第2卷 第1期 自动化学报 Vol. 2, No. 1
1964 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA January, 1964

关于非綫性控制系統的稳定性問題[1)]

高为炳

摘　　要

本文利用李亚普諾夫方法研究了非綫性控制系統的全局稳定性、大范围稳定和其吸引区的寻求以及一个品質問題. 对非綫性元件采用了分段綫性的模型，从而使得到的条件中也包含有非綫性特性的参数.

引　　言

关于非綫性控制系統的稳定性問題，国外已有很多文献进行了研究[1,2,3]. 在这些文献里，稳定性的提法是所謂絕对稳定性，所得到的条件与非綫性特性的具体特性无关，只要属于某类函数就够了. 但是，非綫性特性的具体性質，对系統的稳定性显然有巨大影响，因此所得到的条件一般要苛刻一些；此外也不能給选择非綫性特性提供依据. 本文对含有分段綫性的非綫性元件的系統进行了研究，在所得到的全局稳定条件中包含有非綫性特性的参数. 此外，还研究了这种系統的大范围稳定問題，提出了求吸引区的方法. 最后，还考虑了一个品質問題，品質的指标是衰減度(稳定度).

一、系統的典型方程式

1. 非綫性元件的典型形式

为了研究方便起見，現将元件分为二类：第一类是分段綫性的連續函数（图 1)；第二类是分段綫性但有第一类不連續点的函数，且各段的斜率相等（图 3). 第一类元件和第二类元件又可分别簡化为图 2 的典型形式和图 4 的典型形式（后面将指明图 5 所示的元件亦可归为第二类). 其关系式为：

$$f(y_1) = k_1 y_1 + k_2 F(y_1).$$

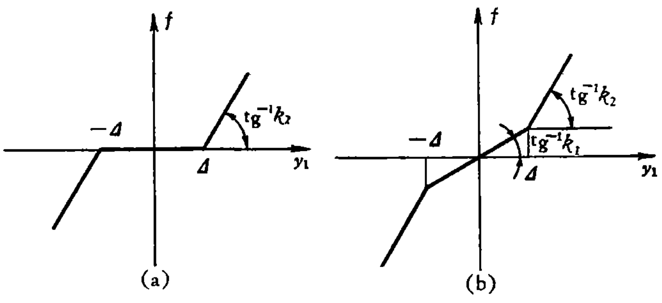


图 1.

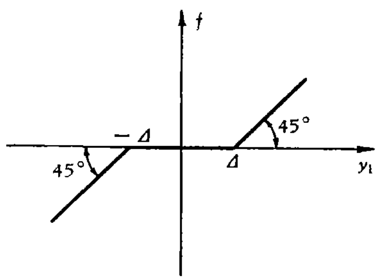


图 2.

1) 本文曾在 1962 年 12 月中国自动化学会学术报告会上宣讀.

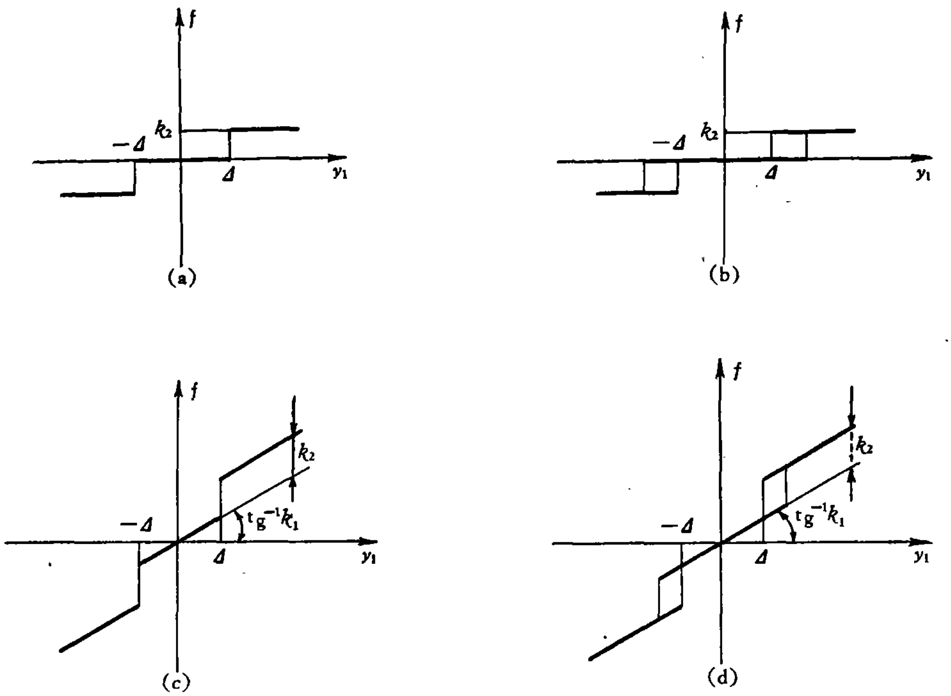

f
k_2
$-\Delta$
Δ
y_1
(a)
(b)
$\mathrm{tg}^{-1}k_1$
(c)
(d)

图 3.

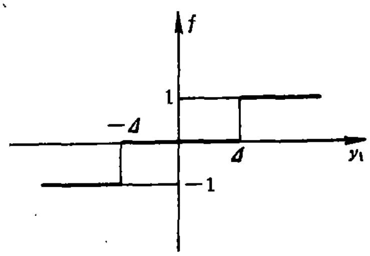

f
1
$-\Delta$
Δ
y_1
-1

图 4.

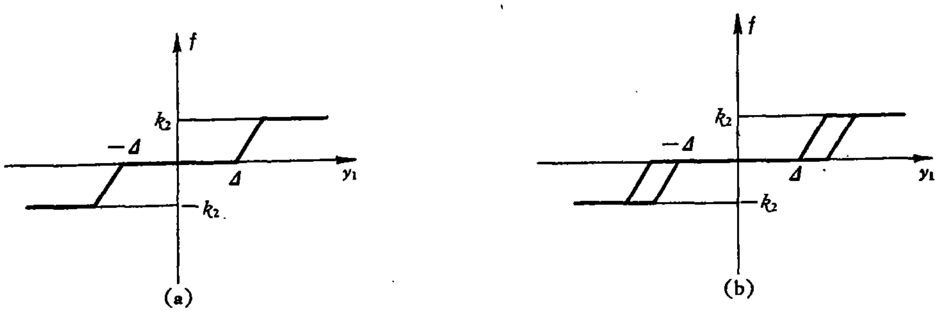
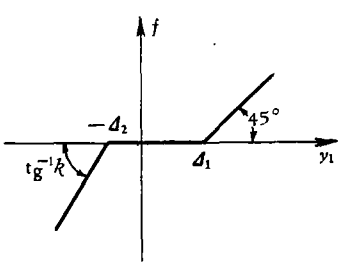
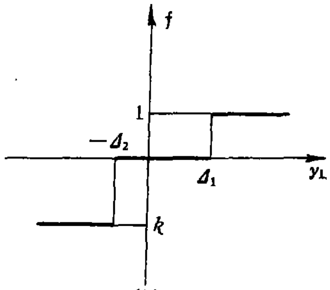

f
k_2
$-\Delta$
Δ
y_1
$-k_2$
(a)
(b)

图 5.



(a)



(b)

图 6.

同样地,非对称元件也可以归納为图6所示的二种类型.

2. 系統的典型微分方程式

假定系統只有一个非綫性控制机构,其微分方程为[1]:

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{k\alpha} x_\alpha + s_k f(\sigma), \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha x_\alpha. \tag{1}$$

将非綫性特性化为典型形式,則式(1)可写成:

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} a'_{k\alpha} x_\alpha + s'_k F(\sigma), \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha x_\alpha. \tag{2}$$

作非奇綫性变换(不失一般性,假定 $j_1 \neq 0$):

$$y_1 = \sum_{\alpha}^{n} j_\alpha x_\alpha, \ y_2 = x_2, \ y_3 = x_3, \ \cdots, \ y_n = x_n.$$

于是方程組(2)可变为:

$$\dot{y}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} y_\alpha + h_k F(y_1), \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

式中 $b_{k\alpha}$、h_k 与系統(1)的参数 $a_{k\alpha}$、s_k、j_α、k_1 及 k_2 有关.

这种形式的意义在于可以将相空間分成三个簡单的区域: $|y_1| < \Delta$, $y_1 > \Delta$ 及 $y_1 < -\Delta$; 在各个区域里,系統都是綫性的.

3. 系統的小范圍稳定性及平衡点的唯一性

作为系統全局稳定的必要条件是平衡点应唯一且漸近稳定,即原点是系統(1)的唯一漸近稳定奇点.

在原点附近,系統是綫性的,其漸近稳定性要求

$$\Delta(\lambda) = |b_{k\alpha} - \delta_{k\alpha}\lambda| = 0$$

的所有根均有負实部. 假定这个条件是滿足的,我們可得到一組古尔維茨条件.

对第一类系統来說,即含有第一类元件的系統,奇点唯一性要求

$$\sum_{a}^{n} b_{ka} y_a + h_k (y_1 - \Delta) = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

之解中的 y_1^* 满足条件 $y_1^* < \Delta$, 亦卽

$$y_1^* = \Delta \sum h_k d_{k1}/D < \Delta,$$

或写作：

$$\sum h_k d_{k1}/D < 1.$$

式中 $D = |b_{ka} + h_k \delta_{k1}|$, d_{k1} 为其相应代数余子式. 为使式(4)有解,还应要求 $D \neq 0$.

对第二类系統来説,奇点唯一性条件为:

$$\sum b_{ka} y_a + h_k = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

之解 $y_1^* < \Delta$, 卽

$$-\sum h_k^* d'_{k_1}/D' < \Delta,$$

式中 $D' = |b_{ka}| \neq 0$ (由奇点穩定条件), d'_{k_1} 为相应代数余子式.

今后将假定这些条件均已滿足,否則就沒有大范围穩定可言. 这个条件也給出一个参数的不等式.

二、关于全局穩定性

1. 具有一个第一类非綫性元件的系統的全局穩定性

由熟知的李亚普諾夫定理,任給一个 $W = -\sum_{i}^{n} y_i^2$, 可以唯一地确定一正定二次型 $V = \sum_{ij}^{n} A_{ij} y_i y_j$, 使得有:

$$\frac{dV}{dF} = \sum_{k}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k} \sum_{a}^{n} b_{ka} y_a = -\sum_{i}^{n} y_i^2.$$

以这样得到的 V 函数作为式(3)的 V 函数,将有:

$$\dot{V} = \sum \frac{\partial V}{\partial y_k} \left[\sum b_{ka} y_a + h_k F(y_1) \right],$$

或

$$\dot{V} = \begin{cases} -\sum y_i^2, & \text{当 } |y_1| < \Delta, \\ -\sum y_i^2 + \sum \dfrac{\partial V}{\partial y_k} [h_k (y_1 - \Delta)], & \text{当 } y_1 > \Delta, \\ -\sum y_i^2 + \sum \dfrac{\partial V}{\partial y_k} [h_k (y_1 + \Delta)], & \text{当 } y_1 < -\Delta. \end{cases} \tag{5}$$

全局穩定性要求 $\dot{V}$ 是負定的[4]. $\dfrac{\partial V}{\partial y_k}$ 是 y_i 的一次齐次式,只要 $\dot{V}$ 在 $y_1 > \Delta$ 区域里負定就够了,因在 $y_1 < -\Delta$ 区域里 $\dot{V}$ 同値.

$\dot{V}$ 在 $y_1 > \Delta$ 区域里負定的条件. $\dot{V} = 0$ 所决定的 $n-1$ 維曲面以 S 表示之,其方程式为:

$$\sum_i^n y_i^2 + 2(y_1 - \Delta)\sum_i^n l_i y_i = 0,$$

$$l_i = \sum_k^n h_k A_{ki}.$$

S 具有以下諸性質：(1)通过原点．(2) 不与 $y_1 = \Delta$ 相交，因为当 $y_1 = \Delta$ 时对任意的 $y_2, y_3, \cdots, y_n$ 均有 $-\sum_2^n y_i^2 - \Delta^2 \neq 0$．(3) S 是一 $(n-1)$ 維的二次曲面，如果 S 在 $y_1 > \Delta$ 区域里沒有分枝，那末在 $y_1 > \Delta$ 中 $\dot{V} < 0$ 恆成立．这可以从 $\dot{V}$ 在 $y_1 = \Delta$ 上恆負得到．于是全局稳定性可归結为 S 在 $y_1 > \Delta$ 无分枝的条件．因为 S 过原点，所以問題又可归結为 S 是单連通的条件．将 S 之方程写作：

$$\sum y_i^2 - 2y_1\sum l_i y_i + 2\Delta\sum l_i y_i = A(y, y) + 2l(y) = 0,$$

式中 $A(y, y)$ 表示二次型，$l(y)$ 表示一次型．S 的单連通性表示 S 不具有双曲性．此时当 $A(y, y)$ 化为正則型 $\sum_i^n \rho_i \bar{y}_i^2$ 时，所有 $\rho_i \geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）．ρ_i 为方程式

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} (1-2l_1-\rho) & -l_2 & \cdots\cdots & -l_n \\ -l_2 & (1-\rho) & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -l_n & 0 & & (1-\rho) \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

的根．条件 $\rho_i \geqslant 0$ 又等价于

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & l_n \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & l_2 \\ l_n \cdots & l_2 & 1-2l_1 \end{vmatrix} = (1-2l_1) - \sum_{i=2}^n l_i^2 \geqslant 0. \tag{7}$$

如果 S 是虛的，則 $\dot{V}$ 不改变符号，在 $y_1 > \Delta$ 中 $\dot{V} < 0$ 得到保証．条件(7)即是全局稳定的充分条件．

这个充分条件与 W 的給定有很大的关系，在参数空間給出的稳定区可能不大．如果取 $W = -\sum_i^n k_i y_i^2$, $k_i > 0$，变更 k_i 就可能扩大全局稳定区域．建立 V 函数当然是很繁的，可以采用文献[3]、[5]中的公式．

2. 具有一个第二类元件的系統的全局稳定性

此时与上一段方法一样，有：

$$\dot{V} = \sum_k^n \frac{\partial V}{\partial y_k}\left[\sum_a^n b_{ka} y_a + h_k F(y_1)\right],$$

或

$$\dot{V} = \begin{cases} -\sum_i^n y_i^2, & \text{当 } |y_1| < \Delta, \\ -\sum_i^n y_i^2 + 2\sum_{i=1}^n l_i y_i, & \text{当 } y_1 > \Delta, \end{cases} \tag{8}$$

$$\left| -\sum_{i}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} l_i y_i, \qquad \text{当 } y_1 < -\Delta, \right.$$

而且 S 的方程为：

$$-\sum_{i}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i}^{n} l_i y_i = 0.$$

S 是一个 $n-1$ 維球面．全局稳定要求它位于 $y_1<\Delta$ 区域里(图 7)，即满足条件：

$$l_1 + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} l_i^2} < \Delta. \tag{9}$$

如果取 $W = -\sum k_i y_i^2$, $k_i > 0$，則条件(9)取形式：

$$l_1 + \sqrt{k_1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{l_i}{k_i}\right)^2} < k_1 \Delta. \tag{10}$$

式(10)中的 l_i 还是与 k_i 有关的．对任一組 k_i，式(10)在参数空間給出一个稳定区(可能是空集)．变更 k_i 得到的所有区域的包絡即是用这种形式的 V 函数可能求得的最大稳定区域．

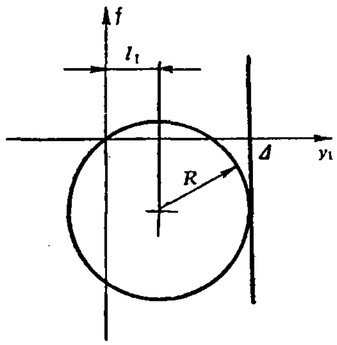


图 7.

对具有图 5 所示的元件的系統，亦可以归結为本节的情况．因为

$$\dot V = -\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k} F(y_1).$$

只要当 $F(y_1)=1$ 时，$\dot V$ 負定；又因为 $F(y_1)=0$ 时 $\dot V$ 負定，所以足以保証 $0 \leqslant F(y_1) \leqslant 1$ 时，$\dot V$ 負定．故全局稳定条件与式(9)或(10)相同，当然这种条件較严格一些．

3. 有几个非綫性控制机构的情况

不难将上述方法推广到具有 m 个控制机构的系統上去．假定 $m=2$．系統的微分方程为：

$$\dot x_k = \sum_{\alpha}^{n} a_{k\alpha} x_\alpha + h'_{k_1} F_1(\sigma_1) + h'_{k_2} F_2(\sigma_2), \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\sigma_1 = \sum_{\alpha}^{n} j_{1\alpha} x_\alpha, \ \sigma_2 = \sum_{\alpha}^{n} j_{2\alpha} x_\alpha.$$

假定 $\|j_{s\alpha}\|$, $(s = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, \cdots, n)$ 之秩为 2．不失一般性令 $|j_{s\alpha}| \neq 0$, $(s, \alpha = 1, 2)$，并作变换：

$$y_1 = \sum j_{1\alpha} x_\alpha, \ y_2 = \sum j_{2\alpha} x_\alpha, \ y_3 = x_3, \ y_4 = x_4, \cdots, y_n = x_n,$$

得典型方程

$$\dot y_k = \sum_{\alpha}^{n} b_{k\alpha} y_\alpha + h_{k_1} F_1(y_1) + h_{k_2} F_2(y_2). \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

将相空間分成几区，在 $y_1 y_2$ 平面上表示如图 8．然后分别研究各区中 $\dot V$ 負定的条件．原点稳定及平衡点唯一性仍是必要条件，假定均已满足，这些条件是不难求得的．如 F_1 属于第一类，F_2 属于第二类，則：

$$\dot{V}=\begin{cases}-\sum y_i^2, & \text{当 } |y_1|<\Delta_1,\ |y_2|<\Delta_2,\\ -\sum y_i^2+\sum \dfrac{\partial V}{\partial y_k}h_{k_1}(y_1-\Delta_1), & \text{当 } y_1>\Delta_1,\ |y_2|<\Delta_2,\\ -\sum y_i^2+\sum h_{k_2}\dfrac{\partial V}{\partial y_k}, & \text{当 } |y_1|<\Delta_1,\ y_2>\Delta_2,\\ -\sum y_i^2+\sum \dfrac{\partial V}{\partial y_k}h_{k_1}(y_1-\Delta_1)+\sum \dfrac{\partial V}{\partial y_k}h_{k_2}, & \text{当 } y_1>\Delta_1,\ y_2>\Delta_2,\\ -\sum y_i^2+\sum \dfrac{\partial V}{\partial y_k}h_{k_1}(y_1-\Delta_1)-\sum \dfrac{\partial V}{\partial y_k}h_{k_2}, & \text{当 } y_1>\Delta_1,\ y_2<\Delta_2.\end{cases}$$

由于对称性,其他几区沒有必要再进行分析. 在第 II 区里, $\dot{V}$ 及稳定条件分别为

$$\dot{V}=-\sum y_i^2+2(y_1-\Delta_1)\sum l_i'y_i,\ l_i'=\sum h_{k_1}A_{ki};$$

$$(1-2l_1')-\sum_{i=2}^{n}(l_i')^2\geqslant 0. \tag{12}$$

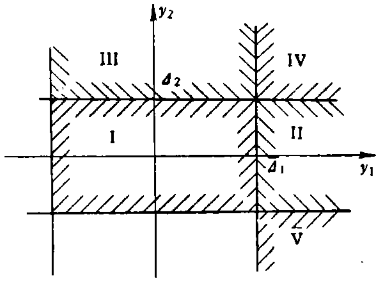


图 8.

在第 III 区里,

$$\dot{V}=-\sum y_i^2+2\sum l_i^2y_i,$$

$$l_i^2=\sum h_{k_2}A_{ki};$$

$$l_2^2+\sqrt{\sum (l_i^2)^2}<\Delta_2. \tag{13}$$

在 IV 区里,

$$\dot{V}=-\sum y_i^2+2(y_1-\Delta_1)\sum l_i'y_i+2\sum l_i^2y_i.$$

$\dot{V}$ 恆負条件仍为条件(12), 第 V 区中亦然. 于是得全局稳定充分条件为(12)及(13).

对 $m>2$ 的情况,可列表分区进行同样的分析.

三、关于大范围稳定問題

如果全局稳定条件不能給出合理的参数値,就可以只要求系統大范围稳定. 这时只要有足够大的吸引区即可保証系統的工作. 本节討論了求充分性的吸引区問題.

1. 具有第一类元件的系統

考慮系統(3),如果式(6) $\Delta(\rho)=0$ 的根不同号,則 S

$$-\sum y_i^2+2y_1\sum l_iy_i-2\Delta\sum l_iy_i=0$$

是双曲型的,它有一枝过原点位于 $y_1<\Delta$ 区域; 另一枝則位于 $y_1>\Delta$ 区域(图 9). 这时和 S 相切的那个 $V=C=V(y^*)$——$(n-1)$ 維橢球就給出了充分性的吸引区. 其中 y^* 表示切点,它的座标是下列方程組的解:

$$-\sum y_i^2+2(y_1-\Delta)\sum l_iy_i=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left[-\sum y_i^2+2(y_1-\Delta)\sum l_iy_i\right]=s\frac{\partial}{\partial y_k}\sum A_{ij}y_iy_j.\ (k=1,2,\cdots,n)$$

于是吸引区为：

$$\sum A_{ij}y_iy_i \leqslant \sum A_{ij}y_i^*y_j^* = C^*.$$

2. 具有第二类元件的系統

此时，S 的方程式为：

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} l_iy_i = 0,\quad y_1 > \Delta.$$

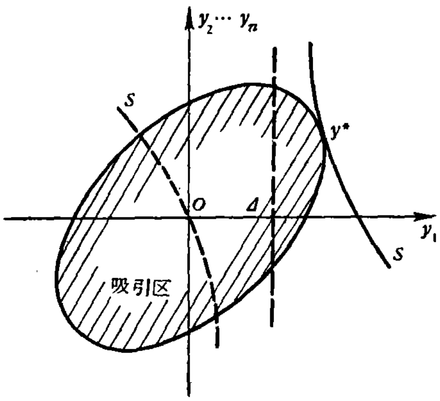


图 9.

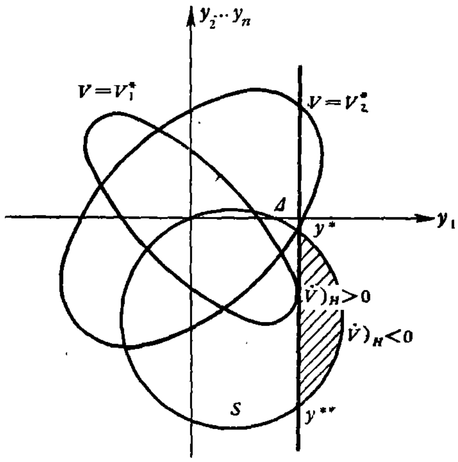


图 10.

如果 S 与 $y_1 = \Delta$ 不相交，則全局稳定；如果 S 与 $y_1 = \Delta$ 相交，则得出一 $(n-2)$ 維的球面

$$-\sum_{i=2}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=2}^{n} l_iy_i - \Delta^2 + 2l_1\Delta = 0. \tag{14}$$

在图 10 中它表示为一个綫段 y^*y^{**}. 和这个 $(n-2)$ 維球相切的那个 $V = C$ 所围成的椭球区便給出充分性的吸引区，在图 10 上表示为 $V = V_1^*$（或 $V = V_2^*$）. 切点座标是式(14)和下列方程組的解：

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left[-\sum_{2}^{n} y_i^2 + 2\sum_{2}^{n} l_iy_i - \Delta^2 + l_1\Delta\right] = S\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\sum_{ij}^{n} A_{ij}y_iy_i\right]_{y_1=\Delta}.$$

$$(k = 2, 3, \cdots, n)$$

为了扩大吸引区，可取 $W = -\sum_{i}^{n} k_iy_i^2$, $k_i>0$. k_i 作为引吸区边界方程的参数. 求出包絡即是这种形式的 V 函数得到的最大充分吸引区.

对于有 m 个非綫性控制机构的系統也可按类似方法进行.

四、品 質 問 題

非綫性系統的品質問題，目前研究得还很少. 在这里我們研究具有一定衰減度（即稳定度）的全局稳定条件.

对系統(3)作变换:

$$z_k = y_k e^{\lambda t},\ \lambda > 0,\ (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{15}$$

得一非定常系統:

$$\dot{z}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} (b_{k\alpha} + \lambda\delta_{k\alpha}) z_\alpha + h_k F(z_1, t). \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{16}$$

对第一类元件来說:

$$F(z_1, t) = \begin{cases} (z_1 - \Delta e^{\lambda t}), & \text{当 } z_1 > \Delta e^{\lambda t}, \\ 0, & \text{当 } |z_1| < \Delta e^{\lambda t}, \\ (z_1 + \Delta e^{\lambda t}), & \text{当 } z_1 < -\Delta e^{\lambda t}. \end{cases} \tag{17}$$

对第二类元件来說:

$$F(z_1, t) = \begin{cases} e^{\lambda t}, & \text{当 } z_1 > \Delta e^{\lambda t}, \\ 0, & \text{当 } |z_1| < \Delta e^{\lambda t}, \\ -e^{\lambda t}, & \text{当 } z_1 < -\Delta e^{\lambda t}. \end{cases} \tag{18}$$

变换表明,如果式(16)的解 $z_k(t)$ 为漸近稳定时,則式(3)的解 $y_k(t)$ 至少应具有衰減度 λ.

对系統(16),考慮到(17)或(18)可以根据类似于第二节的步驟进行研究,此时,相空間分区的界面是一个向外飄移的超平面 $y_1 = +\Delta e^{\lambda t}$.

很明显,小范围稳定条件仍是一个必要条件,它要求

$$D(\mu) = |b_{ij} + \delta_{ij}(\lambda - \mu)| = 0$$

的所有根 μ_i 具有負实部. 此外全局稳定条件形式并不改变,仍为(7)或(12),当然这是对系統(16)而言的. 如果取 $W = -\sum k_i z_i^2$, 也有相应的結果. 这些結果可以很容易地直接推算出.

五、举　　例

例 1. 研究以下二阶系統:

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -x - y + hF(y),$$

$$F(y) = \begin{cases} y - \Delta, & \text{当 } y > \Delta, \\ 0, & \text{当 } |y| < 0, \\ y + \Delta, & \text{当 } y < -\Delta. \end{cases}$$

平衡点的唯一性要求 $h > -1$, 假定它已滿足. 取 $W = x^2 + ky^2$, 計算后得 V 及 S 之方程为:

$$V = \frac{1}{2}[(2 - k)x^2 + 2xy + (1 + k)y^2],$$

$$-(x^2 + ky^2) + h(y - \Delta)[x + (1 + k)y] = 0.$$

現在討論三种情况.

1. $-1 < h < 0$. 此时 S 为一椭圓, 所以系統是全局稳定的, 这和精确結果是一致的.

2. $0 < h < 1$. 先考慮一具体系統. 如令 $h = \frac{3}{4}$, 并取 $W = x^2 + y^2$,則 S 是一双曲

綫，吸引区是一椭圓围成的区域．但是如果取 $W = x^2 + ky^2$，則变更 k，可以直接由二次方程的判別式看出 S 可以是双曲綫，也可以是椭圓．故可断言系統是全局稳定的．这样，我們便可把一个长短半径約为 5 及 2 的椭圓围成的吸引区扩大到整个相平面．这也与精确結果完全吻合．

3. $1 < h$．这时 S 是双曲綫．对一具体系統，$h = 2$，$\Delta = 1$，如果取 $W = x^2 + y^2$，則吸引区为：

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 < 4.$$

但是如果取 $W = x^2 + ky^2$，則可以得到最大吸引区为

$$x^2 + y^2 < 4.$$

二者均表示在图 11 上．

精确分析表明，此时系統有极限环，最大吸引区和极限环十分接近．

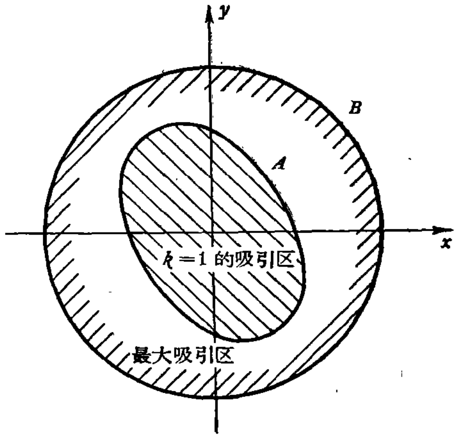


图 11.

例 2. 研究一二阶的直接調节系統[1]：

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + f(\sigma),$$
$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + f(\sigma),$$
$$\sigma = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2.$$

如果要求系統具有絕对稳定性，即 $f(\sigma)$ 除了满足 $\sigma f(\sigma) > 0$ 及 $f(0) = 0$ 外，可具有任意形状，則絕对稳定条件为：

$$-\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 < 0,$$
$$\lambda_2\gamma_1 + \lambda_1\gamma_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)\gamma_1 - \lambda_1\gamma > 0.$$

在参数空間 γ 及 γ_1 平面上，絕对稳定区为折綫 I-I 所围之影区（图 12）．

現在假定非綫性元件特性是有飽和区的，它可化为第一种典型（图 2）．按二节中的方法处理之，取 $\lambda_1 = -1$、$\lambda_2 = -2$，則有：

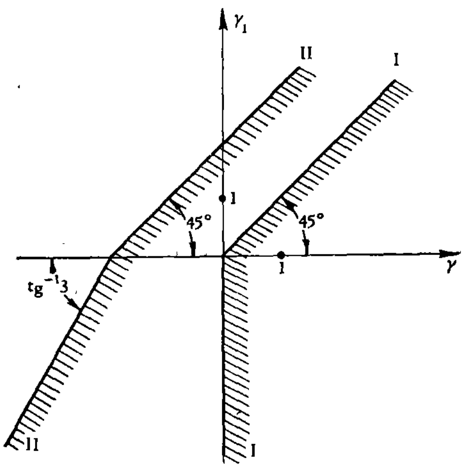


图 12.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + f(\sigma),$$
$$\dot{\sigma} = \gamma_1 x_1 - 2\sigma - \gamma f(\sigma),$$
$$-W = kx_1^2 + 6\sigma^2,$$
$$2V = (k + \gamma_1^2)x_1^2 + 2\gamma_1 x\sigma + 3\sigma^2,$$

式中 $k > 0$ 为任意常数．大范围稳定条件 (7) 为：

$$k^2 + \gamma_1^4 + \gamma^2\gamma_1^2 - 2\gamma\gamma_1^2 + 2k(\gamma_1^2 - \\ - \gamma_1\gamma + 2\gamma_1 - 6\gamma - 12) \leqslant 0. \quad (19)$$

上式中取等号得一族曲綫，k 为参数．对任一 k 得一条曲綫，它所围之区域即参数平面 γ 及 γ_1 上的一个全局稳定区．求此曲綫族的包絡，对 k 求偏导数得：

$$k = \gamma\gamma_1 - \gamma_1^2 - 2\gamma_1 + 6\gamma + 12.$$

代入上式，經过簡化得包絡方程式为：

$$(\gamma_1+3)(\gamma-\gamma_1+2)(3\gamma-\gamma_1+6)=0.$$

在参数平面上取点按大范围稳定条件(19)检驗，可得到全局稳定区为折綫 II-II 所围之影区．显然，它包含着絕对稳定区．从这里可看出絕对稳定条件是較苛刻的．

例 3. 研究二阶系統：

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(x+k\dot{x}).$$

f 之图形如图 1b 所示． 系統共含有六个参数：a、b、k、k_1、k_2 及 Δ． 研究参数对全局稳定性的影响．作变换：

$$x=\frac{\Delta}{k(a-kk_1)}y,\quad t=\frac{1}{a-kk_1}\tau.$$

由原点是漸近稳定条件 $b>k_1$, $a>kk_1$，可知上变换中的系数都是正的．引入記号：

$$d=\frac{b-k_1}{(a-kk_1)^2}>0,\ K=\frac{k(k_2-k_1)}{a-kk_1},\quad s=\frac{1}{k(a-kk_1)},$$

得变换后的方程为：

$$y''+y'+dy=K\varphi(y'+sy),$$

式中撇号表示 $\frac{d}{d\tau}$，φ 为第一类典型元件（图 2）． 这时系統仅含有三个参数：d、K 及 s．化为典型形式：

$$\begin{cases} y'=-sy+z, \\ z'=(-s^2+s-d)y'+(s-1)z+K\varphi(z), \end{cases}$$

$$z=y'+sy.$$

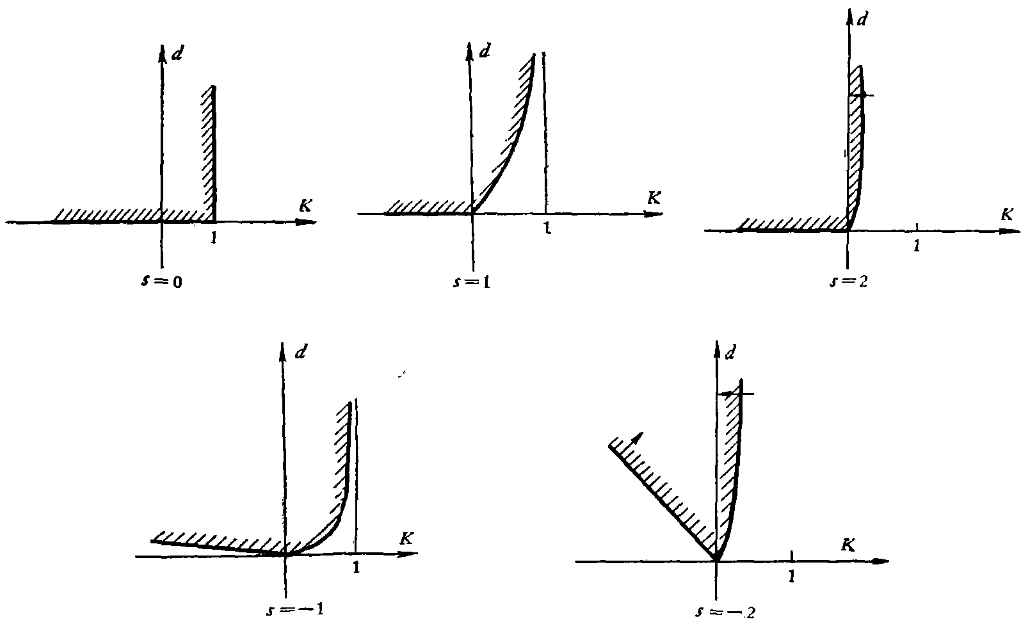


图 13.

小范围稳定条件为 $d > 0$，它已在前面指出了．奇点唯一条件为 $\frac{Ks}{Ks-d} < 1$．取 $W = -(y^2 + kz^2)$，$k > 0$，可得全局稳定条件：

$$(-ks^3 + ks^2 - ksd - s + 1)^2K^2 + (4ks^2d + 4kd^2 + 4d)K - 4kd^2 < 0.$$

在参数 Ksd 空間作出的全局稳定区如图 13 所示(考虑奇点唯一的限制条件).

六、結　　論

在研究非綫性系統的稳定性时，对非綫性特性建立分段綫性的模型，可以用 V 函数方法来研究系統的全局稳定性及大范围稳定的吸引区的寻求問題．在所得到的結果中包含有非綫性特性的参数．

利用变更 W 的方法，可以改善稳定条件及扩大吸引区．

对这种非綫性系統的品質(衰減度)的研究表明，处理方法完全一样，結果的形式也不变．

当非綫性特性有非单值区及为非对称，以及有几个控制机构时，都可以同样地处理．非綫性特性可以是任意型的，只要求 $f'(\sigma)$ 在原点存在．

参　考　文　献

[1] Лурье, А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.

[2] Летов, А. М., Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, Москва, 1955 (非綫性調节系統的稳定性，李惠譯，科学出版社，1959).

[3] Бедельбаев, А. К., Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования, Изд. АН КазССР, 1960.

[4] Барбашин, Е. А., Красовский, Н. Н., Об устойчивости движения в целом, *Докл. АН СССР*, **76** (1952), № 3.

[5] 蔡遂林，常系数綫性微分方程的李亚普諾夫函数公式，数学学报，1959 年，第 9 卷，第 4 期.

PROBLEMS CONCERNING THE STABILITY OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

KAO WEI-BIN

The problems of stability in the whole, stability in the large with its attracting region, and the quality problem of nonlinear control systems are studied by the Lyapunov's method. The functional relation of the nonlinear element is assumed to be piece-wise linear, continuous or not, and may possess two-valued intervals, but is linear at the origin. Thus the whole phase space can be divided into three simple regions in each of which the differential equations of the system are essentially linear. As a result the stability conditions contain also parameters of the nonlinearities.