

多变量线性系统并联校正装置的一种综合方法*

鄧聚龍

摘要

本文给出线性多变量控制系统的一种分析设计方法,将预期特性和实际特性之差视为理想的内部反馈,引入并联校正装置补偿它对系统的有害影响。

不同于通常的频率法或根轨迹法,这种方法不用图解,直接对系统的参数及结构进行分析计算,因而准确性较高,对多变量多回路系统应用比较方便。

在国产 T615K 重型镗床进给系统上进行试验,结果表明用本文的方法综合校正装置是有效的。

一、问题的提出

目前多变量系统的综合,引起了人们的注意,涂序彦曾提出相互协调系统,并对这种系统的综合进行了研究^[2],其他人则研究了按不变性条件、“自治”条件的综合^[1,3,4,5]。

人们一般重视研究用串联环节改善系统的品质,但从工程实践来看,采用并联校正往往更为有利。本文现从并联校正着眼,讨论综合问题。

二、结构的标准形式

为了认识线性系统结构的个性和共性以及结构变换的内在联系,我们规定一种标准的结构图,并用数学形式来表征这种结构图(如图1所示)。在图1中, $y_i(i=1, 2, \dots, n)$ 为被控量, $x_i(i=1, 2, \dots, n)$ 为控制量, $\epsilon_i(i=1, 2, \dots, n)$ 为误差量。从 ϵ_i 到 y_i 为“主通道”,从 y_i 到 z_i 为“反馈通道”。 a_{ii} 为 ϵ_i 到 y_i 的传递函数,或称“主通道”自控函数。 b_{ii} 为 y_i 到 z_i 的传递函数,或称“反馈通道”自控函数。相应地, a_{ij} 及 b_{ij} 可称互控函数。

据图1,对主通道有

$$y_i = a_{i1}\epsilon_1 + a_{i2}\epsilon_2 + \dots + a_{in}\epsilon_n; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1a)$$

而对反馈通道,则有

$$z_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \dots + b_{in}y_n, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1b)$$

$$\epsilon_i = x_i \pm z_i. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1c)$$

将以上各式作适当处理,得

$$A^{-1}\bar{y} = \bar{x} \pm B\bar{y}. \quad (2)$$

* 本文于1963年11月4日收到。

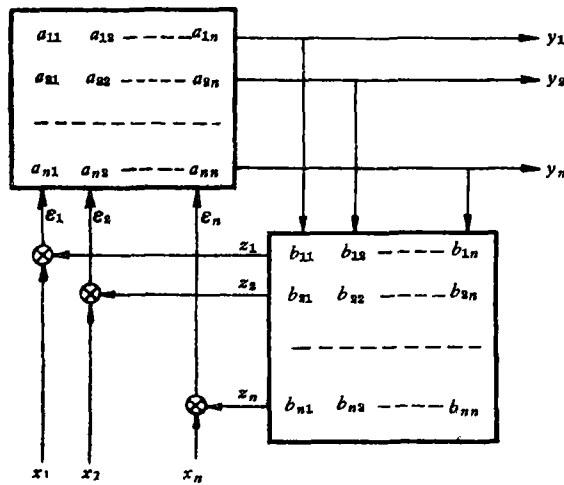


图 1

式(2)为标准结构图的一种数学形式。我們規定式(2)为标准式,并称为结构范式。上式中

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

我們对式(2)的理解是: \bar{x} 为控制向量, \bar{y} 为被控向量, A^{-1} 为主传递函数逆方阵, $\pm B\bar{y}$ 为反馈项。对校正前的系统来说, $\pm B\bar{y}$ 为虚内反馈项, 而对校正后的系统来说, $\pm B\bar{y}$ 为校正反馈项。反馈项前面的负号表示负反馈, 正号表示正反馈。

单变量系统的结构范式为

$$\frac{1}{a(p)} y(p) = x(p) + b(p)y(p). \quad (2')$$

通过结构范式, 可对系统作等价变换。例如图 2a 的系统, 其虚内反馈为零的结构范式:

$$\begin{bmatrix} 1+p & 1+p \\ 1 & 1+p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

对方阵中的元素作适当的移项, 得

$$\begin{bmatrix} 1+p & 1 \\ -2 & 1+p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

而

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1+p & 1 \\ -2 & 1+p \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1+p}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ \frac{2}{\Delta} & \frac{1+p}{\Delta} \end{bmatrix}, \quad \Delta = p^2 + 2p + 3.$$

对应于式(4),具有虚内反馈 $\begin{bmatrix} 0 & p \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 的结构图如图 2b 所示。由于式(4)和式(3)等价,故图 2a 与图 2b 等价。同理,通过结构范式,也可将图 2c 转化为主传递函数方阵与

图 2b 相同而虚内反馈为 $-\begin{bmatrix} -(1+2p) & -1 + \frac{p}{2} \\ 4p + b & -\frac{5}{2}p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 的系统(见图 2d)。

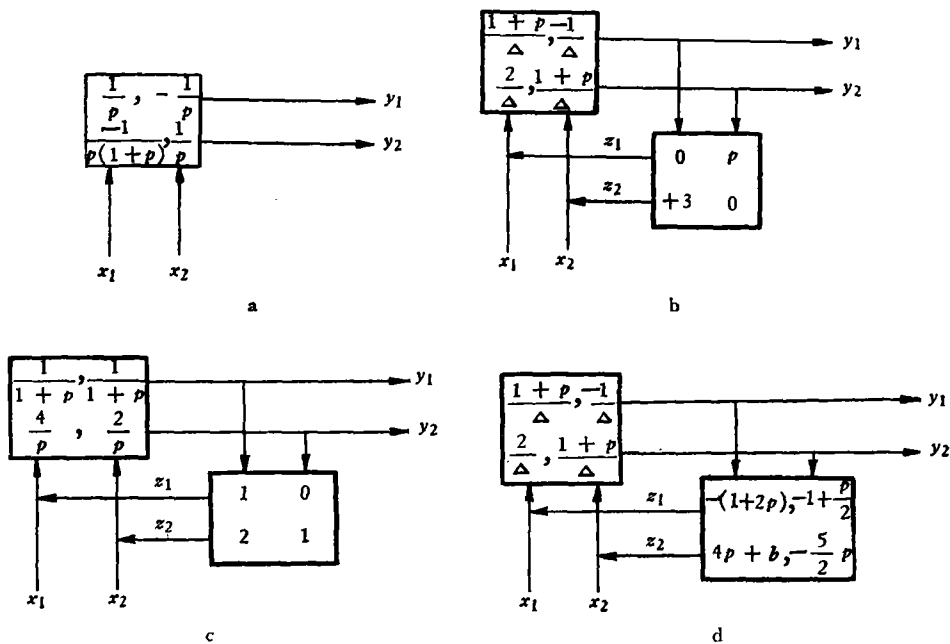


图 2

三、两种典型变换

第一种变换 这是一种说明反馈环节对动态特性影响的变换-综合方法的机理。设校正前的系统具有结构范式:

$$G^{-1}\bar{y} = \bar{x}. \tag{5}$$

由于行列式 $|G^{-1}|$ 的展开式即是系统的特征多项式,故改变主传递函数逆方阵 G^{-1} , 就可改变系统的动态特性。设希望方阵为 $G_{\text{新}}^{-1}$, 而方阵 $G_{\text{新}}^{-1}$ 与方阵 G^{-1} 的差阵为 Q , 则有

$$Q = G_{\text{新}}^{-1} - G^{-1}. \tag{6}$$

将上式代入式(5),并作适当的处理,便得

$$G_{\text{新}}^{-1} \cdot \bar{y} = \bar{x} + Q\bar{y}. \tag{7}$$

式(7)說明, 原系統总可被看作是由希望部分 $G_{\text{望}}^{-1} \cdot \bar{y}$ 和多余部分 $Q\bar{y}$ 两部分組成。多余部分是以反饋的形式附加在希望部分上(見圖3), 它是引起动态品質惡化的虛內反饋。故只要引入形式与多余部分相同而符号相反的实外反饋, 以消除虛內反饋, 就可使系統得到預期的品質。

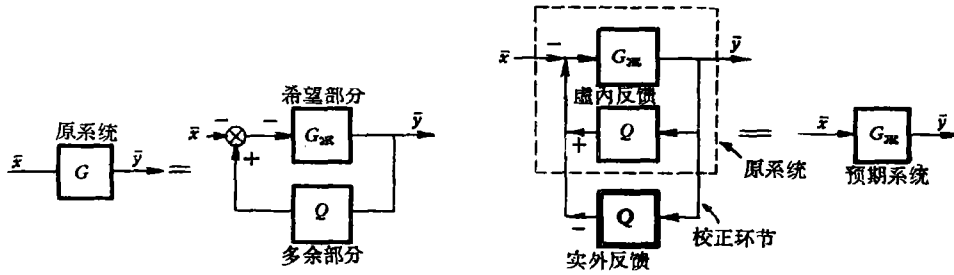


图 3

图 4

如果我們向原系統加入一个具有传递函数方陣为 $-Q$ 的反饋环节, 这就意味着在原系統結構范式的右方增加一个新項 $-Q\bar{y}$ 。加入此新項后的結構范式(見圖4)为

$$\underbrace{G_{\text{望}}^{-1}\bar{y}}_{\text{原系統}} = \bar{x} + \underbrace{Q\bar{y}}_{\text{实外反饋}} - \underbrace{Q\bar{y}}_{\text{校正后的系統}}, \quad \underbrace{G_{\text{望}}^{-1}\bar{y}}_{\text{校正后的系統}} = \bar{x}$$

事实上, 差方陣 Q 即是校正方陣。 Q 取“+”号时, 要求加入負的实外反饋; Q 取“-”号时, 則要求加入正的实外反饋。改变系統动态特性的变换, 即称为第一种变换, 它同样适合于单变量系統。

第二种变换 一种表示动态特性不变的变换, 設有系統

$$G^{-1}\bar{y} = \bar{x} - B\bar{y} \tag{8}$$

对上式以方陣 D 左乘, 并作适当的处理, 便得

$$(GD^{-1})^{-1}\bar{y} = D\bar{x} - D \cdot B\bar{y} \tag{9a}$$

上述变换表明: 主通道以 D^{-1} 后乘(从能量传递方向)而反饋通道和反饋圈外靠近輸入端以 D 前乘, 特性不变(見圖 5a)。如果原来的系統如图 5b 所示, 并令 $G^{-1} = G_r^{-1} \cdot D^{-1}$, 則其結構式可以是

$$G^{-1} \cdot \bar{y} = \bar{x} - B \cdot \bar{y}$$

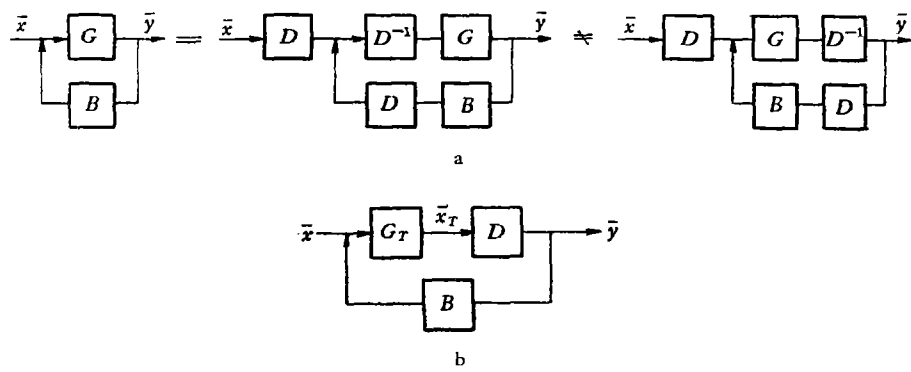


图 5

由于 $\bar{y} = D \cdot \bar{x}_T$, 故图 5b 的结构式也可以是

$$G^{-1} \cdot \bar{y} = \bar{x} - (B \cdot D) \cdot \bar{x}_T. \quad (9b)$$

上述式(9a)和(9b)的变换即是第二种变换, 它适合于单变量系统, 但单变量系统不受“前乘”或“后乘”的限制。在校正网络的实现方面往往要用到这种变换。

四、并联校正与串联校正的关系

现要求将图 6a 所示系统校正成为图 6d。当采用串联校正(见图 6b)时, 其结构为:

$$[(G_0 F)^{-1} + I] \bar{y} = \bar{x};$$

而当采用并联校正(见图 6c)时, 则其结构为:

$$[G_0^{-1} + (I + B)] \bar{y} = \bar{x}.$$

现在要求

$$[(G_0 F)^{-1} + I] = G_{\text{串}}^{-1} = [G_0^{-1} + (I + B)], \quad (10)$$

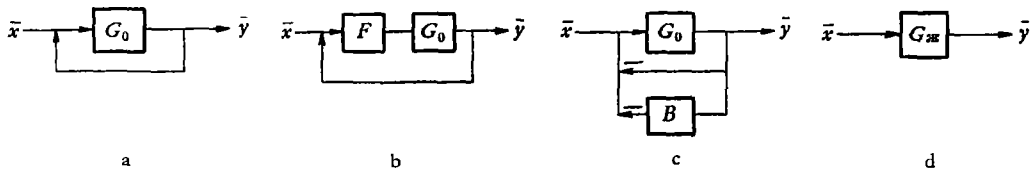


图 6

则不难求出并联校正与串联校正的关系式为:

$$F^{-1} = I + B \cdot G_0. \quad (11)$$

从式(10)还可得到

$$B = G_{\text{串}}^{-1} - G_0^{-1} - I. \quad (12)$$

式(12)虽然同样表示校正反馈, 但在形式上却不同于式(6), 这是由于这里的 G_0^{-1} 表示开环逆阵, 而式(6)中的 G^{-1} 则表示闭环逆阵。

设被校正部分的开环方阵 G_0 及希望逆阵 $G_{\text{串}}^{-1}$ 为:

$$G_0 = \begin{bmatrix} \frac{k_{22}}{a_{11}p + a_2} & \frac{k_{12}}{a_{11}p + a_2} \\ -\frac{k_{21}}{a_{11}p + a_2} & \frac{1 + T_1 p}{a_{11}p + a_2} \end{bmatrix}, \quad G_{\text{串}}^{-1} = \begin{bmatrix} (1 + T_1 p) & 0 \\ 0 & (1 + T_1 p) \end{bmatrix},$$

上式中 $a_1 = k_{22}T_1$, $a_2 = k_{22} + k_{12}k_{21}$. 不难求出:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & k_{12} \\ -k_{21} & T_1 p - k_{22} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1 + T_1 p}{\Delta'} & -\frac{k_{12}}{\Delta'} \\ \frac{k_{21}}{\Delta'} & \frac{k_{22}}{\Delta'} \end{bmatrix},$$

$$\Delta' = T_1 p [k_{22}(1 + T_1 p) + k_{12}k_{21}].$$

五、“自治”系统的综合

我们将闭环方阵对角线化的系统称为“自治”系统。下面讨论的不是用串联校正^[3,5]而是用并联校正来综合此种系统, 并讨论并联校正与串联校正的关系。

設校正对象的开环逆陣 G_0^{-1} 及希望閉环逆陣 $G_{\text{冀}}^{-1}$ 分别为

$$G_0^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \frac{1}{|A|},$$

$$G_{\text{冀}}^{-1} = \begin{bmatrix} g_{11}^{-1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & g_{nn}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \left(g_{ii}^{-1} = \frac{1}{g_{ii}} \right)$$

令并联校正方陣 B 中的元素为 b_{ij} , 并用上述矩陣代入式(12), 于是可得

$$b_{ij} = -\frac{A_{ji}}{|A|}, \quad b_{ii} = g_{ii}^{-1} - \frac{A_{ii}}{|A|} - 1. \quad (13)$$

如将式(13)代入式(11)并考虑到

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{ki} = |A|, \quad \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{ki} = 0$$

(上式中 a_{ki} 、 a_{kj} 为方陣 G_0 的元素), 則得 F^{-1} 中的元素 V_{ij} 为

$$V_{ii} = a_{ii}(g_{ii}^{-1} - 1), \quad V_{ij} = a_{ij}(g_{ii}^{-1} - 1). \quad (14)$$

按矩陣运算并作适当的处理, 可得 F 的元素 f_{ij} 为:

$$f_{ii} = \frac{A_{ii}}{|A|} \frac{g_{ii}}{1 - g_{ii}}, \quad f_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|} \frac{g_{jj}}{1 - g_{jj}}. \quad (15)$$

在形式上, 式(15)与文献[3]中的結果不同, 这是由于这里的預期方陣 $G_{\text{冀}}$ 是閉环方陣, 而文献[3]中的預期方陣 S 則是开环方陣. 其实只要考虑到

$$\text{矩陣 } S = (G_{\text{冀}}^{-1} - 1)^{-1}, \quad \text{元素 } s_{ii} = \frac{1}{g_{ii}^{-1} - 1},$$

并代入式(15)后, 便得到

$$f_{ii} = \frac{A_{ii}}{|A|} s_{ii}, \quad f_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|} s_{jj}. \quad (16)$$

显然, 式(16)与文献[3]中的結果吻合.

六、单变量系統綜合示例

設被校正部分(图 7a)的閉环传递函数为:

$$\Phi(p) = \frac{100}{0.05p^3 + 0.65p^2 + 1.6p + 101},$$

希望閉环传递函数为:

$$\Phi_{\text{冀}}(p) = \frac{100}{0.05p^3 + 0.65p^2 + 9.6p + 101}.$$

据式(6)得知校正传递函数 Q 为:

$$Q(p) = \frac{1}{\Phi_{\text{冀}}(p)} - \frac{1}{\Phi(p)} = \frac{8}{100} p = 0.08p$$

校正过程結構图如图 7c 及 7d 所示.

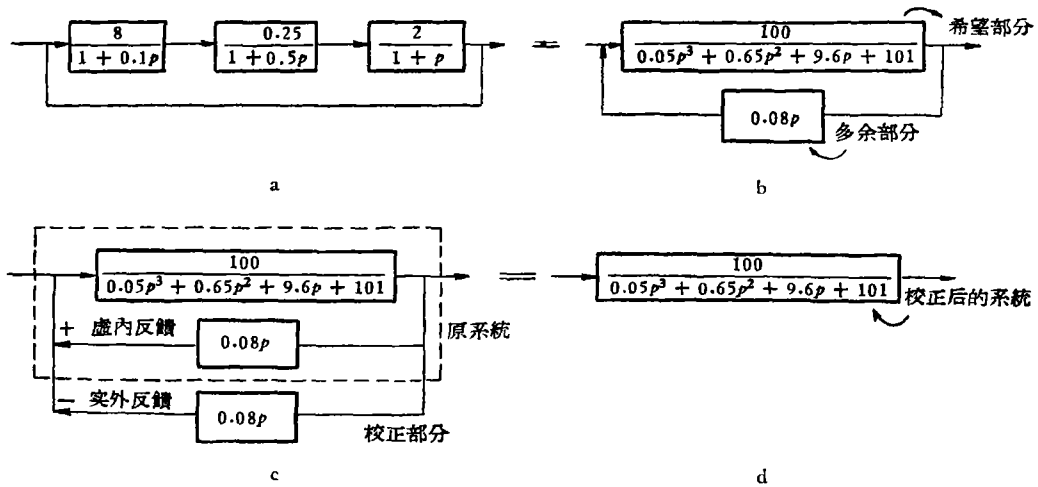


图 7

为使“0.08p”环节能用无源网络等值实现, 现用第二种变换来处理系统。据图 8a 可知其结构式为

$$\frac{(1 + 0.1p)(1 + 0.5p)(1 + p)}{8 \times 0.25 \times 2} y(p) = x(p) - (1 + 0.08p)y(p).$$

上式两边乘以“ $\frac{8}{1 + 0.1p}$ ”, 则得

$$\frac{(1 + p)(1 + 0.5p)}{0.25 \times 2} y(p) = \frac{8}{1 + 0.1p} x(p) - \frac{0.64p}{1 + 0.1p} y(p) - \frac{8}{1 + 0.1p} y(p).$$

上式的结构如图 8b (与图 8c 等价) 所示。从图 8c 可知, 要求加入的校正环节实际上是

$$Q'(p) = \frac{0.64p}{1 + 0.1p}. \text{ 显然, } Q'(p) \text{ 可用无源网络实现.}$$

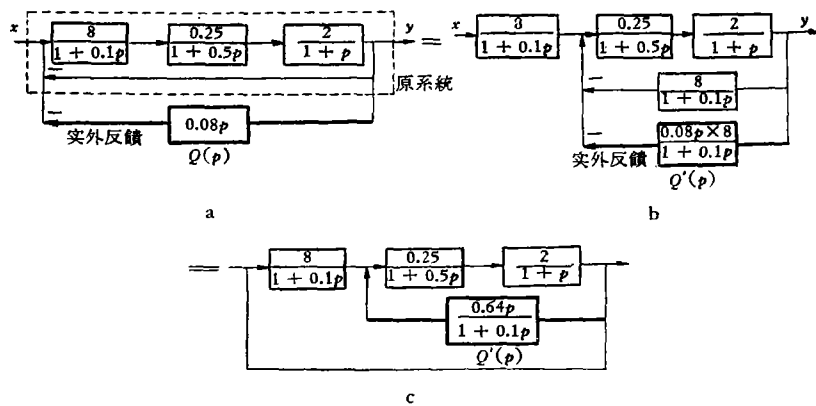


图 8

七、多变量系统综合

图 9a 中的电机 M_1 和 M_2 接协调原理^[2]组成同步旋转系统, 图 9b 为其结构图。

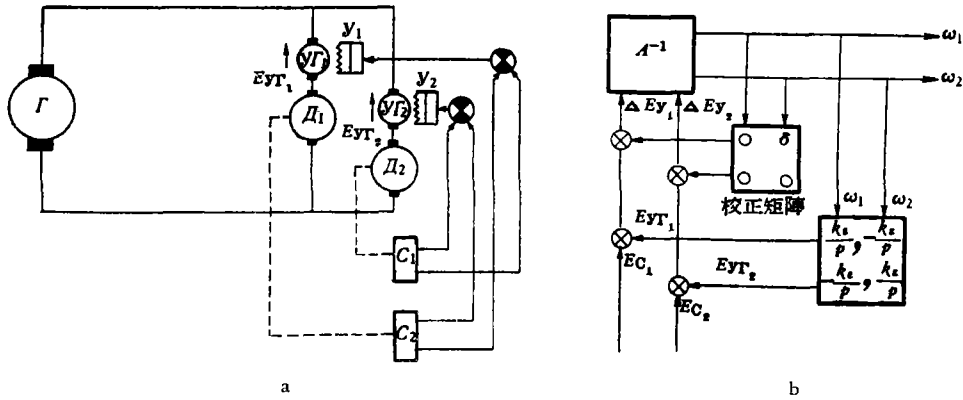


图 9

Γ —发电机; Δ_1, Δ_2 —电动机; C_1, C_2 —自整角机; $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ —放大器; $\mathcal{V}\Gamma_1, \mathcal{V}\Gamma_2$ —升压机

从图 9b 可知矩阵方程为:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\omega} &= A^{-1}\Delta\bar{E}_y, \quad \Delta\bar{E}_y = -\bar{E}_{yr} - \bar{E}_c, \quad \bar{E}_{yr} = (k_\epsilon) \cdot \bar{\epsilon} \\ \bar{\epsilon} &= B \cdot \bar{\theta}, \quad \bar{\theta} = \left(\frac{1}{p}\right)\Delta\bar{\omega}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\left(\frac{1}{p}\right)(k_\epsilon)$ 为标量, $\bar{\theta}$ 为角向量, $\bar{\epsilon}$ 为协调信号, $\Delta\bar{\omega}$ 为角速度向量, \bar{E}_{yr} 为升压机电势向量, $\Delta\bar{E}_y$ 为端电压合成向量, \bar{E}_c 为参考电压向量,

$$\begin{aligned} \Delta\bar{E}_y &= \begin{bmatrix} \Delta E_{y_1} \\ \Delta E_{y_2} \end{bmatrix}, \quad \Delta\bar{\omega} = \begin{bmatrix} \Delta\omega_1 \\ \Delta\omega_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_{yr} = \begin{bmatrix} E_{yr_1} \\ E_{yr_2} \end{bmatrix}, \\ A &= \begin{bmatrix} c_1 + T_{11}p & T_{21}p \\ T_{12}p & c_2 + T_{22}p \end{bmatrix}, \quad T_i = \frac{J_i}{c_i}R, \quad T_{ii} = \frac{J_i}{c_i}(R_i + R), \quad (i = 1, 2) \\ B &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A 根据电势及转矩平衡方程组成, B 按信号的协调作用组成, R, R_i 为电源及 i 个电机电枢电阻, c_i, c'_i 为转矩及电势的比例系数, J_i 为 i 个电机的转动惯量. 解式(17), 得

$$\left[A + \left(\frac{k_\epsilon}{p}\right) \cdot B \right] \cdot \Delta\bar{\omega} = -\bar{E}_c.$$

将 A, B 的展开式代入上式并作适当的处理, 使得

$$G^{-1} \cdot \bar{\theta} = -\bar{E}_c, \quad (18)$$

式中

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

而

$$a_{11} = T_{11}p^2 + c_1p + k_\epsilon, \quad a_{12} = T_{21}p^2 - k_\epsilon, \quad a_{21} = T_{12}p^2 - k_\epsilon, \quad a_{22} = T_{22}p^2 + c_2p + k_\epsilon.$$

式(18)的特征方程为:

$$\det |G^{-1}| = (a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3)p = 0.$$

而电动机的速度特征方程为:

$$a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0, \quad (19)$$

式中

$$a_0 = T_{11}T_{22} - T_1T_2, \quad a_1 = T_{22}c_1 + T_{11}c_2, \quad a_2 = (T_{11}k_\varepsilon + T_{22}k_\varepsilon + c_1c_2 + k_\varepsilon T_1 + k_\varepsilon T_2), \\ a_3 = k_\varepsilon(c_1 + c_2).$$

若式(19)不符合稳定条件, 则要求按 $G_{\text{正}}^{-1}$ 校正,

$$G_{\text{正}}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & (a_{12} - \delta p) \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

如果 δ 满足下式:

$$\delta > \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{T_1 a_2 + a_0 k_\varepsilon},$$

系统一定稳定。如果原系统处于临界状态 $a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0$, 则只要 $\delta > 0$, 系统即可稳定。现根据式(6), 可算出校正方阵为:

$$Q = G_{\text{正}}^{-1} - G^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 & \delta p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于

$$Q \cdot \theta = - \begin{bmatrix} 0 & \delta p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta p \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

故可看出只要引入 ω_2 的速度负反馈[因式(18)右端为负], 即可将系统校正妥当。

八、“粗钝性”条件的讨论^[6,7,8]

如果实外反馈不能完全补偿虚内反馈, 则在系统的微分方程中, 将出现高阶微系数项, 以致影响系统的稳定性。从更一般的情况来看, 校正后的结构式为:

$$G_{\text{正}}^{-1} \cdot \bar{y} = \bar{x} + Q \cdot \bar{y} - Q_0 \bar{y},$$

上式中 Q 为虚内反馈, Q_0 为实外反馈。设 $Q - Q_0 = \mu$, 则畸变后的结构式为 $(G_{\text{正}}^{-1} - \mu) \bar{y} = \bar{x}$ 。畸变后的特征方程为

$$\det | G_{\text{正}}^{-1} - \mu | = 0.$$

如果 μ 中的元素足够小, 则蜕化方程为

$$\det | G_{\text{正}}^{-1} | = 0.$$

蜕化方程稳定, 并不能肯定 $\det | G_{\text{正}}^{-1} - \mu | = 0$ 也稳定。事实上, 当蜕化方程的阶次低于原始方程 $\det | G_{\text{正}}^{-1} - \mu | = 0$ 时, 系统是属于安东诺夫定义下的“不稳定”(灵敏)系统^[7]。这时, 补偿条件的满足稍有差异时, 高阶项微负系数的出现就会使系统失去稳定性。当蜕化方程的阶次等于原始方程的阶次时, 系统将属于安东诺夫定义下的“稳定”(不灵敏)系统。这时, 只要蜕化方程有足够的稳定裕度, 则在一定的畸变内系统可以稳定。

为了简化校正手段, 可使 $\det | G_{\text{正}}^{-1} | = 0$ 的阶次等于校正对象 $\det | G^{-1} | = 0$ 的阶次, 并记为

$$\text{次} \det | G_{\text{正}}^{-1} | = \text{次} \det | G^{-1} |.$$

由式(6)可知校正环节的阶次一定符合下式:

$$\text{次} \det | Q | \leq \text{次} \det | G_{\text{正}}^{-1} |.$$

如果认为不精确的补偿仅是量的问题, 而不是质的问题, 则由关系式

$$\mu = Q - Q_0,$$

可看出

$$\begin{aligned} \text{次 det}|\mu| &\leq \text{次 det}|Q| \leq \text{次 det}|G_{\text{开}}^{-1}|, \\ \text{次 det}|G_{\text{开}}^{-1} - \mu| &\equiv \text{次 det}|G_{\text{开}}^{-1}|. \end{aligned}$$

故按本方法综合的系统,将是安东诺夫定义下的“稳定”系统。

在上例中,如果校正传递函数 δ_0 不等于虚内反馈传递函数 δ , 并令 $\delta - \delta_0 = \mu$, 则畸变后的稳定条件为:

$$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3 + \delta(T_1 a_2 + k_0 k_e)}{T_1 a_2 + a_0 k_e} > \mu.$$

欠补偿时, $\mu > 0$; 过补偿时, $\mu < 0$. 从上式可看出,即使是 $\mu > 0$, 只要蜕化方程有足够的稳定裕度,系统也是稳定的。

九、综合方法的实验验证

我们曾在国产 T615K 重型镗床的进给系统上,对本综合法作了实验研究¹⁾。

T615K 进给系统的原理图如图 10a 所示,其动态参数如表 1 所示。校正前系统的结构图如图 10b 所示。为了减弱剩磁影响和改善电机放大机的非线性,预先加入了一个传递函数为 $\frac{0.35}{1 + 0.06p}$ 的电压负反馈。校正前系统的闭环传递函数为:

$$\Phi(p) = \frac{3655.4 \times (1 + 0.06p)}{1.74 \times 10^{-4}[p^3 + 65.2p^2 + 6.34 \times 10^5 p + 1.053 \times 10^7]}.$$

现在要求在^[9]

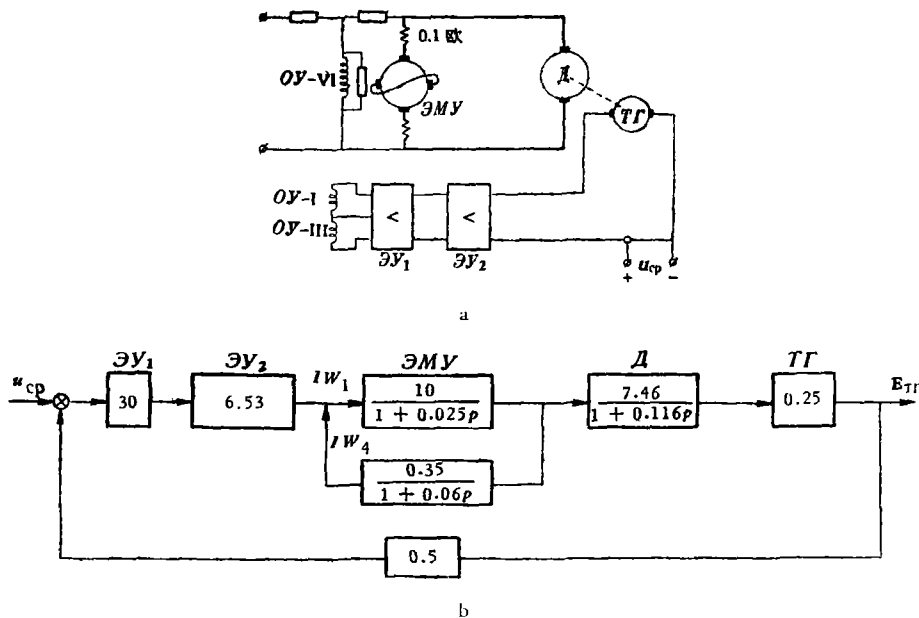


图 10

1) 本实验系结合华中工学院毕业生李达发、幸垂忻、冯念明、黄永新的毕业论文设计进行的,并承蒙武汉重型机床厂张宗汉同志给予大力协助。

- (1) 稳态放大系数足够大;
- (2) 以阶跃外作用输入, 初始条件为零时, 系统具有最小的超调和振荡;
- (3) 过渡过程时间 $t_n \leq 0.3$ 秒等条件下对系统进行综合。

表 1

时 间 常 数	符 号	数 值, 秒
ЭМУ 控制绕组的	T_{oy-1}, T_{oy-2}	0.004
ЭМУ 电压反馈绕组的	T_{oy-3}	0.0048
ЭМУ 交轴至直轴的(等效值)	T_{π}^r	0.025
电动机的机电的	T_M	0.116
电动机电枢电磁的	T_{Π}	0.0075

设预期特征方程为:

$$(p + a)(p + b)(p + c) = 0.$$

从超调与振荡的要求出发, 应有 $a > 0, b > 0, c > 0$, 而 a, b, c 中不得含有复数。如令 $a < b < c$, 则为了满足过渡过程时间的要求, 应使 $\frac{4}{a} \leq 0.3$ 。同时, 为了保证不致降低原有的稳态放大系数, 应使 $a \cdot b \cdot c = 1.053 \times 10^5$ 。

按照上述要求, 可给定 $a = 15, b \cdot c = \frac{1.053 \times 10^7}{15}$ 。如再令 $b = c$ (不是必要的), 则

$$b = c = 836,$$

故预期的闭环传递函数为:

$$\Phi_{\text{ж}}(p) = \frac{3655.4(1 + 0.06p)}{1.74 \times 10^{-4}(p + 15)(p + 836)^2}.$$

按式(6), 得校正装置的传递函数 $\Delta(p)$ 为:

$$\Delta(p) = \frac{1}{\Phi_{\text{ж}}(p)} - \frac{1}{\Phi(p)} = \left(\frac{1.74 \times 10^{-4}}{3655.4} \right) \cdot \frac{1621.8p + 0.89 \times 10^5}{1 + 0.06p} p.$$

令

$$\Delta(p) = \Delta_1(p) + \Delta_2(p),$$

式中

$$\Delta_1(p) = \frac{U_{\Delta_1}}{E_{\text{TR}}} = \left(\frac{1.74 \times 10^{-4}}{3655.4} \right) \cdot \frac{1621.8p^2}{(1 + 0.06p)} = \frac{7.75 \times 10^{-5}}{1 + 0.06p} p^2,$$

$$\Delta_2(p) = \frac{U_{\Delta_2}}{E_{\text{TR}}} = \left(\frac{1.74 \times 10^{-4}}{3655.4} \right) \cdot \frac{0.89 \times 10^5}{(1 + 0.06p)} p = \frac{4.3 \times 10^{-3}}{1 + 0.06p} p.$$

校正后的结构图如图 11 所示。

显然, 按 11 图的连接, $\Delta_1(p)$ 在物理上是不可能实现的。为使 $\Delta_1(p)$ 在物理上得到实现, 可按式(9b)对系统进行结构变换。由于

$$E_{\text{TR}} = \frac{375C_M}{GD^2 R_{\text{доп}}} \times 0.25 \cdot \frac{1}{p} \cdot I_{\text{я}} R_{\text{доп}},$$

· 式中 C_M 为转矩系数, GD^2 为飞轮转矩, $R_{\text{доп}}$ 为附加极电阻(这里我们也打算采用电流作

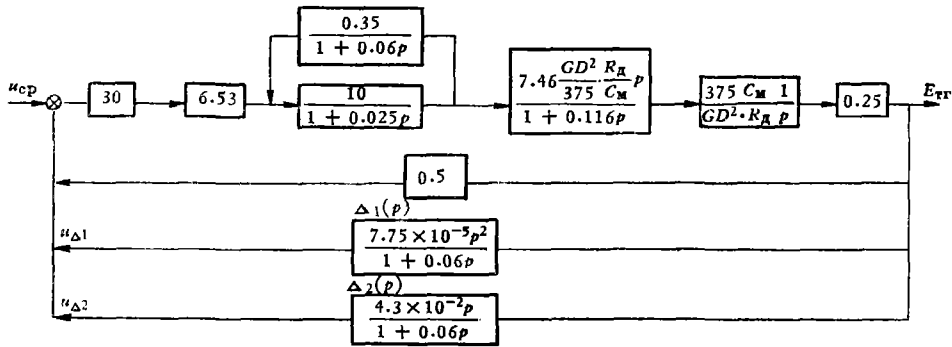


图 11

为加速度信号,因为在大多数镗床上都采用电流软反馈),故有

$$u_{\Delta 1} = \frac{7.75 \times 10^{-5}}{1 + 0.06p} p^2 \cdot E_{Tr} = \frac{7.75 \times 10^{-5}}{1 + 0.06p} p^2 \cdot \frac{375 C_M}{GD^2 R_{\text{дон}}} \cdot 0.25 \frac{1}{p} I_A R_{\text{дон}} = \frac{3.64 \times 10^{-2} p}{1 + 0.06p} \cdot I_A R_{\text{дон}},$$

$$\Delta'_1(p) = \frac{u_{\Delta 1}}{I_A R_{\text{дон}}} = \frac{3.64 \times 10^{-2}}{1 + 0.06p} p.$$

为了减少畸变,我们又将 $\Delta'_1(p)$ 的“回授”点加以改变,即将连接到第一级电子管的输入端改为接到第二级之前,于是有

$$\Delta''_1(p) = \Delta'_1(p) \times 30 = \frac{1.1p}{1 + 0.06p}.$$

这样,采用图 12a 所示的稳定变压器便可实现 $\Delta''_1(p)$ 。

再将 $\Delta_2(p)$ 与主反馈合并,得到

$$\Delta'_2(p) = \Delta_2(p) + \text{主反馈} = 0.5 + \frac{4.3 \times 10^{-3} p}{1 + 0.06p} = 0.5 \frac{1 + 0.0686p}{1 + 0.06p}.$$

这可用图 12b 的网络来实现。

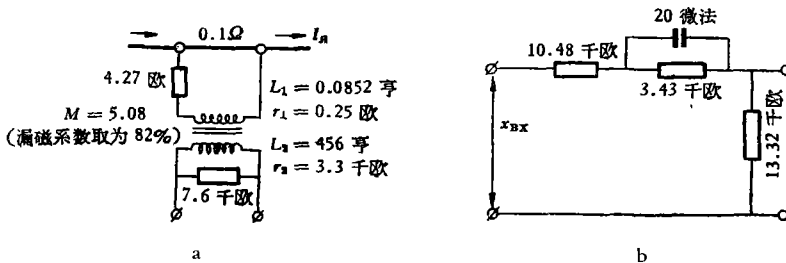


图 12

校正后的系统线路图如图 13 所示(图中的参数是实验时所采用的实际数值)。

该系统启动过程的示波图如图 14 所示。图 14a 为 $n = 40$ 转/分时的空载启动过程,图 14b 为 $n = 40$ 转/分时负载电流为 8 安培的启动过程,图 14c 为 $n = 400$ 转/分的高速启动过程。启动过程的有关数据见表 2。

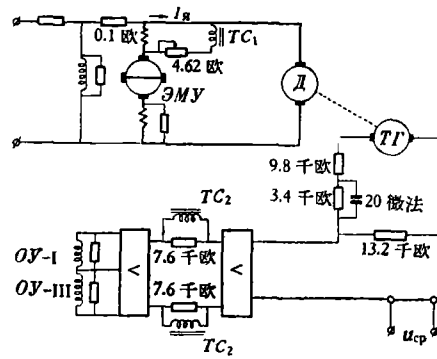


图 13

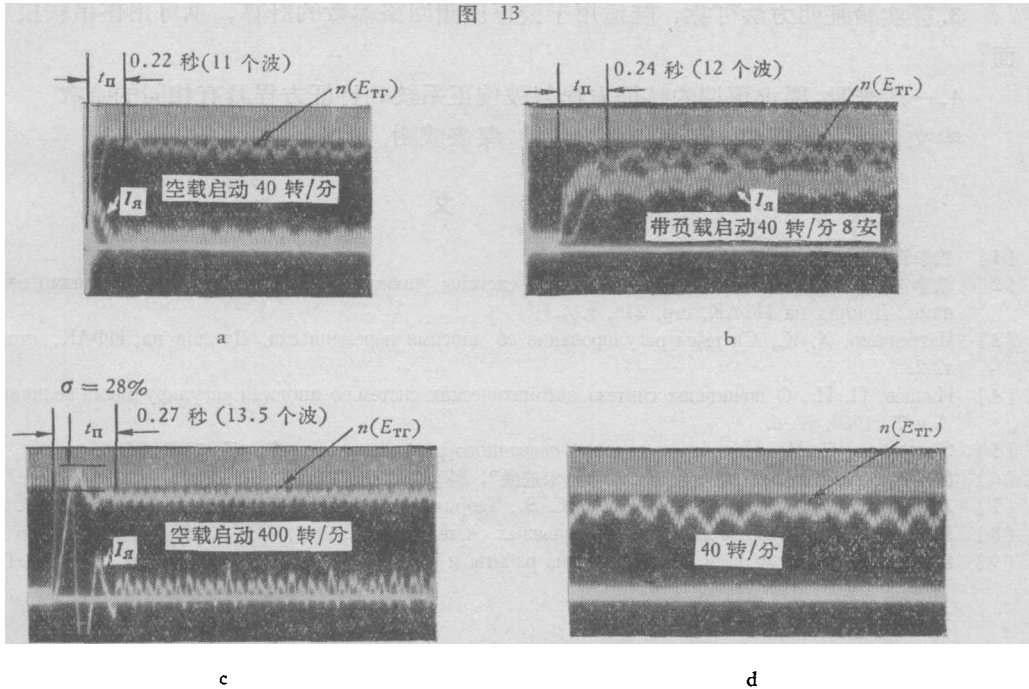


图 14

表 2

转数 转/分	负载情况	过渡过程时间, 秒			振荡次数		超调量		照片 编号	备 注
		计算	实验	示波图上 波数, 个	计算	实验	计算	实验		
40	空载	0.254	0.22	11	无	无	无	无	1	1, 2, 3号照片中, 稳定分量的脉动是开周系统固有的, 请参看图 14d
40	负载	0.254	0.24	12	无	无	无	无	2	负载为 8 安培
400	空载	0.254	0.27	13.5	无	1	无	30%	3	在高速下, 电子管放大器的工作点不同

由表 2 和图 14 可看出, 过渡过程时间 t_{II} 的实验结果与计算值颇符合。在 $n = 40$ 转/分的一组低速示波照片上, 过渡过程是单调的, 但在 $n = 400$ 转/分的高速下, 则有约

23% 的超調。显然,这可能与电子管放大器工作点的变动有关。

此外,系統几乎可直接按校正参数的計算值进行工作,而无需加以調整(請參看图 13)。

十、結 論

本綜合方法具有下述特点:

1. 它属于一种分析方法,可直接改变特征方程的系数,比图解法方便、准确;
 2. 适用于多变量系統及单变量系統以及多回路系統及单回路系統,計算比較簡單,系統按“补偿”的概念进行綜合;
 3. 經实驗証明方法可靠,既适用于校正反饋回路参数的計算,也可用在串联校正方面;
 4. 一般來說,要求預期的特征方程与被校正系統的特征方程具有相同的阶次。
- 本文曾承董世璜和陈珽两先生的指导,深表感謝。

参 考 文 献

- [1] 钱学森著,工程控制论,科学出版社,第5章。
- [2] 涂序彦,Теория гармонически действующей системы управления со многими регулируемыми величинами, Доклад на ИФАК, стр. 216, т. 2.
- [3] Чэттерджи, Х. К., Системы регулирования со многими переменными, Доклад на ИФАК, стр. 305, т. 2.
- [4] Иинаев, П. И., О принципах синтеза автоматических систем со многими регулируемыми величинами, А и Т, 1960, № 6.
- [5] Сюзюмова, Е. М., Некоторые вопросы связанного регулирования, А и Т, 1960, № 6.
- [6] 龔炳輝,不变性理论及其发展,“自动化技术进展”,科学出版社,1964.
- [7] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, Ф.М., 1959, § 6—4, стр. 427.
- [8] Цыпкин, Я. З., Теория линейных импульсных систем, Ф.М., 1963, § 11—6, стр. 709.
- [9] Верхолат, М. В., Фатеев, А. В., Анализ работы и расчет элементов электрических привода, 1957.

SYNTHESIS OF FEEDBACK CONTROLLERS FOR MULTIVARIABLE LINEAR CONTROL SYSTEMS

TENG TSU-LUNG

An analytical design method for multivariable linear control systems is proposed. The difference between the expected transfer function and the real transfer function of a given system is considered as a pseudo internal feedback. The feedback controller is then introduced to compensate the bad effects of this internal feedback.

The effectiveness of this method has been demonstrated in the design of the feed system of a heavy duty boring machine.