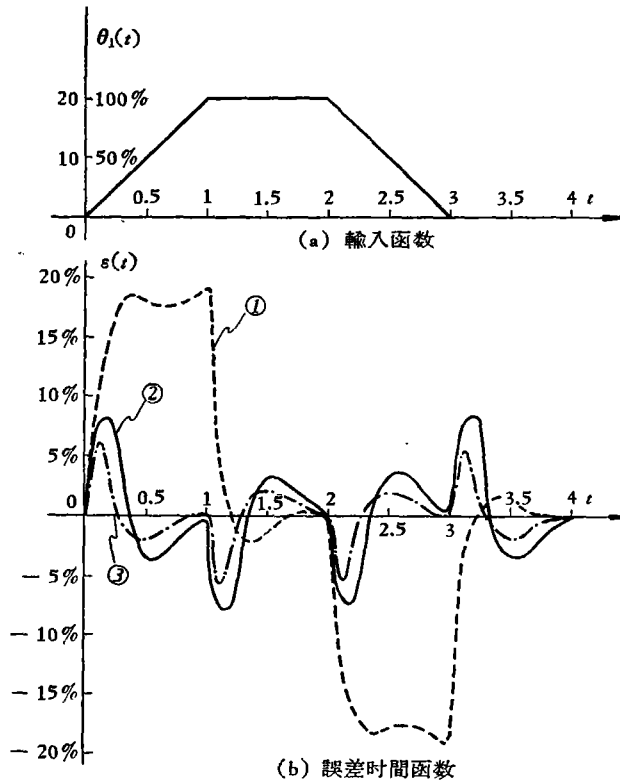


图 3. 输入函数及误差时间函数图

①  $Y_1(p) = 0$ ; ②  $Y_1(p) = 0.25 \frac{1+10p}{1+4p} \cdot \frac{1+0.49p}{1+0.05p} \cdot \frac{1+0.2p}{1+0.02p}$ ;

③  $Y_1(p) = 0.25 \frac{1+10p}{1+4p} \cdot \frac{1+0.39p}{1+0.04p} \cdot \frac{1+0.2p}{1+0.02p} \cdot \frac{1+0.1p}{1+0.01p}$

$\frac{20}{(1+3.04p)(1+0.1p)(1+0.0106p)}$ . 当  $\frac{D_2(p)}{C_2(p)} = 1$  时,  $\omega \cdot \left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 \cdot |\Delta'(j\omega)|^2 \sim \omega$

曲线见图 4 中的曲线 1'。由曲线 1', 可得  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 12, \omega_m = 4$ . 此时  $\frac{N_2(j\omega_m)}{B_2(j\omega_m)} =$

$\frac{1}{(1+j0.32\omega_m)(1+j0.1\omega_m)(1+j0.0106\omega_m)} = 0.446 \angle -112.3^\circ$ .

$\frac{D_2(p)}{C_2(p)}$  用式(9)的形式, 由设备的限制条件, 可取  $\alpha = 0.1$ . 根据  $\frac{1+j\omega T_1}{1+j0.1\omega T_1}$  的相-频

特性, 当  $1.8 \leq \omega T_1 \leq 6$  时, 平均相角值  $\Phi_1 = 50^\circ$ , 故  $i > \frac{112.3^\circ}{50^\circ} = 2.2$  (即可取  $i = 3$ ).

$\frac{N_2(j\omega)}{B_2(j\omega)}$  总共只有 3 个极点, 故可直观地取  $\frac{D_2(j\omega)}{C_2(j\omega)} = \frac{1+j\omega T_1}{1+j0.1\omega T_1} \cdot \frac{1+j0.2\omega}{1+j0.02\omega} \cdot \frac{1+j0.1\omega}{1+j0.01\omega}$ .

变化  $T_1$  值, 先画出  $\frac{D_2(j\omega_m)}{C_2(j\omega_m)}$  轨迹, 按图 2 的方法, 求出在  $T_1 = 0.4$  秒时,  $|\Delta'(j\omega_m)| = \min$ .

因此得  $Y_1(p) = 0.25 \frac{1+10p}{1+4p} \cdot \frac{1+0.4p}{1+0.04p} \cdot \frac{1+0.2p}{1+0.02p} \cdot \frac{1+0.1p}{1+0.01p}$ . 因输入函数有直

綫上升部分,故速度誤差系数  $C_1 = \frac{d}{dp} \varepsilon(p)|_{p=0}$  应取为 0. 因此将  $Y_1(p)$  稍作变更,

$$Y_1(p) = 0.25 \frac{1+10p}{1+4p} \cdot \frac{1+0.39p}{1+0.04p} \cdot \frac{1+0.2p}{1+0.02p} \cdot \frac{1+0.1p}{1+0.01p},$$

即能满足此要求. 由图 4

算得  $\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = 0.278$ , 均方誤差  $\varepsilon_{ms} = \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt}{T_0}} = 0.264$  ( $T_0$  为过渡过程时间, 现取

为 4 秒),  $\frac{\varepsilon_{ms}}{\theta_1(t)_{\max}} = \frac{0.264}{20} = 1.31\%$ . 曲线  $\varepsilon(t)$  见图 3b. 在图 3b 中也画出了  $Y_1(p)=0$ .

$Y_1(p)$  为其他参数的  $\varepsilon(t)$  曲线. 可见正确选取  $Y_1(p)$ , 有很大作用.

$$\omega \cdot \left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 \cdot |\Delta'(j\omega)|^2$$

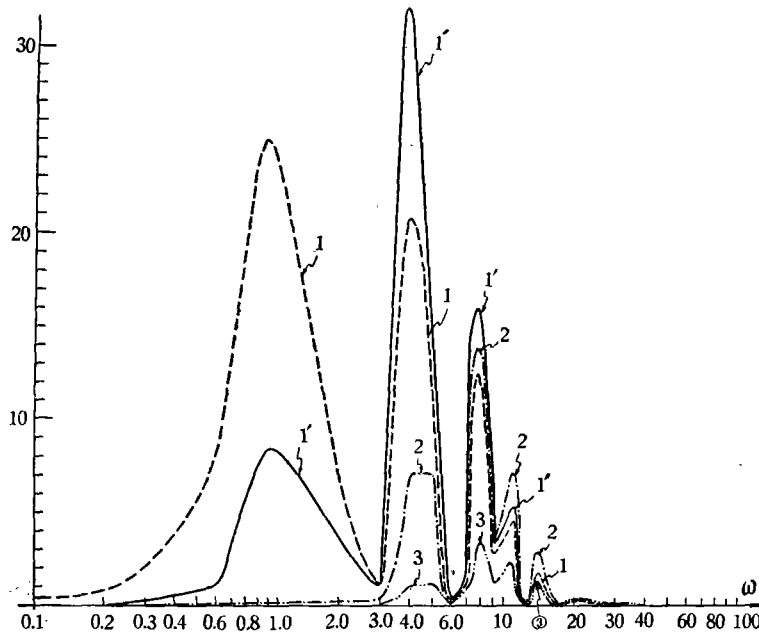


图 4.  $\omega \cdot \left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 \cdot |\Delta'(j\omega)|^2 \sim \omega$  图

1— $Y_1(p) = 0$ ; 1'— $Y_1(p) = 0.25 \frac{1+10p}{1+4p}$ ; 2— $0.25 \frac{1+10p}{1+4p} \cdot \frac{1+0.49p}{1+0.05p} \cdot \frac{1+0.2p}{1+0.02p}$ ;

3— $Y_1(p) = 0.25 \frac{1+10p}{1+4p} \cdot \frac{1+0.39p}{1+0.04p} \cdot \frac{1+0.2p}{1+0.02p} \cdot \frac{1+0.1p}{1+0.01p}$

当  $\theta_1(t)$  为平稳随机函数时, 可用  $\overline{\varepsilon^2(t)} = \min$  的准则<sup>[4]</sup>, 由

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{\Delta'(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 S_{\theta_1}(\omega) d\omega = \min, \quad (11)$$

求  $Y_1(p)$  时, 也可用上述图解法 ( $S_{\theta_1}(\omega)$  为  $\theta_1(t)$  的功率谱).

#### 四、功率执行环节输出能量受限制的情形

对于功率执行环节输出信号  $\mu(t)$  的能量受限制的情况, 一般习惯使用  $\int_0^{T_0} \mu^2(t) dt \leq c$ <sup>[4]</sup>

作为限制条件( $T_0$  为过渡过程时间), 本文也如此.

因为  $\mu(t)_{t=T_0} \doteq \mu(t)_{t=\infty}$ , 又令  $\mu(\infty) = \mu(t)_{t=\infty}$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \mu^2(t) dt &\doteq \int_0^{\infty} [\mu^2(t) - \mu^2(\infty)] dt + \int_0^{T_0} \mu^2(\infty) dt \doteq \\ &\doteq \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} |U(j\omega)|^2 d\omega - \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \left| \frac{\mu^2(\infty)}{\omega^2} \right| d\omega + \int_0^{T_0} \mu^2(\infty) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)中  $U(p)$  是  $\mu(t)$  的拉普拉斯轉換式,  $U(j\omega) = U(p)_{p=j\omega}$ , 故

$$\int_{\omega_0}^{\omega_H} |U(j\omega)|^2 d\omega \leq c - \int_0^{T_0} \mu^2(\infty) dt + \int_{\omega_0}^{\infty} \left| \frac{\mu^2(\infty)}{\omega^2} \right| d\omega = c'. \quad (13)$$

設  $Y_1(j\omega) = P_1(\omega) + jQ_1(\omega)$ ,  $Y_2(j\omega) = P_2(\omega) + jQ_2(\omega)$ ,  $Y_3(j\omega)Y_4(j\omega) = P_{34}(\omega) + jQ_{34}(\omega)$ ,  $\left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 = Q^2(\omega)$ , 其中  $P_2(\omega)$ ,  $Q_2(\omega)$ ,  $P_{34}(\omega)$ ,  $Q_{34}(\omega)$ ,  $Q^2(\omega)$  是已知的, 則整個問題为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} |U(j\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} |Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega)|^2 \cdot \left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} U(P_1, Q_1, \omega) d\omega \leq c', \end{aligned} \quad (14)$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} |E(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} |1 - Y_1(j\omega)Y_3(j\omega)Y_4(j\omega)|^2 \cdot \\ &\cdot \left| \frac{\Theta_1(j\omega)}{\Delta(j\omega)} \right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} E(P_1, Q_1, \omega) d\omega = \min. \end{aligned} \quad (15)$$

在式(14)中, 任取  $c''$ , 使

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} U(P_1, Q_1, \omega) d\omega = c'', \quad c'' \leq c', \quad (16)$$

則不論  $c''$  在 0 到  $c'$  間如何变化, 如要同时滿足式(15)及式(16), 可由变分法<sup>[6]</sup>得

$$v(P_1, Q_1) = \int_{\omega_0}^{\omega_H} [E(P_1, Q_1, \omega) + \lambda U(P_1, Q_1, \omega)] d\omega, \quad (17)$$

其中  $\lambda =$  常数,  $v$ ——变分符号.

由尤拉方程得

$$\frac{dE}{dP_1} + \lambda \frac{dU}{dP_1} = 0, \quad (18a)$$

$$\frac{dE}{dQ_1} + \lambda \frac{dU}{dQ_1} = 0. \quad (18b)$$

將  $Y_1(j\omega)$ ,  $Y_2(j\omega)$  以  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$  代入式(15)及式(16), 得

$$U(P_1, Q_1, \omega) = [(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2] \cdot Q^2, \quad (19a)$$

$$E(P_1, Q_1, \omega) = [(1 - P_1P_{34} + Q_1Q_{34})^2 + (P_1Q_{34} + Q_1P_{34})^2] Q^2. \quad (19b)$$

解(18a), (18b), 得

$$P_1 = -\frac{(\lambda P_2 - P_{34})}{|L_{34}|^2 + \lambda}, \quad Q_1 = -\frac{(\lambda Q_2 + Q_{34})}{|L_{34}|^2 + \lambda}. \quad (20)$$

代入式(19b), 得

$$E = \left[ \frac{\lambda}{|L_{34}|^2 + \lambda} \right]^2 \cdot \left\{ 1 + |L_2|^2 |L_{34}|^2 + 2P_2 P_{34} - 2Q_2 Q_{34} \right\} \cdot Q^2, \quad (21)$$

$$|L_2|^2 = P_2^2 + Q_2^2, \quad |L_{34}|^2 = P_{34}^2 + Q_{34}^2.$$

将式(20)代入式(16),得

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} \left\{ \frac{|L_{34}|^4 |L_2|^2 + |L_{34}|^2 + 2|L_{34}|^2 (P_2 P_{34} - Q_2 Q_{34})}{[|L_{34}|^2 + \lambda]^2} \right\} Q^2 d\omega = c''. \quad (22)$$

設

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} \left\{ \frac{|L_{34}|^4 \cdot |L_2|^2 + |L_{34}|^2 + 2|L_{34}|^2 (P_2 P_{34} - Q_2 Q_{34})}{|L_{34}|^4} \right\} Q^2 d\omega = \beta = \text{常数}, \quad (23)$$

则由式(21)知  $\lambda = 0, E = 0$ . 这时  $P_1 + jQ_1 = \frac{1}{P_{34} + jQ_{34}}, c'' = \beta$  即为不变性条件.

因此当限制要求  $c'' > \beta$  时,限制条件不必再考虑. 如  $c'' < \beta$  时,由式(21)知  $\frac{dE}{d\lambda}$  恒大于 0; 而由式(22),知  $\frac{dc''}{d\lambda}$  恒小于 0. 故  $c''$  取得愈大,  $\lambda$  愈小,  $E$  也愈小. 由式(15)知

$\int_0^{\infty} \epsilon^2(t) dt$  值也愈小. 由此可知,式(16)中  $c''$  应等于其允许最大值  $c'$ . 解得  $\lambda$  值后,即得  $P_1(\omega), Q_1(\omega)$ . 由此可算得  $Y_1(p)$  的参数.

当  $\theta_1(t)$  是平稳随机函数,而其幅值又为高斯分布时,由文献[4]的方法,根据  $\overline{\mu^2(t)} dt \leq \sigma^2$  的综合要求,同样可等价于  $|\mu(t)| \leq c$  (常数)的要求.

## 五、利用断续回路构成 $Y_1(p)$

在文献[1, 2, 3, 8]中,  $Y_1(p)$  只限于  $\frac{(1 + \alpha_1 p) \cdots (1 + \alpha_n p)}{(1 + \beta_1 p) \cdots (1 + \beta_m p)}$  的形式. 但在输入讯号中具有高频噪声时,  $Y_1(p)$  的微分次数太高,会使系统中调节器无法工作. 为了解决这一问题,可使用断续回路来实现<sup>[8,9]</sup>. 本文用图解法进一步讨论综合的方法.

图 5 中,  $H(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$ ,  $S$  为采样开关, 周期为  $T$ . 设  $\theta_1(t)$  频谱的截止频率为

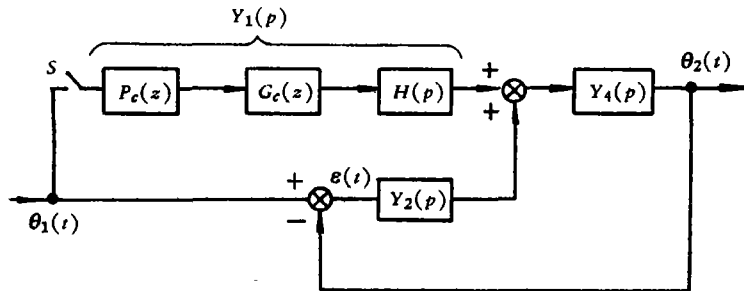


图 5. 利用断续回路实现  $Y_1(p)$  的结构图

$\omega_c$ , 最终值为一常数,则先取

$$T = \frac{2\pi}{(5 \div 8)\omega_c}. \quad (24)$$

由此得  $H(p)Y_4(p)$  的修正后的  $z$  变换式



$$G(z, m) = k \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \left\{ \frac{g_{p+1}}{(z-1)^{p+1}} + \dots + \frac{g_1(m)}{(z-1)} + \frac{h_1(m)}{z-r_1} + \dots + \frac{h_l(m)}{z-r_l} \right\}, \quad (25)$$

$r_1 = e^{-\frac{T}{T_1}}, \dots, r_l = e^{-\frac{T}{T_l}}, \frac{1}{T_1} \dots \frac{1}{T_l}$  是  $Y_4(p)$  的极点。这时根据文献[8], 得

$$G_c(z) = \frac{1}{k} \cdot \frac{(z-1)^p (z-r_1) \dots (z-r_l)}{(1-r_1) \dots (1-r_l)}. \quad (26)$$

$P_c(z)$  是对输入函数进行插值运算的环节, 它的形式为  $\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_i z^{-i}$ 。为使静态误差为 0, 应使

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i = 1. \quad (27)$$

由图(5)的结构得

$$\Theta_2(p) = Y_2(p)Y_4(p)[\Theta_1(p) - \Theta_2(p)] + \{P_c(z)G_c(z)|_{z=e^{Tp}} \cdot H(p)Y_4(p)\} \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_1(p + jn\omega_s), \quad (28)$$

而

$$E(p) = \Theta_1(p) - \Theta_2(p) = \left\{ \frac{1 - \frac{1}{T} [P_c(z)G_c(z)|_{z=e^{Tp}} \cdot H(p)Y_4(p)]}{1 + Y_2(p)Y_4(p)} \right\} \Theta_1(p) - \left\{ \frac{[P_c(z)G_c(z)|_{z=e^{Tp}} \cdot H(p)Y_4(p)]}{1 + Y_2(p)Y_4(p)} \right\} \frac{1}{T} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \Theta_1(p + jn\omega_s). \quad (29)$$

上两式中  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 。如以  $p = j\omega$  代入式(29)中, 则在满足式(24)的条件下, 可近似认为

$$E(j\omega) \doteq \left\{ \frac{1 - \frac{1}{T} H(j\omega)Y_4(j\omega) \cdot [P_c(z)G_c(z)|_{z=e^{j\omega T}}]}{1 + Y_2(j\omega)Y_4(j\omega)} \right\} \cdot \Theta_1(j\omega), \quad (30)$$

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \doteq \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_H} \left| \frac{1 - \frac{1}{T} H(j\omega)Y_4(j\omega) \cdot [P_c(z)G_c(z)|_{z=e^{j\omega T}}]}{1 + Y_2(j\omega)Y_4(j\omega)} \right|^2 \cdot |\Theta_1(j\omega)|^2 d\omega. \quad (31)$$

如综合要求为  $\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \min$ ; 则  $P_c(z)$  的系数同样可由式(31)用第三节中的图解法来求得。

**例 2.** 设  $Y_4(p) = \frac{89.1}{p^2 + 6.54p + 89.1}$ ,  $\theta_1(t)$  的频谱截止频率  $\omega_c = 2.95$  周/秒。求

$G_c(z)$ ,  $P_c(z)$  的系数, 使  $\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \min$ 。

$Y_4(p)$  的自然振荡周期  $T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{89.1 - \left(\frac{6.54}{2}\right)^2}} = 0.75$  秒。如取  $T = \frac{T_n}{2} = 0.355$

秒, 验算  $\frac{2\pi}{\omega_c T} = \frac{2\pi}{2.95 \times 0.355} \doteq 6$ , 式(24)的要求是符合的。  $H(p)Y_4(p) = \frac{1 - e^{-0.355p}}{p}$ 。

$\cdot \frac{89.1}{p^2 + 6.54p + 89.1}$ , 故

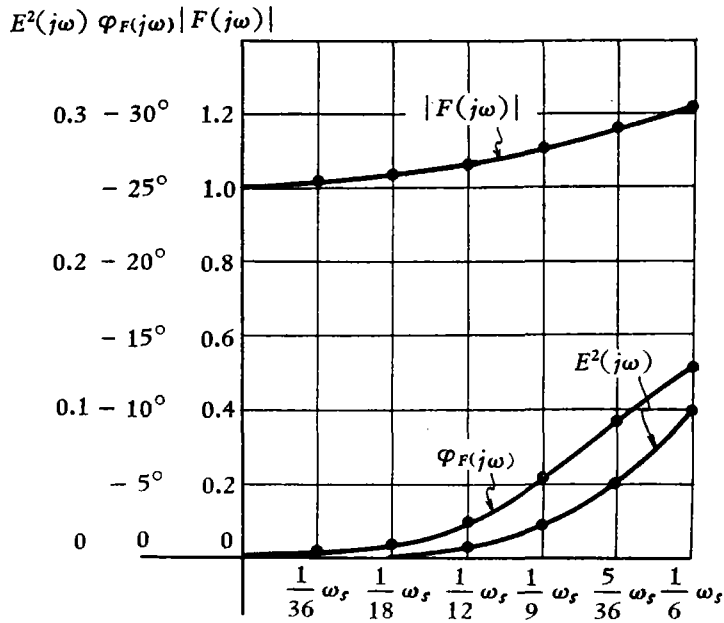


图 6.  $|F(j\omega)|, \varphi_{F(j\omega)}, E^2(j\omega) \sim \omega$  图 ( $E^2(j\omega) = |1 - F(j\omega)|^2$ )

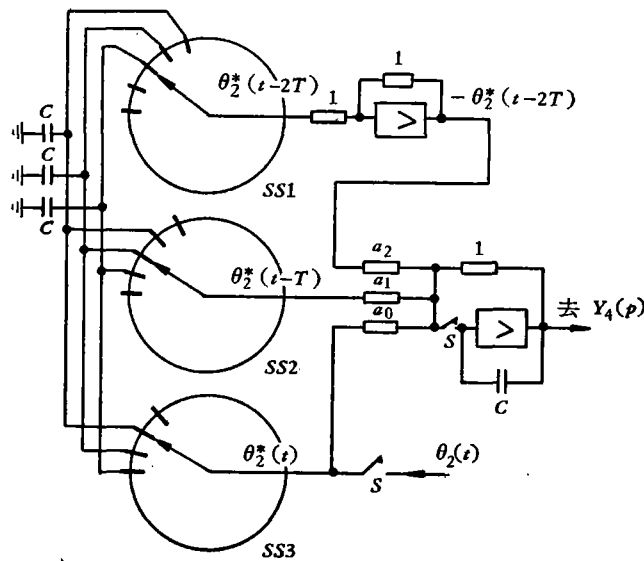


图 7. 实现  $P_c(z)G_c(z)H(p)$  的结构图

$$G(z, m) = \frac{z-1}{z} \cdot \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{(\cos m\pi + 0.327 \sin m\pi)e^{-m \times 0.355 \times 3.27}}{z + e^{-0.355 \times 0.327}} \right]$$

由此求得  $G_c(z) = \frac{z + e^{-0.355 \times 3.27}}{1 + e^{-0.355 \times 3.27}} \cdot \frac{1}{z}$ . 令  $P_c(z) = \alpha_0 - \alpha_1 z^{-1}$ , 同时假设在  $0 \leq \omega \leq$

$\frac{1}{6} \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{6} \omega$ , 时,  $\Theta_1(j\omega) \doteq 1$ , 而在  $\omega \geq \frac{1}{6} \omega$ , 时,  $\Theta_1(j\omega) = 0$  (这样, 误差的计算值较实际

际值为大, 是符合工程要求的); 又令  $F(j\omega) = \frac{1}{T} H(j\omega) Y_1(j\omega) [P_c(z) G_c(z)]_{z=e^{j\omega T}}$ , 则

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \doteq \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_s/6} |1 - F(j\omega)|^2 d\omega \doteq \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^6 \left| 1 - F\left(j \frac{\omega_s}{36}\right) \right|^2.$$

$F(j\omega)$  的幅-频、相-频特性见图 6. 如欲使  $\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \min$ , 可求得  $\alpha_0 = 1.46$ ,  $\alpha_1 = 0.46$ .

$P_c(z) G_c(z)$  的形式为  $a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$ , 连同  $H(p)$  的实现形式见图 7. 图 7 中  $S$  是采样开关,  $SS1, SS2, SS3$  是步进开关,  $C$  代表电容.

在撰写此文时, 承杨嘉墀先生多次审阅及指教, 作者深表感谢.

### 参 考 文 献

- [1] Петров, Б. Н., Уланов, Г. М., Вопросы теории комбинированного управления, Научно-технические проблемы автоматизации электроприводов, Изд. АН СССР, 1957.
- [2] Кулебакин, В. С., Об основных задачах и методах повышения качества автоматических управляемых систем, Труды II всесоюз. совещания по теории автоматического регулирования, т. II, Изд. АН СССР, М.-Л, 1955, 184—207.
- [3] Бесекинский, В. А., Федоров, С. М., Применение эквивалентной передаточной функции при расчете следящих систем комбинированного управления методом логарифмических частотных характеристик, Труды 1-го ИФАК, Изд. АН СССР, Москва, 1961.
- [4] Newton, G. C., Gould, L. A., Kaiser, J. F., Analytical Design of Linear Feedback Controls, John Wiley & Sons, Inc, New-York, 1957, chap. 2, 3, 7.
- [5] Truxal, J. G., Automatic Feedback Control System Synthesis, McGraw-Hill Book Company, New-York, 1955, chap. 5.
- [6] Элсгольц, Л. Э., Вариационное исчисление, Гостехиздат, 1952.
- [7] Косток, В. И., Комбинированные следящие системы с ограниченным числом производных от управляющего воздействия, Известия АН СССР, ОТН, Энергетика и Автоматика, 1962, № 1.
- [8] Jury, E. I., Schroeder, W., Discrete Compensation of Sampled-data and Continuous Control System. *Trans. AIEE*, 76(1957), Jan., 317—321.
- [9] Ван Сянь-минь, Коррекция непрерывных автоматических систем с целью получения конечного времени переходного процесса при помощи фильтра на элементах запаздывания, Автоматическое управление, Изд. АН СССР, 1959.

## SYNTHESIS OF THE COMBINED AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS BY GRAPHICAL METHOD

YEH CHING-MING

In this paper, mainly discuss the synthesis method of combined control systems (systems both contain open loop and closed loop control circuits). Suggest a simple method to calculate the system integral-square error by its logarithmic frequency characteristics. This method can easily be applied to synthesize the feedforward networks. When the output of the actuating element is subjected to some integral limit conditions, or the discrete circuit is used as feedforward unit, the synthesis method of feedforward network is also discussed.