第2卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 2, No. 4
1964年10月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　October, 1964

軌綫两端均受限制时的最优控制問題

張 嗣 瀛

摘　　要

本文用文献[4]中的方法，首先处理了軌綫两端均受限制时的快速最优控制問題，得到控制最优性的必要条件以及在某种意义下的充分条件；还得到有关微分方程的边界条件，并說明其几何意义，即貫截条件. 此外，又討論了所用方法中乘子的性質及作用.

对于一般意义下的以及文献[4]中所討論的最优控制問題，当軌綫两端均受限时，也可象此处对快速系統那样进行处理，并得到相应的結果. 同时，关于貫截条件及乘子的討論，也仍然有效.

文中附有二个算例.

引　　言

快速最优控制系統的研究，属于軌綫端点受限的最优控制問題. 对于此种問題，若使用文献[2]中所提出的极大値原理，有时即使对于簡单的常系数綫性系統，也不能唯一地确定最优控制. 例如文献[2]中第60頁的例題1(在本文中也将作为例1予以討論)，用极大値原理求解时，得到两条满足极大値条件的軌綫，欲判断那条是最优的，就必須再使用其他方法. 且据极大値原理所得結果，在理論上只能証明为必要条件. 若使用文献[5]中的結論也不可能，因为那些結論是在假定軌綫末端受限区域具有內点的情形下得到的，而此处的例題不能符合此条件. 又，在文献[5]中，并未考虑軌綫始端也受限的情形.

本文中，我們使用文献[4]中的方法，并結合問題的特点，处理了最一般的具有活动端点的快速最优控制問題，并得到摘要中所述的結果，其中的充分条件是文献[2,5]中所沒有的. 此外，关于乘子及軌綫两端貫截条件的討論，可認为是对文献[4]中方法的进一步补充. 这些方法和結論，将适用于軌綫两端受限时一般意义下的最优控制問題. 此点将在本文最后一节論及.

一、軌綫两端受限时快速最优控制問題的提法

設控制系統的运动方程为

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\cdots,x_n;u_1,\cdots,u_r;t),\quad(i=1,\cdots,n)\tag{1}$$

式中 $x_1,\cdots,x_n$ 是广义坐标，$u_1(t),\cdots,u_r(t)$ 是控制参数，以后称其为«控制»，它們可以是分段連續的函数，并有有限个第一类間断点，又它們还受如下 m 个条件的限制

$$q_k(u_1,\cdots,u_r)\leqslant 0.\quad(k=1,\cdots,m)\tag{2}$$

以后，称满足式(2)的控制为«容許控制». 此外，还設函数 f_i 等对于 $x_1,\cdots,x_n$ 有連續的一阶及二阶偏导数，且 f_i 及 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 等对于 $u_1,\cdots,u_r$ 满足李普希茲条件. 以后，我們用

$u(t)$, $x(t)$ 分别表示 $u=(u_1, \cdots, u_r)$, $x=(x_1, \cdots, x_n)$, 且将式(1)右端的函数簡写作 $f_i(x, u, t)$. 下面若遇到类似情形,也将采用同样的写法.

今在变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的 n 維空間中,給定两个 r_0 及 r_1 維的光滑流形 S_0 及 S_1(r_0 及 r_1 均小于 n),它們分别是下面 q 个及 p 个光滑超曲面的交集

$$S_0: \qquad g_m(x_1, \cdots, x_n)=0, \quad (m=1, \cdots, q<n) \tag{3}$$

$$S_1: \qquad F_l(x_1, \cdots, x_n)=0, \quad (l=1, \cdots, p<n) \tag{4}$$

式中函数 g_m, F_l 等对于諸 x_i 都有一阶的偏导数,且下面的两組向量中的每一向量均不为零:

$$\mathrm{grad}\, g_1, \cdots, \mathrm{grad}\, g_q,$$
$$\mathrm{grad}\, F_1, \cdots, \mathrm{grad}\, F_p.$$

又,每組向量各自綫性无关.

現提出如下的問題[2]:

今要求自式(2)中选取控制 $u(t)$, 以使与其相对应的軌綫,在 t_0 时自属于 S_0 的某一点 x^0 出发,以最短的时間达到 S_1 的某一点 x^1.

此处, x^0 及 x^1 都不是事先給定的,因此,对上述問題还須回答: x^0 及 x^1 应该是些怎样的点.

給出問題之解的控制称为«最优控制»,而与其相对应的軌綫則称为«最优軌綫».

用 $u_1(t), \cdots, u_r(t); x_1(t), \cdots, x_n(t)$ 分别表示最优控制及最优軌綫. 映象点在 t_0 时自 x^0 出发沿最优軌綫到达点 x^1 的时刻記作 T, 这也就是最短时間. 显然, 当最优軌綫到达 $x^1 \in S_1$ 时,据式(4),应有

$$F_l[x_1(T), \cdots, x_n(T)]=0. \quad (l=1, \cdots, p) \tag{5}$$

用 $u_s(t)+\delta u_s(t)$, $(s=1, \cdots, r)$, $x_i(T)+\delta x_i(T)$, $(i=1, \cdots, n)$ 表示其他容許控制及与其相对应的軌綫. 当 $t=T$ 时, 这些軌綫的末端点不能达到 S_1. 对于此处所提出的問題,我們明确規定«不能达到 S_1»的意义,即在 $t=T$ 时,其他容許軌綫的末端点均位于超曲面(4)的某一边,不失普遍性,我們設:

$$F_l[x_1(T)+\delta x_1(T), \cdots, x_n(T)+\delta x_n(T)]>0. \ (l=1, \cdots, p) \tag{6}$$

二、問題的解

由式(1)可得

$$\delta \dot{x}_i=f_i(x+\delta x, u+\delta u, t)-f_i(x, u, t). \quad (i=1, \cdots, n)$$

上式两端各乘以非零函数 $\lambda_i(t)$, $(i=1, \cdots, n)$, 然后两端自 t_0 到 T 积分,左端积分时用分部积分法,积分后加以整理并按 i 相加,得

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(T)\delta x_i(T)-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t_0)\delta x_i(t_0)=$$
$$=\int_{t_0}^{T}\left\{\sum_{i=1}^{n} \dot{\lambda}_i \delta x_i+[H(\lambda, x+\delta x, u+\delta u, t)-H(\lambda, x, u, t)]\right\} dt, \tag{7}$$

式中

$$H(\lambda, x, u, t)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x, u, t). \tag{8}$$

式(7)中的 $\delta x_i(t_0)(i=1,\cdots,n)$ 是由于軌綫 $x_i(t)+\delta x_i(t)\ (i=1,\cdots,n)$ 在 t_0 时不是自点 x^0 出发而引起的.

如同在文献[4]中那样，此处我們把方程組(3)看作是在 $t=t_0$ 时加于軌綫起始端坐标的«約束方程組». 由于它們的限制，使得 $\delta x_i(t_0)\ (i=1,\cdots,n)$ 諸量之間必存在一定的附加关系. 因为最优軌綫及其他容許軌綫均自 S_0 上某一点出发，故有

$$g_m(x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0))=0,\qquad (m=1,\cdots,q)$$

$$g_m(x_1(t_0)+\delta x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0)+\delta x_n(t_0))=0.\qquad (m=1,\cdots,q)$$

将第二式展开并将两式相减，可得

$$\frac{\partial g_m}{\partial x_1}\delta x_1(t_0)+\cdots+\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\delta x_n(t_0)+0(\delta x^0)=0,\quad (m=1,\cdots,q) \tag{9}$$

式中 $0(\delta x^0)$ 表示較 $\delta x_i(t_0)$ 等更高阶的微量. 当 $\delta x_i(t_0)$ 等充分小时，可証

$$\frac{\partial g_m}{\partial x_1}\delta x_1(t_0)+\cdots+\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\delta x_n(t_0)=0,\ (m=1,\cdots,q) \tag{10}$$

此即約束(3)加于諸 $\delta x_i(t_0)$ 之間的关系，其中 $\dfrac{\partial g_m}{\partial x_i}$ 等应取在点 x^0 处的值.

再討論 $\delta x_i(T)$. $(i=1,\cdots,n)$

据式(5)及(6)，則有

$$\frac{\partial F_l}{\partial x_1}\delta x_1(T)+\cdots+\frac{\partial F_l}{\partial x_n}\delta x_n(T)=\delta C_l\geqslant 0,\ (l=1,\cdots,p)$$

或

$$\frac{\partial F_l}{\partial x_1}\delta x_1(T)+\cdots+\frac{\partial F_l}{\partial x_n}\delta x_n(T)-\delta C_l=0,\ (\delta C_l\geqslant 0)\quad (l=1,\cdots,p) \tag{11}$$

式中 $\dfrac{\partial F_l}{\partial x_i}$ 等应該在点 x^1 处取值.

如同在文献[4]中那样，将式(10)及式(11)各分别乘以乘子 $\eta_m\ (m=1,\cdots,q)$、$\mu_l>0\ (l=1,\cdots,p)$，然后加于式(7)的左端；在式(7)右端，将被积函数加减一項 $H(\lambda, x, u+\delta u, t)$ 及一項 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial H(\lambda,x,u,t)}{\partial x_i}\delta x_i$，并选取 $\lambda_i(t)\quad (i=1,\cdots,n)$，使

$$\dot\lambda_i(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\quad (i=1,\cdots,n) \tag{12}$$

于是可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i(T)+\sum_{l=1}^{p}\mu_l\frac{\partial F_l}{\partial x_i}\right]\delta x_i(T)-\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i(t_0)+\sum_{m=1}^{q}\eta_m\frac{\partial g_m}{\partial x_i}\right]\delta x_i(t_0)-\\ -\sum_{l=1}^{p}\mu_l\delta C_l=\int_{t_0}^{T}\Big\{[H(\lambda,x,u+\delta u,t)-H(\lambda,x,u,t)]+\\ +\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\lambda,x,u+\delta u,t)-H(\lambda,x,u,t))\delta x_i\right]+\\ +\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\lambda,x+\theta\delta x,u+\delta u,t)\right]\Big\}dt.\\ 0<\theta(t)<1\end{aligned} \tag{13}$$

选定下列条件(并作为式(12)的边界条件)

$$\lambda_i(t_0) = -\sum_{m=1}^{q} \eta_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{14}$$

$$\lambda_i(T) = -\sum_{l=1}^{p} \mu_l \frac{\partial F_l}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{15}$$

于是可将式(13)化为

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{p} \mu_l \delta C_l = -\int_{t_0}^{T} \Big\{ & [H(\lambda, x, u + \delta u, t) - H(\lambda, x, u, t)] + \\ & + \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (H(\lambda, x, u + \delta u, t) - H(\lambda, x, u, t))\delta x_i\right] + \\ & + \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\lambda, x + \theta\delta x, u + \delta u, t)\right]\Big\} dt. \quad 0 < \theta(t) < 1\end{aligned} \tag{16}$$

在此式的左端,由于 $\mu_l > 0$, $\delta C_l \geqslant 0$, 故

$$\sum_{l=1}^{p} \mu_l \delta C_l \geqslant 0.$$

因此, 对右端各項进行如文献 [4,5] 中那样的分析不难証明, 控制最优性的必要条件是:最优控制 $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 时时給出函数 $H(\lambda, x, u, t)$ 以极大値.

此处应注意, 虽然这里的結論形式上和文献[2]中的极大値原理相同, 但由于我們規定了式(6),从而有 $\delta C_l \geqslant 0$ 及条件(14)、(15),这样就将給出較用极大値原理时更为明确的答案. 事实上, 由 $H = (\lambda, \dot{x})$, 可知极大値原理的几何意义是: 最优控制 u 将向量 $\dot{x}$ 尽可能往向量 λ 的方向驅赶. 文献[2]中的貫截条件,只能給出向量 λ 在初始及終了状态时的方位(分别与 S_0 及 S_1 正交), 但不能确定其指向(例如指向 S_1 的內部或外部),这样就影响到 u 的具体确定. 而此处的条件(14)、(15), 则确定出 λ 的方位及指向, 故可得到更确定的答案. 在下面的例題 1 中,将可看出此点(可将此处的解法与文献 [2] 中的解法作比較).

根据式 (16), 还可象文献 [4] 中那样, 得到某种意义下 (卽 «小范围» 最优性及 «小区間» 最优性) 的充分条件. 其論証步驟是: 若 $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 滿足这些条件, 则将有 $\sum_{l=1}^{p} \mu_l \delta C_l \geqslant 0$. 但据式(10)及式(11),此式只有当 $u(t)$为最优控制时才能成立,故 $u(t)$必为最优控制.

对于綫性系統

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + \varphi_i(u_1, \cdots u_r) + b_i(t), \ (i = 1, \cdots, n) \tag{17}$$

式(16)中右端被积函数的第二項及第三項此时均为零,故有

$$\sum_{l=1}^{p} \mu_l \delta C_l = -\int_{t_0}^{T} \{H(\lambda, x, u + \delta u, t) - H(\lambda, x, u, t)\} dt. \tag{18}$$

据此卽可証明, 极大値条件是控制最优性的必要及充分条件. 此时已不需要附加 «小范

围»、«小区間»等限制.

如果軌綫始端不受限制，即自相空間中任意点出发，则可将此点作为固定点．此时，由于 $\delta x_i(t_0)=0\quad(i=1,\cdots,n)$，故条件(14)已不需要，这是上面所討論的一般問題的特例.

如果要求軌綫的末端落在給定的固定点，例如，落在原点，则此时可稍許改变一下問題的提法(不影响問題的实質)，化为 $l=1$，且

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\varepsilon^2=0,$$

式中 ε 是充分小的数．这样就可应用前面的方法了.

三、关于边界条件及乘子的討論

先討論边界条件(14)，(15).

考虑下面两个向量：

$$\lambda(t_0)=(\lambda_1(t_0),\cdots,\lambda_n(t_0)),$$

$$-(\eta_1\operatorname{grad}g_1+\cdots+\eta_q\operatorname{grad}g_q)\neq 0.$$

后一向量不能为零是因前面已設各向量 $\operatorname{grad}g_1,\cdots,\operatorname{grad}g_q$ 綫性无关．显然，式(14)的意义是：此两向量相等，即

$$\lambda(t_0)=-(\eta_1\operatorname{grad}g_1+\cdots+\eta_q\operatorname{grad}g_q).\tag{19}$$

設 π 是流形 S_0 的在点 x^0（即最优軌綫的起点）处的切超平面，τ_0 是自点 x^0 所引位于 π 內的任意一个向量．据切平面的定义，τ_0 必与所有的向量 $\operatorname{grad}g_1,\cdots,\operatorname{grad}g_q$相正交，即

$$(\operatorname{grad}g_m,\tau_0)=0.\qquad(m=1,\cdots,q)$$

上式左端表示 $\operatorname{grad}g_m$ 与 τ_0 的数积.

今求 $[\lambda(t_0),\tau_0]$．据上面的关系式及式(19)，有

$$[\lambda(t_0),\tau_0]=-(\eta_1\operatorname{grad}g_1+\cdots+\eta_q\operatorname{grad}g_q,\tau_0)=$$

$$=-\sum_{m=1}^{q}\eta_m(\operatorname{grad}g_m,\tau_0)=0.\tag{20}$$

由此可見，向量 $\lambda(t_0)$ 与 τ_0 相正交．由于 τ_0 是 π 內的任意向量，故 $\lambda(t_0)$ 与 π 相正交，而 π 又是 S_0 的切平面，从而在点 x^0 处 $\lambda(t_0)$ 与流形 S_0 相正交.

类似地，可知在 $t=T$ 时，向量 $\lambda(T)$ 也在点 x^1 处与流形 S_1 相正交.

这一結論，就是文献[2]中用另外的方法所求得的«貫截条件».

条件(14)、(15)可給出关于点 x^0, x^1 的位置的答案.

如果对上面所提出的問題，还要求映象点不仅在 $t=T$ 时达到 S_1，而且在 $t=T$ 之后，只許其在 S_1 上运动，这样就又增加了一个附加条件，即 $t=T$ 时映象点的速度向量 $\dot{x}(T)$ 必位于 π 內．可見 $\lambda(T)$ 必与 $\dot{x}(T)$ 相正交，即須满足：

$$\sum_{l=1}^{p}\mu_l(\operatorname{grad}F_l,\dot{x}(T))=0.$$

由此，根据式(8)，还可得

$$H[(\lambda(T), x(T), u(T), T] = 0. \tag{21}$$

下面討論乘子 $\eta_l(l = 1, \cdots, q), \mu_m(m = 1, \cdots, p)$.

式(1)及(12)各为 n 阶微分方程組,仅当軌綫末端受限且 $p = 1$ 时,其边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &x_i(t_0) = x_i^0, \quad (i = 1, \cdots, n) \\ &\lambda_i(T) = -\mu \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \cdots, n) \\ &F(x_1(T), \cdots, x_n(T)) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

我們注意到,方程組(12)是关于 $\lambda_i(t)(i = 1, \cdots, n)$ 的綫性齐次微分方程,因此,若取下面的边界条件

$$\lambda_i(T) = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

所得的解为

$$\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t).$$

則在取边界条件

$$\lambda_i(T) = -\mu \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{23}$$

时,所得的解就应为

$$\mu\lambda_1(t), \cdots, \mu\lambda_n(t). \tag{24}$$

这就是乘子 μ 对解的影响.

根据式(24),并由式(8),可知 μ 对函数 H 的影响是:

$$H = \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x, u, t). \tag{25}$$

因此,为了不影响函数 H 的符号(以使不影响极大值条件),应选取 $\mu > 0$.

取 $\mu > 0$ 的理由,还可作如下的补充說明: 当 $t = T$ 时,根据式(15),則有

$$H = -\mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i(T) = -\mu(\operatorname{grad} F, \dot{x}(T)).$$

但速度 $\dot{x}(T)$ 必指向 $F(x) = 0$ 的«內部»或相切,否則映象点不能达到 $F(x) = 0$. 故上式右端括号內的数积不能为正,因此也应取 $\mu > 0$,以使不影响当 $t=T$ 时函数 H 的符号.

由此可見,前面我們选取乘子 $\mu_l > 0$ 是合理的.

如果还要求有

$$\lambda_i(t_0) = -\eta \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{26}$$

則此条件与(23)須相容. 而相容性条件可如下推出: 据边界条件 $\lambda_i(T) = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$ 求出(12)之解,記作 $\lambda_i(t)$ $(i = 1, \cdots, n)$,于是当边界条件为(23)时的解即为 $\mu\lambda_i(t)$ $(i= =1, \cdots, n)$. 求此解在 $t = t_0$ 时的值,又計及式(26),則有

$$\mu\lambda_i(t_0) = -\eta \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{27}$$

此卽相容性条件. 于是可选取 μ, η 的值,使滿足此条件.

对于 p, q 大于 1 的情形，可作类似的討論.

四、算　例

例 1.

設有控制系統，其方程[2]为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2,\\ \frac{dx_2}{dt} &= u,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$|u| \leqslant 1. \tag{29}$$

今要求确定 $u(t)$，以使自相空間中某一固定点 $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ 出发的軌綫，于最短时間內，达到直綫

$$x_1 = 0. \tag{30}$$

分两种情形討論.

(1) 当 x^0 位于 $x_1 = 0$ 之右.

此时，取 $F(x_1, x_2) = x_1$. 按上述方法，将有

$$\mu\frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1 + \mu\frac{\partial F}{\partial x_2}\delta x_2 = \mu\delta x_1 = \mu\delta C > 0. \quad (\mu > 0, \delta C > 0)$$

又

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u,$$

其中

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0,$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1.$$

据式(15)，取边界条件:

$$\lambda_1(T) = -\mu,$$

$$\lambda_2(T) = 0,$$

并解微分方程，得

$$\lambda_1(t) \equiv -\mu,$$

$$\lambda_2(t) = \mu(t - T).$$

在此情形下，据前面所論，控制最优性的必要与充分条件是极大値条件，因此，应选 u，使

$$u = \operatorname{sign}\lambda_2 = \operatorname{sign}\mu(t - T) = -1.$$

(2) 当 x^0 位于 $x_1 = 0$ 之左.

此时，应取 $F(x_1, x_2) = -x_1$ 才能有 $\mu\delta C > 0$, $(\mu > 0,\ \delta C > 0)$. 在这种情形下，$\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = -1$，故边界条件应取为

$$\lambda_1(T) = \mu,$$

$$\lambda_2(T) = 0.$$

据此解微分方程，得

$$\lambda_1(t) \equiv \mu,$$
$$\lambda_2(t) = -\mu(t-T).$$

故应选 u，使

$$u = \operatorname{sign}\lambda_2 = \operatorname{sign} - \mu(t-T) = +1.$$

因此，得到

$$u = \begin{cases} -1, & x_1^0 > 0 \\ +1. & x_1^0 < 0 \end{cases} \tag{31}$$

由此可見，这比用文献[2]中的結論解題，可得到更为直接确定的答案，且式(31)不仅必要，而且充分.

例 2.

設控制系統的方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + u, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$|u| \leqslant 1. \tag{33}$$

今要求确定 $u(t)$，以使与其相应的軌綫，自直綫

$$g(x_1, x_2) = x_1 - k = 0 \tag{34}$$

上一点出发，于最短时間到达圓周

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0. \tag{35}$$

此处 k、R 都是某一常数，为确定起見，可設 $k > 0$.

組織函数

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_1 + u).$$

此外还有

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2,$$
$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1.$$

据式(14)、(15)，应选取边界条件

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(t_0) = -\eta, \ \lambda_2(t_0) = 0; \\ \lambda_1(T) = -2\mu x_1, \ \lambda_2(T) = -2\mu x_2. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

此处 $\mu > 0$. 若将最优軌綫終点处圓(35)之半径与 x_1 軸的夹角記作 α，则还有

$$\lambda_1(T) = -2\mu R\cos\alpha, \ \lambda_2(T) = -2\mu R\sin\alpha.$$

今由上面的微分方程及式(36)的后两个条件，解 λ_1、λ_2、x_1、x_2，当 u 为常数时，得

$$\lambda_1(t) = -2\mu R\cos(T+\alpha)\cos t - 2\mu R\sin(T+\alpha)\sin t,$$
$$\lambda_2(t) = 2\mu R\cos(T+\alpha)\sin t - 2\mu R\sin(T+\alpha)\cos t;$$
$$x_1(t) = -C\cos(T+\alpha)\cos t - C\sin(T+\alpha)\sin t + u,$$
$$x_2(t) = C\cos(T+\alpha)\sin t - C\sin(T+\alpha)\cos t.$$

不失普遍性，取 $t_0 = 0$，于是，据此解及式(36)中的 $\lambda_2(t_0) = 0$，得

$$T + \alpha = n\pi.$$

由此又得

$$x_2(t_0) = -C\sin(T+\alpha) = 0. \tag{37}$$

亦卽，最优軌綫应自直綫(34)与 x_1 軸的交点处出发．可見据式(36)可定出 x^0 的位置．

又，据极大値条件，应取

$$u = \operatorname{sign} \lambda_2, \tag{38}$$

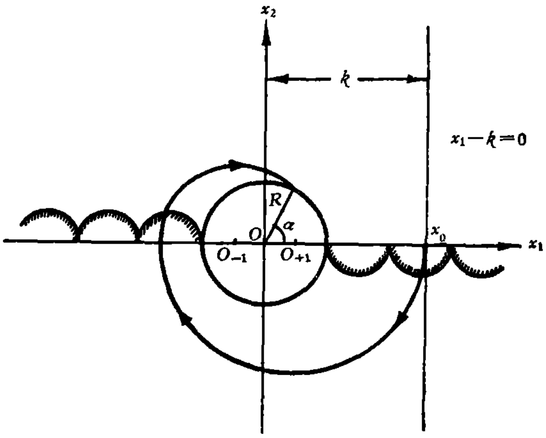
此条件不仅必要，而且充分．

据以上結果，可作出开关曲綫及最优軌綫(見附图)．在开关曲綫之下 u 取 $+1$，之上取 -1．

此外，据式(36)的第一式还可推出相容性条件

$$2\mu\cos(T+\alpha) = \eta.$$

由附图可見：最优軌綫从直观上来看也是很显然的，由直綫 $x_1 - k = 0$ 上任何其他点出发的軌綫到达圓周的时間均較最优軌綫者为长．



五、一般意义下的最优控制問題

对于系統(1)，設其他条件均同前，只是代替快速問題而考虑泛函[2]

$$J = \int_{t_0}^{T} f_0(x, u, t)\,dt. \tag{39}$$

此时，引进一个新变量 x_0，有

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x, u, t), \tag{40}$$

式中的 $f_0(x, u, t)$ 和(1)中的 f_i 等有相同的性質．

或者，对于(1)，我們象在文献[5]中那样理解；前面的 S_0 及 S_1，也有相应的意义．然后考虑函数

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t), \tag{41}$$

此处 $c_i (i = 1, \cdots, n)$ 是些不全部为零的常数．

我們現提出如下的問題：

今要求自(2)中选取控制 $u(t)$，以使映象点在 t_0 时自 $x^0 \in S_0$ 出发，幷在 $t = T$ 时达到 $x^1 \in S_1$，且使 J (或者 S)在此时的値最小．此处 x^0、x^1 都不是事先給定的．

对此問題，若 T 是固定的，則应从一切在 $t = T$ 时到达 S_1 的軌綫中选取最优軌綫．因此，有

$$F_l(x_1(T) + \delta x_1(T), \cdots, x_n(T) + \delta x_n(T)) = 0. \quad (l = 1, \cdots, p) \tag{42}$$

应用此条件，卽可用文献[4]中及上面的方法加以处理，得到泛函改变量公式．例如，对于(39)，其泛函改变量公式的形式将如式(16)，只是左端应为改变量 ΔJ，又，其中的 i 应自

0, 1, ……, 到 n. 边界条件也将稍有变动,即边界条件(14)、(15)仍保持, 注意到 $\delta x_0(t_0) \equiv 0$, 故只須再添一个 $\lambda_0(T) = -1$. 据泛函改变量公式, 可推出如第三节中所述控制最优性的必要条件及充分条件. 对于文献 [4] 中所討論的那些間題, 当軌綫始端受到限制时,也将得到相应的結論.

若 T 不固定, 結論仍然有效, 此因最优軌綫总在某一确定时刻到达 $x^1 \in S_1$, 故可将此时刻取为固定的时刻 T.

結論推証过程几乎完全于以上有关各节及文献[4]同, 故此处从略. 此外, 关于边界条件及乘子性質的討論, 也仍然有效.

还应指出,这里所得的結論,并不能包括前面快速系統的結果. 因为,对于快速系統,当 $t = T$ 时,只有最优軌綫能达到 S_1, 从而式(42)不能成立. 正因为如此, 我們才采取了上面的作法.

参 考 文 献

[1] 錢学森,工程控制論,科学出版社,北京,1958.
[2] Понтрягин, Л. С. 等, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва, 1961.
[3] 宋健、韓京清,綫性最速控制系統的分析与綜合理論,数学进展,1962 年,第 5 卷,第 4 期.
[4] 张嗣瀛,軌綫末端受限制时的最优控制問題,自动化学报,1963 年,第 1 卷,第 2 期.
[5] Розоноэр, Л. И., Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, *Автоматика и Телемеханика*, **20** (1959) № 10, 11, 12.

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH CONSTRAINTED CONDITIONS AT BOTH ENDS OF THE TRAJECTORY

Chang Szu-ying

In this paper the problems of minimal time control are studied by using the method in [4] for the case when both ends of the trajectory are constrained by some giving manifolds. The necessary and sufficient conditions for optimality are obtained. The boundary conditions of the related systems of differential equations are determined and their geometrical senses, i.e. the transversality conditions, are explained. In addition, the characteristics of the Lagrange multipliers used in this paper are discussed.

The method may also be applied to the optimal control problems with constrained conditions at both ends in general sense.