第3卷 第1期 自动化学报 Vol. 3, No. 1
1965年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1965

非綫性控制系統的絕对稳定性及稳定度*

高为炳

摘　　要

本文利用李雅普諾夫（Ляпунов）方法[1]研究了具有一个非綫性元件的控制系統．建立了絕对稳定性的若干充分判据，并对所謂列托夫（Летов）問題的几个情况給出了肯定的回答．最后研究了系統的絕对稳定度問題．

一、引　　言

現研究有一个非綫性控制机构的系統:

$$\sigma = \frac{K(p)}{D(p)} y, \qquad y = -f(\sigma),$$

其中 $\frac{K(p)}{D(p)}$ 为綫性部分的传輸函数，$f(\sigma)$ 为控制机构的非綫性特性．設 $D(p)=0$ 的所有特征根 $\lambda_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 均为单根且有負实部，则将 $\frac{K(p)}{D(p)}$ 分解为部分分式［假定 $K(p)$ 的阶次低于 $D(p)$ 的阶次］，可得

$$\sigma = \left[\frac{\gamma_1}{p-\lambda_1} + \frac{\gamma_2}{p-\lambda_2} + \cdots + \frac{\gamma_n}{p-\lambda_n}\right] f(\sigma). \tag{1}$$

引入新变量

$$\frac{1}{p-\lambda_i} f(\sigma) = z_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

后，则得到正则形式的微分方程組[2,3]:

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + f(\sigma) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \qquad \sigma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i z_i. \tag{2}$$

如果对任一 $f(\sigma)$，只要它連續且滿足:

$$f(0) = 0, \qquad 0 < \sigma f(\sigma) \qquad (\text{当 } \sigma \neq 0),$$

系統(2)的平衡状态 $z_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是全局漸近稳定，則称系統(2)是絕对稳定的．这一問題在[3]中曾得到了系統的研究，但其結果的运算十分复杂，且对高阶系統目前尚无算法[4]．在[1]中提出了另一方法，并在[5, 6]中被用来研究所謂的間接控制系統．对于系統(2)(所謂的直接控制系統)，这种方法不能直接加以应用[4]．本文先将(2)进行变换，然后用这个方法建立絕对稳定性的充分判据．这些判据对任意阶的系統都可以写成不等式的形式，尤其是对 λ_i 均为实根的情况，可写出簡单的条件．

* 本文于1963年10月29日收到．

在設計控制系統时，仅仅保証稳定性是不够的，一般还要求过渡过程有一定的品質．本文仿綫性系統的理論，引入絕对稳定度的概念，并建立系統具有一定稳定度的充分判据．这种問題的特殊情况在[7]中曾有过研究，而对具有固定非綫性的系統，则在[8]中也有过研究．

二、絕对稳定性研究

1. 系統的典型微分方程

对一般控制系統而言，λ_i 中至少有一个实根（如伺服机常假定是由一阶的微分方程所描述），設其为 λ_n，因之 γ_n 亦是实数；同样如果 λ_j 及 λ_{j+1} 为复共軛的，則 γ_j 及 γ_{j+1} 亦是复共軛的．作非奇綫性变換：

$$z_i = z_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \qquad \sigma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i z_i,$$

可将 (1) 变換为：

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \lambda_i z_i + f(\sigma) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \\ \dot{\sigma} &= \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i z_i + \lambda_n \sigma - r f(\sigma), \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\beta_i = (\lambda_i - \lambda_n)\gamma_i$，$r = -\sum_{i=1}^{n} \gamma_i$．对(3)来説，[1]中的方法可以应用．

2. 李雅普諾夫函数及稳定性的充分判据

可以証明(附录 I)，取李雅普諾夫函数：

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \|\beta_i\| z_i \bar{z}_i + \int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma, \tag{4}$$

将可建立系統 (3) 的絕对稳定性的充分判据：

$$r + \sum_{i=1,3,\cdots}^{2s-1} \frac{(\|\beta_i\| + \beta_i)(\|\beta_i\| + \bar{\beta}_i)}{4\|\beta_i\| \mathrm{Re}\,\lambda_i} + \sum_{j=2s+1}^{n-1} \frac{(|\beta_j| + \beta_j)^2}{4|\beta_j|\lambda_j} \geq 0, \tag{5}$$

其中 λ_i 为 s 对共軛复根，λ_j 为 $n-1-2s$ 个实根．

当所有根均为实根时，式(5)可写成：

$$r + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(|\beta_j| + \beta_j)^2}{4|\beta_j|\lambda_j} \geq 0, \tag{6}$$

或

$$r + \Sigma^{+} \frac{\beta_j}{\lambda_j} \geq 0, \tag{7}$$

其中 Σ^{+} 表示仅对正値 β_i 求和．

3. 特征方程有一零根的情况

設 $D(p)$ 有一个零根，其余根 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 均为单根，且有負实部，則此时(1)为：

$$\sigma = \left[\frac{-r}{p} + \frac{\gamma_1}{p-\lambda_1} + \cdots + \frac{\gamma_{n-1}}{p-\lambda_{n-1}}\right] f(\sigma), \tag{8}$$

引入新变量：

$$\frac{1}{p}f(\sigma)=\xi,\qquad \frac{1}{p-\lambda_i}f(\sigma)=z_i\qquad (i=1,2,\cdots,n-1),$$

則得系統的正則方程式为

$$\dot{z}_i=\lambda_i z_i+f(\sigma)\qquad (i=1,2,\cdots,n-1),$$
$$\dot{\xi}=f(\sigma),\qquad \sigma=\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i z_i-r\xi,$$

或

$$\dot{z}_i=\lambda_i z_i+f(\sigma)\qquad (i=1,2,\cdots,n-1),$$
$$\dot{\sigma}=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i z_i-rf(\sigma),\tag{9}$$

其中 $\beta_i=\lambda_i\gamma_i$. 显然式(9)及式(3)中的 β_i 及 r 完全是不同的. 式(9)卽是所謂的間接控制系統.

对系統(9)可以建立与系統(3)同样的李雅普諾夫函数(4),幷得到形式上全同的絕对稳定性的充分判据(5),(6)或(7),只是 $\geqslant$ 应换为 $>$. 对系統(9)的判据与[5, 6]中的結果是相同的.

4. 絕对稳定性的改善充分判据

在[9]中,波波夫曾証明了下述引理:

如果系統:

$$\dot{z}_i=\lambda_i z_i+f(\sigma)\qquad (i=1,2,\cdots,n-1),$$
$$\dot{\sigma}=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\left(1+\frac{p}{\lambda_i}\right)z_i-rf(\sigma),\tag{10}$$

其中 p 为任一大于零的数,是絕对稳定的,且其絕对稳定性是由李雅普諾夫函数:

$$V=\Phi(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1})+\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma\tag{11}$$

判定的 [V 正定,其按(10)对 t 的导数为負定], 同时 $r+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\beta_i}{\lambda_i}>0$, 則系統(9)是絕对稳定的,且其稳定性亦可由(11)判定.

这一引理在[9]中是用来研究三阶間接控制系統的,虽然沒有能改善 n 阶系統的稳定性判据(因为它是針对三阶系統[3],方法不是一般的),但可改善这里的充分判据(5).

对間接系統(9),立卽可得改善充分判据:

$$r+\sum_{i=1,3,\cdots}^{2s-1}\frac{(\|\tilde{\beta}_i\|+\tilde{\beta}_i)(\|\tilde{\beta}_i\|+\bar{\tilde{\beta}}_i)}{4\|\tilde{\bar{B}}_i\|\,\mathrm{Re}\,\lambda_i}+\sum_{j=2s-1}^{n-1}\frac{(|\tilde{\beta}_i|+\tilde{\beta})^2}{4|\tilde{\beta}_i|\lambda_i}>0,\tag{12}$$

其中 $\tilde{\beta}_i=\beta_i\left(1+\dfrac{p}{\lambda_i}\right)$, $p>0$.

对于直接控制系統(3), 可建立引理: 如果系統(10)絕对稳定, 且其稳定性由式(11)判定,而 $\sum\dfrac{\beta_i}{\lambda_i}+r>0$, 則系統(3)亦是絕对稳定的.

証明: 由引理条件,根据波波夫引理, 可知系統(9)是絕对稳定的, 卽 $\dot{V})_{(9)}<0$ (負定). 但

$$\dot{V})_{(3)} = \dot{V})_{(9)} + \lambda_n \sigma f(\sigma),$$

$\lambda_n < 0$ (即 $\lambda_n \sigma f(\sigma) < 0$, 当 $\sigma \neq 0$ 时),故 $\dot{V})_{(3)}$ 負定,从而(3)是絕对稳定的.

于是对直接控制系統(3),可得到形式完全相同的改善充分判据(12),但此时 $>$ 可换为 $\geq$. 今后将不加区分两种系統,只是在应用时,应注意到 β_i 和 r 的定义不同以及 $\geq$ 与 $>$ 之間的差別.

对实根情况可将改善充分判据(12)化簡为:

$$r + \sum{}^{+} \frac{\tilde{\beta}_i}{\lambda_i} > 0, \qquad \tilde{\beta}_i = \beta_i\left(1 + \frac{p}{\lambda_i}\right), \tag{13}$$

其中 p 为一正值参数. 变更 p,可以得到大的稳定区,当 $-\lambda_i \leq p \leq -\lambda_{i+1}$ 时,因为(13)对 p 是一次的,所以 p 等于 $-\lambda_i$ 或 $-\lambda_{i+1}$ 时才能得到最大稳定区. 在有复根的情况下,p 可以取中間值. 例如 $n=3$ 时,在 (β_1, β_2) 平面上,稳定区边界(13)当 p 变化时是一通过定点的綫束, $p = -\lambda_1$ 及 $p = -\lambda_2$ 为其二边界直綫. 因之只有这两条直綫中的一条才能是稳定区的包絡.

5. 列托夫問題的若干情况

列托夫于[7]中曾提出以下問題: 如果当 $f(\sigma) = h\sigma$, $0 < h < \infty$ 时系統(3)全局稳定,是否可以肯定(3)[或(9)]是絕对稳定的. 这个問題对三阶系統已証明[9]回答是肯定的. 利用前面的判据,可以就若干特殊情况,証明对 n 阶系統回答亦是肯定的.

首先不难証明系統(3)的絕对稳定性有两个必要条件:

$$r \geq 0, \qquad r + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i}{\lambda_i} \geq 0. \tag{14}$$

对系統(9), $\lambda_n = 0$, 故(14)中应为不等号. 令 $f(\sigma) = h\sigma$ 并代入(3)中,所得綫性系統的特征方程为:

$$\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_i)\left[\lambda - \lambda_n + h\left(r - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i}{\lambda - \lambda_i}\right)\right] = 0.$$

λ^{n-1} 項的系数为 $-\lambda_n + hr$, 自由項为 $\prod_{i=1}^{n-1} (-\lambda_i)\left[-\lambda_n + h\left(r + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta_i}{\lambda_i}\right)\right]$,当 $0 < h < \infty$ 时,它們都应是正的. 从而可得到(14). 在下列情况下,列托夫問題的回答是肯定的.

(1) $\beta_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, n-1)$,因为此时充分判据(7)与必要条件(14)相同;

(2) $\beta_i < 0 (i = 1, 2, \cdots, n-1)$,此时充分判据亦和必要条件 $r \geq 0$ 全同;

(3) $\beta_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, s)$, $\beta_j \leq 0 (j = s+1, \cdots, n-1)$, $1 \leq s \leq n-1$(假定 $0 > \lambda_1 > \lambda_2 \cdots > \lambda_{n-1}$, 这并不影响一般性). 取 p 使满足 $-\lambda_s \leq p \leq -\lambda_{s+1}$, 則 $\tilde{\beta}_k = \beta_k\left(1 + \frac{p}{\lambda_k}\right) \leq 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$. 由改善判据得 $r \geq 0$, 而此时引理的假定条件 $r + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i} > 0$ 亦应满足. 对系統(9)来說,这一条件和必要条件重合,因而它是充要的. 但对系統(3)来說,它和必要条件 $r + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i} \geq 0$ 差一等号, 因而不能判定稳定区边界上之点的稳定性. 但从工程观点看,这些点的实际意义不大; 此外, 条件的表达式也不能再改进了.

6. 例子．几种方法的比較

（1）現研究二阶系統：

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + f(\sigma) \qquad (i = 1, 2), \qquad \sigma = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2.$$

充分判据(7)給出：$r \geq 0$，$r + \dfrac{\beta_1}{\lambda_1} \geq 0$ 或 $P = \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 \geq 0$，絕对穩定区在参数平面（$r$, P）上为整个第一象限．卢利叶（Лурье）和罗晉瓦色尔（Розенвассер）[10] 的結果分别为图 1 上的 I 及 II 区．系統絕对穩定的充要条件亦为整个第一象限，因之本文的充分判据給出了最大的穩定区．

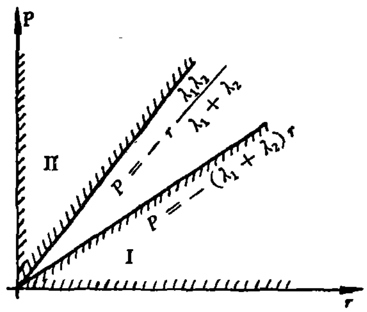

图 1

（2）現研究三阶系統：

$\dot{z}_i = \lambda_i z_i$ $(i = 1, 2, 3)$，$\sigma = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z_3$.

先研究实根情况：$\lambda_i < 0$．充分判据給出：

$\lambda_1\lambda_2\gamma_3 + \lambda_2\lambda_3\gamma_1 + \lambda_3\lambda_1\gamma_2 \leq 0$，$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \leq 0$，

$\lambda_2\gamma_1 + \lambda_3\gamma_2 + \lambda_2\gamma_3 \geq 0$，$\lambda_3\gamma_1 + \lambda_1\gamma_2 + \lambda_1\gamma_3 \geq 0$.

現在討論改善判据及其应用方法．設 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$，則 $\beta_i = \gamma_i(\lambda_i - \lambda_3)$ $(i = 1, 2)$ 与 γ_i $(i = 1, 2)$ 同符号．$\gamma_1, \gamma_2 > 0$ 及 $\gamma_1, \gamma_2 < 0$ 时，充分判据分别給出的条件：$\lambda_1\lambda_2\gamma_3 + \lambda_2\lambda_3\gamma_1 + \lambda_3\lambda_1\gamma_2 \leq 0$，$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \leq 0$ 已是充要条件．$\beta_1 > 0, \beta_2 < 0$ 时，由改善判据，取 $-\lambda_1 \leq p \leq -\lambda_2$，亦得充要条件：$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \leq 0$．但 $\beta_1 < 0$ 而 $\beta_2 > 0$ 时，用改善判据則得不到充要条件，只可加以改善．先研究 $-\lambda_1 \leq p \leq -\lambda_2$ 的情况．改善判据

$$r + \frac{\beta_1}{\lambda_1}\left(1 + \frac{p}{\lambda_1}\right) + \frac{\beta_2}{\lambda_2}\left(1 + \frac{p}{\lambda_2}\right) \geq 0,$$

当 $p = -\lambda_2$ 时所給出的穩定区要大于 $p = -\lambda_1$ 时所給出的穩定区．此时可得（令 $p = -\lambda_2$）：

$$\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_2\frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3}{\lambda_2^2} \leq 0.$$

当 $p \geq -\lambda_2$ 时，且 $p = -\lambda_2$，仍可得到以上結果．当 $0 \leqslant p \leq -\lambda_1$ 时，且 $p = 0$，卽为充分判据；但若 $p = -\lambda_1$，則所得結果不如令 $p = -\lambda_2$ 时所得到的結果．总之我們可得改善判据（在由下述第一条件所决定的面上，有些区 $\leqslant$ 成立，而有些区仅 $<$ 成立）：

$$\lambda_1\lambda_2\gamma_3 + \lambda_2\lambda_3\gamma_1 + \lambda_3\lambda_1\gamma_2 \leq 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \leq 0,$$

$$\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_2\frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3}{\lambda_2^2} \leq 0.$$

在图 2 上繪出了充分判据和改善判据所給出的穩定区：3–3 及 2–2．为了比較起見，在此图上还繪出了必要充分条件及卢利叶判据的穩定区：1–1 及 4–4（經过十分复杂的計算）．該图是 γ_2 为常数时的两个断面，当 $|\gamma_2|$ 变化时，图形亦成比例地变形．由此可以看出，改善判据对三阶系統不能給出必要充分条件，但是非充分必要的边界，正是以一次方程（平面）代替二次方程（曲面）的部分，故可取得很大的簡化．

再研究复根情况．設 $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$，$\lambda_3 = -1$，$\gamma_{1,2} = m \pm in$．此时充分判据給出絕对穩定条件：

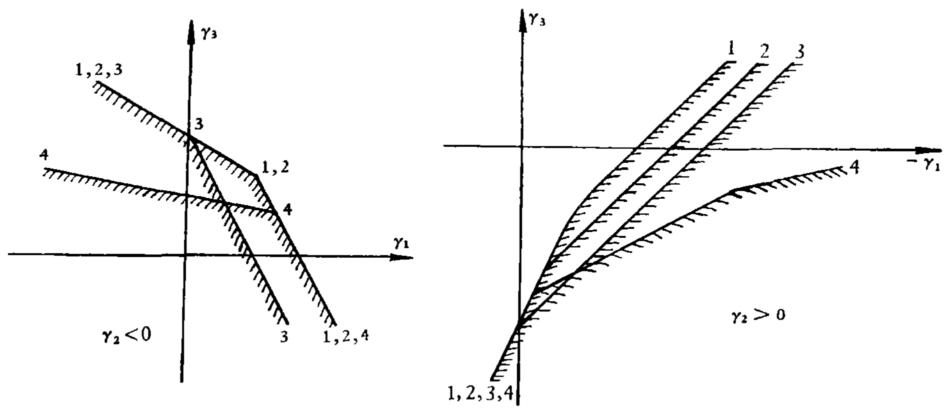

图 2

$$2\gamma_3 + 3m - n + \sqrt{2(m^2 + n^2)} \leq 0.$$

在图 3 上給出了由这个条件所决定的稳定区 1-1. 为了比較起見，还繪出了卢利叶判据所决定的稳定区 2-2.

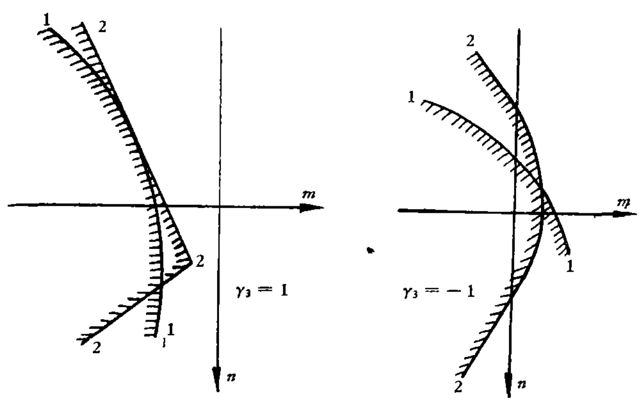

图 3

（3）現研究一四阶間接控制系統：

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + f(\sigma) \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad \dot{\sigma} = \Sigma \beta_i z_i - r f(\sigma).$$

假定 λ_i 均为負实根，便可立刻写出充分判据：

a）$r + \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_2}{\lambda_2} + \frac{\beta_3}{\lambda_3} > 0$，　b）$r + \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_2}{\lambda_2} > 0$，　c）$r + \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_3}{\lambda_3} > 0$，

d）$r + \frac{\beta_2}{\lambda_2} + \frac{\beta_3}{\lambda_3} > 0$，　e）$r + \frac{\beta_1}{\lambda_1} > 0$，　f）$r + \frac{\beta_2}{\lambda_2} > 0$，

g）$r + \frac{\beta_3}{\lambda_3} > 0$，　h）$r > 0$，

其中 a）及 h）又是必要的. 这些方程虽然是在考慮到 β_1 β_2 β_3 参数空間各象限中的充分条件下得到的，但由于它們是相容的，故应用时不必区分象限. 这些条件即[5, 6]中所得到的条件.

应用改善判据可以扩大稳定区. 现分析最复杂的情况: $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 < 0$. 取 $-\lambda_1 \le p \le -\lambda_2$, 则 $\tilde{\beta}_1 \ge 0$, $\tilde{\beta}_2 \ge 0$, $\tilde{\beta}_3 < 0$. 改善判据 $r + \frac{\tilde{\beta}_1}{\lambda_1} + \frac{\tilde{\beta}_2}{\lambda_2} > 0$ 当 $p = -\lambda_1$ 时为: I. $r + \beta_2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2^2} > 0$; 当 $p = -\lambda_2$ 时为: II. $r + \beta_1 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} > 0$. 再加上改善判据成立时的条件: III. $r + \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_2}{\lambda_2} + \frac{\beta_3}{\lambda_3} > 0$, 可得如图 4 所示的稳定区, 它是坐标面: $(+\beta_2, -\beta_1)$, $(-\beta_1, -\beta_3)$, $(+\beta_2, -\beta_3)$ 和面 I, II, III 围成的区域.

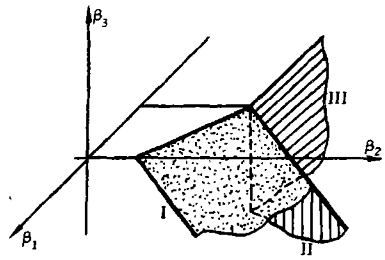

图 4

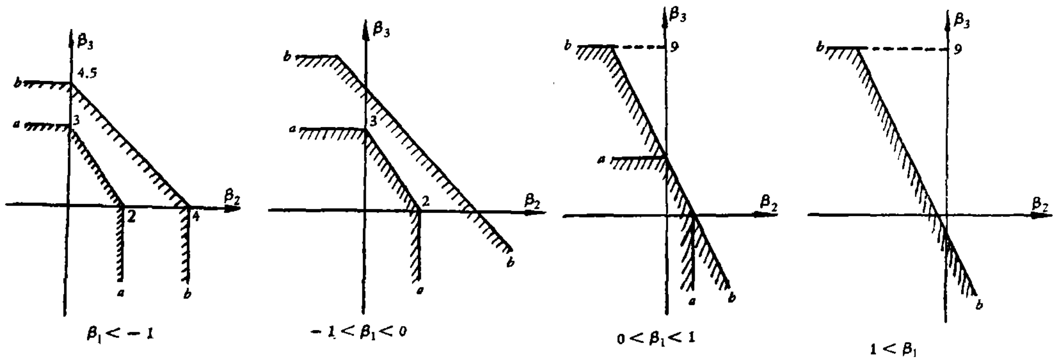

图 5

由类似的分析所得到的全部絕对稳定的充分条件列于表 1 中. 在图 5 上繪出了稳定区的边界. 图中 a-a 为充分判据結果, b-b 为改善充分判据結果. 由此图可看出, 当 $\beta_1 > 1$ 时, 充分判据不满足, 而改善判据却給出甚大的稳定区.

表 1

象　限	β_1 β_2 β_3	改 善 判 据	充要性
I	+ + +	1)	充要
II	− + +	1) 4)	充分
III	− − +	$\beta_1<\lambda_1$: 3), $\beta_1>\lambda_1$: 1) 5)	充分
IV	+ − +	1) 3)	充分
V	+ + −	1) 6)	充要
VI	− + −	$\beta_1>\lambda_1$: 2), $\beta_1<\lambda_1$: 1)	充分
VII	− − −	6)	充要
VIII	+ − −	1) 6)	充要

表中 1) 为 $r + \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_2}{\lambda_2} + \frac{\beta_3}{\lambda_3} > 0$, 2) 为 $r + \beta_2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2^2} > 0$, 3) 为 $r + \beta_3 \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3^2} > 0$, 4) 为 $r + \beta_2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2^2} + \beta_3 \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3^2} > 0$, 5) 为 $r + \beta_1 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} + \beta_3 \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3^2} > 0$, 6) $r > 0$.

7. 临界情况

特征方程 $D(p) = 0$ 具有一个零根的情况(即所謂的間接控制系統)已于 3 中討論过了. 現討論以下临界情况(見附录 II):

(1) 一对虚根情况. 假定 $\lambda_{1,2} = \pm ia$, 则得到 V 函数及充分判据分别为:

$$V = \frac{1}{2}|\mathrm{Re}\,\beta_1| z_1\bar{z}_1 + \frac{1}{2}|\mathrm{Re}\,\beta_2| z_2\bar{z}_2 + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n-1}\|\beta_i\| z_i\bar{z}_i + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma, \tag{15}$$

$$r + \sum_{i=3,5,\cdots}^{2s-1}\frac{(\|\beta_i\| + \beta_i)(\|\beta_i\| + \bar{\beta}_i)}{4\|\beta_i\|\mathrm{Re}\,\lambda_i} + \sum_{j=2s+1}^{n-1}\frac{(|\beta_j| + \beta_j)^2}{4|\beta_j|\lambda_j} > 0,$$

$$\mathrm{Re}\,\beta_1 < 0, \quad \mathrm{Re}\,\beta_2 < 0. \tag{16}$$

当然亦可类似地建立改善判据. 对临界情况的分析更为簡单,就象将系統降低二阶似的.

(2) 二个零根的情况. 这里研究間接系統(9)再有一个零根的情况[4]. 假定 $\lambda_1 = 0$, 则可建立 V 函数及充分判据:

$$V = \frac{1}{2}|\beta_1| z_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\|\beta_i\| z_i\bar{z}_i + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma, \tag{17}$$

$$r + \sum_{i=2,4,\cdots}^{2s}\frac{(\|\beta_i\| + \beta_i)(\|\beta_i\| + \bar{\beta}_i)}{4\|\beta_i\|\mathrm{Re}\,\lambda_i} + \sum_{j=2s+2}^{n-1}\frac{(|\beta_j| + \beta_j)^2}{4|\beta_j|\lambda_j} > 0, \quad \beta_1 < 0. \tag{18}$$

此外,間接系統(9)有一对虚根的情况其結果与(16)形式上相同.

8. 扇形域中的絕对稳定性

以上我們要求 $f(\sigma)$ 满足: $0 < \sigma f(\sigma) < \infty$, $f(0) = 0$. 今后将考虑 $f(\sigma)$ 位于某一扇形域中时的絕对稳定性問題,即假定: $0 < \sigma f(\sigma) < \sigma^2 H$, $f(0) = 0$, $H > 0$. 此时可取

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\|\beta_i\| z_i\bar{z}_i + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma, \tag{19}$$

并沿(3)的軌綫求 V 对 t 的导数. 于是可得:

$$-\dot{V} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ f(\sigma) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \left[\ -\|\beta_i\|\lambda_i\delta_{ij}\ \right] & \left[-\frac{1}{2}(\Lambda e + \beta)\right] \\ \left[-\frac{1}{2}(e'\Lambda + \bar{\beta}')\right] & \left[\ r - \frac{\lambda_n}{h}\ \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ f(\sigma) \end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中 $h = f(\sigma)/\sigma = h(\sigma)$, $\delta_{ij} = 0$, 当 $i \neq j$ 时; $\delta_{ij} = 1$, 当 $i = j$ 时; V 是正定的. $-\dot{V}$ 为正定的条件为:

$$r - \frac{\lambda_n}{h} > -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\|\beta_i\| + \beta_i)(\|\beta_i\| + \bar{\beta}_i)}{\|\beta_i\|\mathrm{Re}\,\lambda_i}. \tag{21}$$

考虑到 $\lambda_n < 0$, 且对任一满足 $0 < h < H$ 的 h 值,式(21)都应成立,于是便得到扇形域 $[0, H]$ 中的絕对稳定的充分条件:

$$r + \frac{-\lambda_n}{H} \geq -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\|\beta_i\| + \beta_i)(\|\beta_i\| + \bar{\beta}_i)}{\|\beta_i\|\mathrm{Re}\,\lambda_i}. \tag{22}$$

显然,当 $H = \infty$ 时,式(22)即前面得到的(5).

現研究一个三阶系統. 設 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, $r = 1$, $H = 1$, 则(5)及

(22)給出的絕对稳定区分别如图 6 上所示的 II–II 及 I–I.

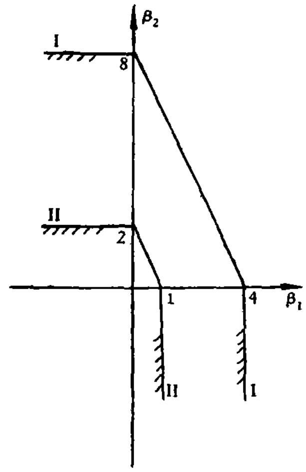

图 6

三、絕对稳定度研究

1. 系統及定义

設有非綫性系統[7]:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\eta_j + h_i u \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \\ \dot{u} &= -\rho u + f(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{j=1}^{n} p_j\eta_j + pu, \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $f(\sigma)$ 仍要求滿足: $0 < \sigma f(\sigma) < \infty$, $f(0) = 0$. 假定 $f(\sigma) = 0$ 时之綫性系統的特征方程

$$(\lambda + \rho)|\lambda\delta_{ij} - b_{ij}| = 0$$

的根 $-\rho$, $\lambda_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 均有負实部,則作

$$\eta_i = e^{-\alpha t}x_i, \quad \sigma = e^{-\alpha t}s, \quad u = e^{-\alpha t}\mu \tag{24}$$

变换后的系統为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^{n} (b_{ij} + \delta_{ij}\alpha)x_j + h_{i\mu}, \\ \dot{\mu} &= -(\rho - \alpha)\mu + F(t, s), \quad F(t, s) = e^{\alpha t}f(se^{-\alpha t}), \\ \dot{s} &= \sum p_j x_j + p\mu. \end{aligned} \tag{25}$$

如果当 $\alpha > 0$ 时,系統(25)是絕对稳定的,則系統(23)的任一解的衰减速度要比 $e^{-\alpha t}$ 还快. 仿綫性系統的稳定度的概念,可引入以下定义.

如果系統(25)的零解是絕对稳定的,則称系統(23)具有絕对稳定度 α.

2. 絕对稳定度的充分判据

在[7]中首先研究了这一問題,并假定了 ρ_i 均为負实数,但其所得到的結果可以大大改善. 經过非奇綫性变換[7],可将(23)变換成:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\rho_i x_i + \sigma \qquad (i = 1, 2, \cdots n), \\ \dot{\sigma} &= \sum\beta_i x_i - \rho\sigma - rf(\sigma). \end{aligned} \tag{26}$$

假定 $\mathrm{Re}\,\rho_i > 0$, 則利用李雅普諾夫函数

$$V = \frac{1}{2}\sum\|\beta_i\|x_i\bar{x}_i + \frac{1}{2}\sigma^2, \tag{27}$$

可以建立(26)的絕对稳定之充分条件为

$$\rho + \frac{1}{4}\sum\frac{(\|\beta_i\| + \beta_i)(\|\beta_i\| + \bar{\beta}_i)}{-\|\beta_i\|\mathrm{Re}\,\rho_i} \geq 0. \tag{28}$$

对(26)作变換:

$$y_i = x_i e^{\alpha t}, \qquad s = \sigma e^{\alpha t},$$

便得到:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= -(\rho_i - \alpha) + s, \\ \dot{s} &= \sum\beta_i y_i - (\rho - \alpha)s - rF(t, s), \quad F(t, s) = e^{\alpha t}f(se^{-\alpha t}). \end{aligned} \tag{29}$$

采用(27)作为系統(29)的 V 函数,考虑到 $sF(t, s) > 0$ 当 $s \neq 0$ 时, $F(t, 0) = 0$, 可得(30)之絕对稳定性条件:

$$(\rho_i - \alpha) > 0, \quad \rho - \alpha > 0, \quad \rho - \alpha + \frac{1}{4}\sum \frac{(\|\beta_i\| + \beta_i)(\|\beta_i\| + \bar{\beta}_i)}{-\|\beta_i\|\mathrm{Re}(\rho_i - \alpha)} \geq 0. \quad (30)$$

条件(30)亦是系統(26)具有絕对稳定度 α 的充分条件.

根据(30)立即可得結論: 系統(26)的最大絕对稳定度为 $\alpha^* = \min\{\mathrm{Re}\,\rho_i, \rho\}$, 且所謂的間接系統以及各种临界情况的絕对稳定度都等于零.

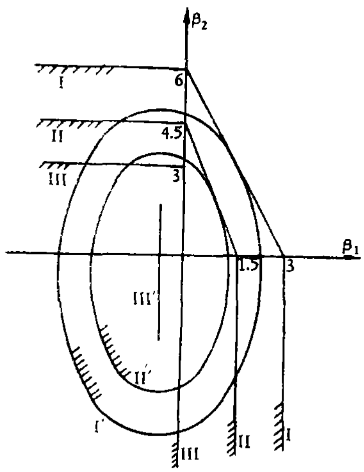

图 7

現研究一三阶系統:

$$\dot{x}_i = -\rho_i x_i + \sigma (i = 1, 2),$$
$$\dot{\sigma} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 - \rho\sigma - rf(\sigma).$$

設 $\rho = 3$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, 在[7]中給出

$$\rho_1 - \alpha > 0, \quad \rho_2 - \alpha > 0,$$
$$\rho - \alpha - \frac{1}{4}\left[\frac{(1 + \beta_1)^2}{\rho_1 - \alpha} + \frac{(1 + \beta_2)^2}{\rho_2 - \alpha}\right] > 0,$$

而本文的結果(30)为:

$$\rho_1 - \alpha > 0, \quad \rho_2 - \alpha > 0,$$
$$\rho - \alpha - \sum_{i=1}^{2}{}^{+}\frac{\beta_i}{\rho_i - \alpha} > 0.$$

在图 7 上給出了两种方法的比較,本文的結果 I II III 和[7]的結果 I′ II′ III′ 各分别表示 $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \alpha^* = 1$ 时的等稳定度区. 当 $\alpha = 1$ 时, III′ 退化为一綫段, 而 III 仍給出一甚大的区域.

順便指出,根据[4],可直接建立具有絕对稳定度 α 的卢利叶判据. 这里从略.

附 录 I

将式(3)写成矩陣形式:

$$\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{z} + \mathbf{e}f(\sigma), \qquad \dot{\sigma} = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{z} + \lambda_n\sigma - rf(\sigma), \tag{i}$$

其中黑体大写表示矩陣,黑体小写表示向量, $\boldsymbol{\Lambda} = [\lambda_i\delta_{ij}]$ 为对角矩陣, $\mathbf{e}$ 为单位向量(单位列矩陣), $'$ 表示轉置. 由李雅普諾夫定理,对任一正定矩陣 $\mathbf{K} = [k_i\delta_{ij}]$, $k_i > 0$, 可由 $\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{A} + \mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\Lambda}} = -2\mathbf{K}$ 唯一地确定一正定矩陣 $\mathbf{A}$. 研究 V 函数:

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{z}'\mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma, \tag{ii}$$

其中号"—"表示共軛, $\mathbf{z}'\mathbf{A}\bar{\mathbf{z}}$ 为一正定厄米得矩陣,因之 V 是正定函数. 函数 V 按 (i) 对 t 的导数为:

$$\dot{V} = -\mathbf{z}'\mathbf{K}\bar{\mathbf{z}} + \frac{1}{2}\mathbf{z}'(\mathbf{A}\mathbf{e} + \boldsymbol{\beta})f(\sigma) + \frac{1}{2}f(\sigma)(\mathbf{e}'\mathbf{A} + \bar{\boldsymbol{\beta}}')\bar{\mathbf{z}} + \lambda_n\sigma f(\sigma) - rf^2(\sigma). \tag{iii}$$

将 $\sigma f(\sigma)$ 写作 $sf^2(\sigma)$, $s = \frac{\sigma}{f(\sigma)}$. 視 $\dot{V}$ 为 $(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, f(\sigma))$ 的二次型,則 $\dot{V}$ 負定的条件:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{e} + \boldsymbol{\beta}) \\ -\frac{1}{2}(\mathbf{e}'\mathbf{A} + \bar{\boldsymbol{\beta}}') & r - \lambda_n s \end{bmatrix} \tag{iv}$$

当 $0 < s < \infty$ 时亦为正定,化簡后得:

$$-\lambda_n s + r - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{4k_i}\left(\frac{k_i}{\mathrm{Re}\,\lambda_i}-\beta_i\right)\left(\frac{k_i}{\mathrm{Re}\,\lambda_i}-\bar{\beta}_i\right) > 0.$$

由于 $\lambda_n < 0$, $0 < s < \infty$ 时上式均应成立,因之有:

$$r - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{4k_i}\left(\frac{k_i}{\mathrm{Re}\,\lambda_i}-\beta_i\right)\left(\frac{k_i}{\mathrm{Re}\,\lambda_i}-\bar{\beta}_i\right) \geq 0. \tag{v}$$

在参数 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1}; r)$ 空間,式 (v) 給出一个稳定区,此区的边界为:

$$r - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{4k_i}\left(\frac{k_i}{\mathrm{Re}\,\lambda_i}-\beta_i\right)\left(\frac{k_i}{\mathrm{Re}\,\lambda_i}-\bar{\beta}_i\right) = 0. \tag{vi}$$

它是一个以 $k_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 为参数的曲面族,其包絡将給出最大的稳定区[1,8]. 对 k_i 取偏导数以求决定包絡之 k_i 的值,得 $k_i = -\|\beta_i\|\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$, 此时矩陣 $\mathbf{A}$ 的元素为: $a_{ii} = \|\beta_i\|$, $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, 其中号 $\|\ \|$ 表示模. 由 (ii) 及 (v) 并代入 a_{ij} 及 k_i, 便得到(4)及(5).

形式如 (ii) 的李雅普諾夫函数类中,能够給出最大稳定区的 V,即(4),可称之为最佳 V 函数.

附　　录　　II

当系統(3)有一对虚根时,作 V 函数:

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{z}'\mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma, \quad \Lambda\mathbf{A} + \mathbf{A}\bar{\Lambda} = -2\mathbf{K} \tag{vii}$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} R_1 & 0 & \\ 0 & R_1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & [a_{ij}] \end{array}\right] \qquad (ij = 3, \cdots, n-1), \qquad R_1, R_2 > 0,$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & k_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & k_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad k_i > 0.$$

假定 $\mathrm{Re}\,\beta_1 \neq 0$, $\mathrm{Re}\,\beta_2 \neq 0$, 取 $R_1 = -\mathrm{Re}\,\beta_1 = R_2 = -\mathrm{Re}\,\beta_2$ (因 $\beta_1\beta_2$ 共軛),按附录 I 的步驟,可得(15)及(16). 函数 V 是正定的,但 $\dot{V}$ 为常負,它仅是 $[z_3, \cdots, z_{n-1}, f(\sigma)]$ 的負定函数. 但可以証明,此时条件(16)是絕对稳定的充分条件. 事实上,当 $\dot{V} \equiv 0$ 时, $z_3 = \cdots = z_{n-1} = \sigma \equiv 0$, 由微分方程(3),可得 $\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 = 0$. 再令 $\beta_{1,2} = m \pm in$, $z_{1,2} = u \pm iv$, 則得:

$$mu - nv = 0, \tag{viii}$$

而 $\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1$ 及 $\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2$ 可写作 $\dot{u} = -av$, $\dot{v} = au$. 再由 (viii), 可得:

$$mu + nv = 0. \tag{ix}$$

按假定 $m \neq 0$, (viii) 及 (ix) 之行列式不等于零,因之恒有 $u = v = 0$, 亦即 $z_1 = z_2 = 0$.

当系統(9)有一个零根时,取 $\lambda_1 = 0$, 作 V 函数:

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{z}'\mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} + \int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma, \qquad \Lambda\mathbf{A} + \mathbf{A}\bar{\Lambda} = -2\mathbf{K},$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & [a_{ij}] \end{array}\right], \qquad (ij = 2, \cdots, n-1), \qquad R > 0,$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & k_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & k_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad k_i > 0.$$

計算步驟与附录 I 相同,可得(17)及(18). 此时,$\dot{V}$ 亦为常負,但不难証明系統(9)亦是絕对稳定的.

参 考 文 献

[1] Малкин, И. Г., К теории устойчивости регулируемых систем, *Прикладная математика и механика*, **XV** (1951), в. 1, 59—66.

[2] Rekasius, Z. V., Gibson, J. E., Stability Analysis of Nonlinear Control Systems by the Second Method of Liapunov, *Trans. IRE PGAC* 7 (1962), No. 1, 3—14.

[3] Лурье, А. И., Некоторые задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, Москва, 1951.

[4] Лурье, А. И., Розенвассер, Е. Н., О методах построения функции Ляпунова в теории нелинейных регулируемых системах, Труды 1 ого ИФАК, Изд. АН СССР, Москва, 1961, 715—716.

[5] Комарницкая, О. И., Об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования, *Прикладная математика и механика*, **XXIII** (1959), в. 3, 506—509.

[6] Lefchetz, S., On Indirect Controls, Труды международного симпозиума (1961) по теории нелинейных колебаний, Изд. АН УССР, Киев, 1963, 2.

[7] Летов, А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Физматгиз, Москва, 1962, 250.

[8] 高为炳, 关于非线性控制系统的稳定性问题, 自动化学报, 第二卷 (1964) 第一期, 16—27.

[9] Попов, В. М., Об ослаблении достаточных условий абсолютной устойчивости, *Автоматика и Телемеханика*, **XIX** (1958), № 1, 3—7.

[10] Розенвассер, Е. Н., К вопросу об устойчивости нелинейных регулируемых систем, *Автоматика и Телемеханика*, **XX** (1959), № 6, 702—706.

ABSOLUTE STABILITY AND DEGREE OF STABILITY OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

KAO WEI-BIN

In this paper control systems with one nonlinear element are studied by Liapunov's method[1]. Several sufficient conditions of absolute stability are established, and definite results are obtained for some cases of the so-called Letov's problem. The degree of absolute stability is then analysed.