

# 关于线性快速控制的一个计算方法

戴汝为 李宝毅 王玉莹

## 摘要

本文以“不变嵌入原理”为基础,对控制量受到几种类型限制情形,提出求线性快速最优控制的一个逐次逼近法,还给出了有关过渡过程时间的估计公式。文中附有非显然情形的计算例子。

## 引言

被控对象是线性环节的快速控制问题<sup>[1-3]</sup>,国内外曾经进行了大量研究,其中大都偏重于数学理论。从工程应用角度看,如果能定量地求出开路控制,则在某些情况下,也能满足要求。大家知道,根据极大值原理<sup>[4,5]</sup>,快速最优控制可由伴随方程完全确定,但是极大值原理并没有给出如何依据系统的初始状态,确定伴随方程的初始条件 $\phi_0$ 。近几年来,国外提出了不少求快速最优控制的方法<sup>[6-14]</sup>,其中文献[6-8]成功地利用了等时区域的性质给出求 $\phi_0$ 的逐次逼近法,但计算起来仍不容易达到所需精确度。本文提出另外一种建议,给出另一种计算方法,所得结论可以作为用极大值原理处理快速控制问题的一些补充。

## 一、到达有界闭凸面体的快速控制

假设被控制对象的方程为:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad (1)$$

初始状态为 $x(t=0) = x(0)$ ,其中 $x$ 表示 $n$ 维状态向量, $u$ 表示 $r$ 维控制向量, $A(t)$ 和 $B(t)$ 分别表示 $n \times n$ 阶与 $n \times r$ 阶矩阵,并且都是 $t$ 的连续函数。给定一个包含原点在内的有界闭凸面体(严格凸) $\Omega$ ,对系统提出的质量指标为:当给定初始状态 $x(0)$ , $x(0) \notin \Omega$ ,要求经过适当控制,系统以最短时间从 $x(0)$ 运转到 $\Omega$ 。必须对控制量附加一定的限制条件,这类控制问题才有意义。在工程领域内,通常遇到的是幅值限制 $|u_i| \leq M (i = 1, 2, \dots, r)$  ( $u_i$ 表示控制向量 $u$ 的第 $i$ 个分量)以及能量限制 $\int_0^T |u_i|^2 d\tau \leq M^2 (i = 1, 2, \dots, r)$  ( $T$ 表示过渡过程时间)。我们把控制向量的限制条件概括地描述如下:

$$\left[ \int_0^T |u_i|^p d\tau \right]^{1/p} \leq M, \quad (2)$$

$i = 1, 2, \dots, r, 1 < p \leq +\infty$ ,其中 $M$ 是一个正值常数。式(2)当 $p = 2$ 时,表示能量限制;当 $p = +\infty$ 时,表示幅值限制

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u_i(t)| \leq M, \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (3)$$

以下把满足公式(2)并且各分量都属于分段連續函数类的控制簡写为  $u \in U$ .

在控制作用下,方程(1)的解可以写成

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau, \quad (4)$$

其中  $X^{-1}$  是  $X$  的逆矩阵,  $X(t)$  是式(1)的基本解矩阵,它满足方程

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X, \quad X(0) = E. \quad (E \text{ 是单位方阵})$$

在  $n$  維状态空间中,考虑下述点集合

$$C[x(0), t] = \left\{ X(t)x(0) + \int_0^t X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau; u \in U \right\}. \quad (5)$$

关于集合  $C[x(0), t]$  的性质,在文献 [3, 4, 18, 19] 中已研究得非常透彻,在适当条件下<sup>[3]</sup>,其主要性质可归纳为:(1)  $C[x(0), t]$  是閉的凸面体,而且具有严格凸性;(2)  $C[x(0), t]$  随着  $t$  的变化而連續增加.通常把  $C[x(0), t]$  称为等时区域.等时区域的引入体现了不变嵌入原理的应用.把从给定初始状态以最短时间到达给定区域(或给定点)的问题,嵌入到从给定初始状态出发,在时间间隔  $[0, t]$  内所有系统可能到达的那些状态的总体中,并利用总体間相互內在的联系,就有可能使孤立进行研究难以获得解决的问题便于进行处理.分析了有关等时区域的性质后,快速问题就可以被理解成:在  $n$  維空间中,给定一个有界閉凸面体  $\Omega$ ,另外有一个随着  $t$  的变化而連續变化的閉凸面体(严格凸)  $C[x(0), t]$ ,使  $C[x(0), t]$  和  $\Omega$  有公共点的最短时间  $T_0$  以及与公共点对应的控制,就是使系统由  $x(0)$  运转到  $\Omega$  的最短时间和最优控制.以后用  $\partial C[x(0), t]$  和  $\partial \Omega$  分别表示  $C[x(0), t]$  和  $\Omega$  的边界面.两个严格凸面体  $C[x(0), T_0]$  和  $\Omega$  的唯一公共点一定在两者的边界面上,且在該点满足“横截条件”.

在这里,我們进一步利用不变嵌入原理把控制量取值的区域  $U$  扩大成以下一族相似区域

$$U(\alpha) = \{\tilde{u} = \alpha u; u \in U\}, \quad (6)$$

其中  $\alpha$  是一个正实数

$$0 \leq \alpha < +\infty. \quad (7)$$

当  $\alpha$  在  $[0, \infty)$  內变化时,  $U(\alpha)$  表示一族相似的区域.如果  $\alpha = 1$ ,  $U(\alpha = 1)$  即表示原先给定的区域  $U$ .对  $U(\alpha)$  进行分析,并充分利用一族間相互的联系,就能比較方便地給出求最优控制的步骤.对于形式如式(2)的限制条件,只要把限制条件换成

$$\left[ \int_0^T |u_i|^p d\tau \right]^{1/p} \leq \alpha M, \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (8)$$

也能达到同样的目的.

把控制区域扩大后,可以相应地引入等值区域如下:

$$D_\alpha[x(0), t] = \left\{ X(t)x(0) + \int_0^t X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)\tilde{u}(\tau) d\tau; \tilde{u} \in U(\alpha) \right\}. \quad (9)$$

由式(6),可以把  $D_\alpha[x(0), t]$  表示成

$$D_\alpha[x(0), t] = \left\{ X(t)x(0) + \alpha \int_0^t X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau; u \in U \right\}. \quad (10)$$

上述关系表明: 把  $U$  扩大成  $U(\alpha)$ , 其结果相当于把等时区域嵌入一族相似的等时区域中. 显然, 等值区域  $D_\alpha[x(0), t]$  与  $C[x(0), t]$  同样具有上述两点性质, 而且, 取定同一  $t$  时, 当  $\alpha' > \alpha$ , 则

$$D_{\alpha'}[x(0), t] \supset D_\alpha[x(0), t]. \quad (11)$$

引入等值区域的优点, 在以后分析中将体现出.

对于给定的初始状态  $x(0)$ , 任取正数  $T$  作为过渡过程时间, 并让  $\alpha$  变化, 则一定可以找到一个  $\alpha_0$  使  $D_{\alpha_0}[x(0), T]$  与  $Q$  有唯一的公共点. 显然,  $T$  与  $\alpha_0$  有如下对应关系:

$$\begin{aligned} T < T_0, & \quad \alpha_0 > 1, \\ T = T_0, & \quad \alpha_0 = 1, \\ T > T_0, & \quad \alpha_0 < 1, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $T_0$  表示系统由  $x(0)$  出发到达  $Q$  所需最短时间. 用  $\partial D_\alpha[x(0), T]$  表示  $D_\alpha[x(0), T]$  的边界. 边界上的点所对应的控制, 由过该点支托超平面外法线方向向量  $\eta$  确定. 以  $u^0(\eta, \tau)$  表示与  $\partial D_\alpha[x(0), T]$  上点对应的控制, 它的  $r$  个分量表达式为<sup>[9]</sup>

$$u_i^0(\eta, \tau) = \frac{\alpha M |\eta \cdot h_i(T, \tau)|^{q-1} \text{sign } \eta \cdot h_i(T, \tau)}{\left( \int_0^T |\eta \cdot h_i(T, \tau)|^q d\tau \right)^{\frac{q-1}{q}}}, \quad (i = 1, 2, \dots, r, 0 \leq \tau \leq T) \quad (13)$$

其中  $h_i(T, \tau)$  代表  $X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)$  的第  $i$  列, “ $\cdot$ ” 表示两个向量的标量乘积,  $q$  满足  $(1/q) + (1/p) = 1$ ,

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

当  $p \rightarrow +\infty$  时, 可得到幅值受限制时控制量的表达式:

$$u_i^0(\eta, \tau) = \alpha M \text{sign } \eta \cdot h_i(T, \tau). \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (14)$$

对于给定的初始状态  $x(0)$ , 取定任意的正数  $T$  后, 令

$$z(T, \eta) = \int_0^T X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)u^0(\eta, \tau) d\tau. \quad (15)$$

考虑函数

$$f(\alpha, \eta, y) = \eta \cdot \{X(T)x(0) + \alpha z(T, \eta) - y(-\eta)\}, \quad (16)$$

其中  $y(-\eta) \in \partial Q$ , 并且  $\partial Q$  过  $y(-\eta)$  点的外法线方向向量为  $-\eta$ . 如果仅考虑满足下列条件的  $\eta$

$$\eta \cdot \{X(T)x(0) - y(-\eta)\} < 0, \quad (17)$$

则由于  $\eta \cdot z(T, \eta) > 0$  恒成立,  $f(\alpha, \eta, y)$  是  $\alpha$  的连续单调增函数, 故当  $\alpha$  增加时,  $f(\alpha, \eta, y)$  有唯一的零点. 现在来分析使下式

$$X(T)x(0) + \alpha_0(\eta_0)z(T, \eta_0) - y(-\eta_0) = 0 \quad (18)$$

成立的  $\alpha_0$  所具有的性质. 对于任意一个非零向量  $\eta (\eta \neq \eta_0)$ , 当  $\alpha = \alpha_0$  时, 根据式 (13) 或式 (14), 由  $\eta$  所决定的控制将对应于  $\partial D_{\alpha_0}[x(0), T]$  上的某点  $A$ . 这时, 由  $-\eta$  决定  $\partial Q$  上的一点  $B$ , 由于  $D_{\alpha_0}[x(0), T]$  与  $Q$  只有一个公共点,  $B$  与  $A$  的连线必然包含  $D_{\alpha_0}[x(0), T]$  或  $Q$  的内点. 根据这两个集合的严格凸性, 对于  $\eta \neq \eta_0$ ,  $\eta$  与向量  $\overline{AB}$  之

間的夹角大于  $\pi/2$  或  $\eta \cdot \overrightarrow{AB} < 0$ , 于是下述关系均成立(参看图 1)

$$f(\alpha_0, \eta, y(-\eta)) = \eta \cdot \{X(T)x(0) + \alpha_0 z(T, \eta) - y(-\eta)\} > 0. \quad (19)$$

由式(17), 以及  $f(\alpha, \eta, y)$  是  $\alpha$  的連續单調递增函数, 故可断定在 0 与  $\alpha_0$  之間, 一定存在一个  $\alpha$ , 使  $f(\alpha, \eta, y(-\eta)) = 0$ . 由这个关系式解出  $\alpha(\eta)$

$$\alpha(\eta) = \frac{-\eta \cdot [X(T)x(0) - y(-\eta)]}{\eta \cdot \int_0^T X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)u^0(\eta, \tau) d\tau}. \quad (20)$$

当  $\eta = \eta_0$ , 上式取极大值  $\alpha_0(\eta_0)$ . 因此得出結論: 对給定的  $T$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_0(\eta_0) &= \max_{\eta} \alpha(\eta) = \\ &= \frac{-\eta \cdot [X(T)x(0) - y(-\eta)]}{\eta \cdot \int_0^T X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)u^0(\eta, \tau) d\tau}. \end{aligned} \quad (21)$$

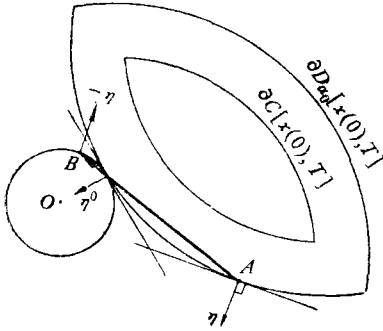


图 1.

如果  $D$  退化成一个点, 即原点, 那么就变成要求系統从  $x(0)$  出发以最短時間到达原点的快速控制問題. 这时, 只要在公式(21)中把  $y(-\eta)$  换成 0, 就得到相应的关系式

$$\tilde{\alpha}_0(\eta_0) = \max_{\eta} \frac{-\eta \cdot X(T)x(0)}{\eta \cdot \int_0^T X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)u^0(\eta, \tau) d\tau}. \quad (22)$$

上式还可以改写成

$$\sigma_0 = \frac{1}{\tilde{\alpha}_0(\eta_0)} = \min_{\eta} \frac{\eta \cdot \int_0^T X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)u^0(\eta, \tau) d\tau}{-\eta \cdot X(T)x(0)}. \quad (23)$$

对于控制量幅值受限制情形(即  $p = +\infty$ ), 令  $\tilde{\eta} = X(T)' \eta (X(T)'$  表示  $X(T)$  的轉置矩陣), 并且假定  $\tilde{\eta}$  满足  $-\tilde{\eta} \cdot x(0) = 1$ , 那么由上式及式(12), 从  $x(0)$  以最短時間到达原点的快速控制, 可以决定如下:

$$1 = \sigma_0 = \min_{\tilde{\eta}} \tilde{\eta} \cdot \int_0^T X^{-1}(\tau)B(\tau)u^0(\tilde{\eta}, \tau) d\tau. \quad (24)$$

上式給出了文献[15, 16]中首先得到的結果.

最后, 順便指出, 上述結論可以推广到控制量限制在某一凸閉域上取值, 以及要求系統以最短時間运轉到指定状态  $\bar{x}$  或运动目标  $x_1(t)$  的情形. 这时, 分析下述集合

$$D(t) = \left\{ \int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau; u \in U \right\} \quad (25)$$

将比較方便. 根据完全类似的方法, 只要考虑  $D(t)$  与函数  $g(t) = X^{-1}(t)[x_1(t) - X(t)x(0)]$  之間的关系即可.

## 二、具有附加損耗条件的快速控制

在这一节里, 除考虑控制量的幅值受限制外, 对总的能量等損耗还同时附加一定的条件. 另外为叙述簡單起見, 我們只討論要求系統以最短時間到达坐标原点的情形.

假設控制量必須滿足下述两个条件:

(1)  $u \in U$ ,  $U$  是由  $|u_i| \leq 1$  ( $i = 1, \dots, r$ ) 决定的单位正方体,

$$(2) \int_0^T \Phi(u) d\tau \leq M,$$

其中  $\Phi(u)$  是定义在包含  $U$  的开域上的连续非负凸函数, 且在  $U$  的每一个顶点上取极大值, 特别是形式如  $\sum_{i=1}^r \lambda_i |u_i|^p$  的  $\Phi(u)$ , 就属于这种类型 (其中  $\lambda_i$  是非负的常数,  $p > 1$ ), 并且假设  $\Phi(u)$  的形式使快速最优控制唯一地被确定.

首先我们引进第  $n+1$  个坐标, 它由下述方程确定

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = \Phi(u), \quad x_{n+1}(0) = 0. \quad (26)$$

以下用  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  表示  $n+1$  维向量. 在  $n+1$  维空间中, 定义如下点集合

$$D(t) = \left\{ \int_0^t X^{-1}(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, \int_0^t \Phi(u) d\tau : u \in U \right\}. \quad (27)$$

关于  $D(t)$  的性质<sup>[7]</sup>, 可简单归纳为: (1)  $D(t)$  是闭的凸面体 (严格凸); (2) 当  $t' > t$ ,  $D(t') \supset D(t)$ ; (3) 在  $x_{n+1} \geq 0$  的半空间内,  $D(t)$  随着  $t$  的增大连续向外扩张. 分析了有关  $D(t)$  的性质后, 快速问题可作如下解释: 设  $l$  是  $n+1$  维空间中过  $-x(0)$  且平行于  $x_{n+1}$  轴的线段, 记作

$$l = \{ \bar{x} = (-x(0), \xi) : 0 \leq \xi \leq M \}, \quad (28)$$

其中  $x(0)$  是给定的初始状态,  $M$  是总损耗容许值. 在  $n+1$  维空间中, 有一个随着  $t$  增大连续向外扩张的闭凸面体, 使线段  $l$  与  $D(t)$  具有公共点的最小时间  $T_0$ , 亦即使系统由  $x(0)$  运转到原点且总的损耗不超过  $M$  的最小时间. 由于  $D(t)$  具有凸性,  $l$  和  $D(T_0)$  的公共点一定在  $D(T_0)$  的边界面  $\partial D(T_0)$  上. 对于  $\partial D(T)$  上的每一点  $\bar{x}^*$ , 设  $D(T)$  过该点支托超平面的外法向量为  $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \eta_{n+1})$ , 则由几何直观, 或参看文献[7],  $\eta_{n+1} \leq 0$ , 并且

$$\bar{\eta} \cdot \bar{x}^* \geq \bar{\eta} \cdot \bar{x}, \quad (29)$$

其中  $\bar{x} \in D(T)$ . 换句话说, 当  $x = \bar{x}^*$  时, 函数  $\bar{\eta} \cdot \bar{x}$  在  $D(T)$  上达到极大值. 由公式(27),  $\bar{\eta} \cdot \bar{x}$  可表示为

$$\bar{\eta} \cdot \bar{x} = \int_0^T \eta \cdot X^{-1}(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + \int_0^T \eta_{n+1} \Phi(u) d\tau, \quad (30)$$

这里  $\eta$  表示一个  $n$  维向量,  $\bar{\eta} = (\eta, \eta_{n+1})$ . 由于假设上式的极大值唯一的确定, 而与  $\partial D(T)$  上的点所对应的控制是由该点支托面的外法向量  $\bar{\eta}$  完全确定, 故可把这种控制表示成  $u^0(\bar{\eta}, \tau)$ . 在这种情况下,  $D(T)$  是严格凸的. 当  $D(T)$  随着  $T$  的加大而扩大时,  $\partial D(T_0)$  和包含  $l$  的直线只可能有一个公共点. 这时, 可能发生三种情形, 即:  $\xi < M$ ,  $\xi = M$  或  $\xi > M$  (对于第三种情形, 所提问题没有解, 以下将不加以讨论). 如果  $\xi < M$ , 则  $l$  在  $D(T)$  的支托面上,  $\eta_{n+1} = 0$ , 故可归结为不考虑损耗的快速问题. 与第一节情形相同, 以下假定  $\xi = M$ . 为方便起见, 令

$$\bar{x}(0) = (-x_1(0), -x_2(0), \dots, -x_n(0), M), \quad (31)$$

于是主要在于求  $D(T_0)$  在  $\bar{x}(0)$  点的支托超平面外法线向量. 对于任意取定的  $T$ ,  $\bar{x}(0)$  不一定属于  $\partial D(T)$ . 这里利用“不变嵌入原理”, 考虑  $\bar{x}(0)$  沿着过原点和  $\bar{x}(0)$  的射线  $l$

变化

$$L = \bar{\sigma}\bar{x}(0), \quad (32)$$

其中  $0 \leq \bar{\sigma} \leq +\infty$ 。这样一来, 虽然  $\bar{x}(0) \notin L$ , 但是在  $L$  上一定可以找到一点  $\bar{\sigma}_0\bar{x}(0)$ , 使

$$\bar{\sigma}_0\bar{x}(0) \in \partial D(T). \quad (33)$$

当  $T > T_0$  时,  $\bar{\sigma}_0 > 1$ ,  $T < T_0$  时,  $\bar{\sigma}_0 < 1$ ,  $T = T_0$  时,  $\bar{\sigma}_0 = 1$ 。用类似于上节的方法, 满足式(32)的  $\bar{\sigma}_0$ , 可用下面公式求得

$$\bar{\sigma}_0 = \min_{\bar{\eta}} \bar{\sigma} = \min_{\bar{\eta}} \frac{\eta \cdot \int_0^T X^{-1}(\tau)B(\tau)u^0(\bar{\eta}, \tau) d\tau + \eta_{n+1} \int_0^T \Phi(u^0(\bar{\eta}, \tau)) d\tau}{\bar{\eta} \cdot \bar{x}(0)}, \quad (34)$$

其中  $\bar{\eta} \cdot \bar{x}(0) > 0$ 。

令  $\bar{\alpha} = \frac{1}{\bar{\sigma}}$ , 则公式(34)可改为

$$\bar{\alpha}_0 = \max_{\bar{\eta}} \frac{\bar{\eta} \cdot \bar{x}(0)}{\eta \cdot \int_0^T X^{-1}(\tau)B(\tau)u^0(\bar{\eta}, \tau) d\tau + \eta_{n+1} \int_0^T \Phi(u^0(\bar{\eta}, \tau)) d\tau}. \quad (35)$$

根据上式, 求得与  $\bar{\alpha}_0 = 1$  对应的  $\bar{\eta}$ , 就决定了最优控制。

对于附加损耗不超过容许值的快速问题,  $D(t)$  的结构比较复杂, 下面举一个例子来加以说明。

例: 假设被控对象的方程为

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad x_1(0) = C_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u, \quad x_2(0) = C_2,$$

控制量  $u$  满足: (1)  $|u| \leq u_a$ , (2)  $\int_0^T u^2 d\tau \leq M$ 。要求系统以最短时间到达原点。根据以上分析,  $u^0$  必须满足

$$(\eta_1\tau - \eta_2)u^0 - \eta_3(u^0)^2 = \max_u \{(\eta_1\tau - \eta_2)u - \eta_3u^2\},$$

式中  $\eta_3 \geq 0$  可以分为两种情形:

$$(1) \eta_3 > 0, \quad u^0 = \begin{cases} u_a, & \frac{\eta_1\tau - \eta_2}{2\eta_3} \geq u_a, \\ \frac{\eta_1\tau - \eta_2}{2\eta_3}, & \left| \frac{\eta_1\tau - \eta_2}{2\eta_3} \right| < u_a, \\ -u_a, & \frac{\eta_1\tau - \eta_2}{2\eta_3} \leq -u_a; \end{cases}$$

$$(2) \eta_3 = 0, \quad u^0 = u_a \operatorname{sign}(\eta_1\tau - \eta_2).$$

根据最优控制的形式可以画出  $D(t)$ , 如图 2 所示。图中  $u_a = \frac{1}{2}$ ,  $M = 1$ , 划綫区域表示划分控制量取值区域<sup>[20]</sup>。在不同区域内,  $D(t)$  的边界綫 (或称等时綫) 由不同方程描述 (如表 1 所示)。

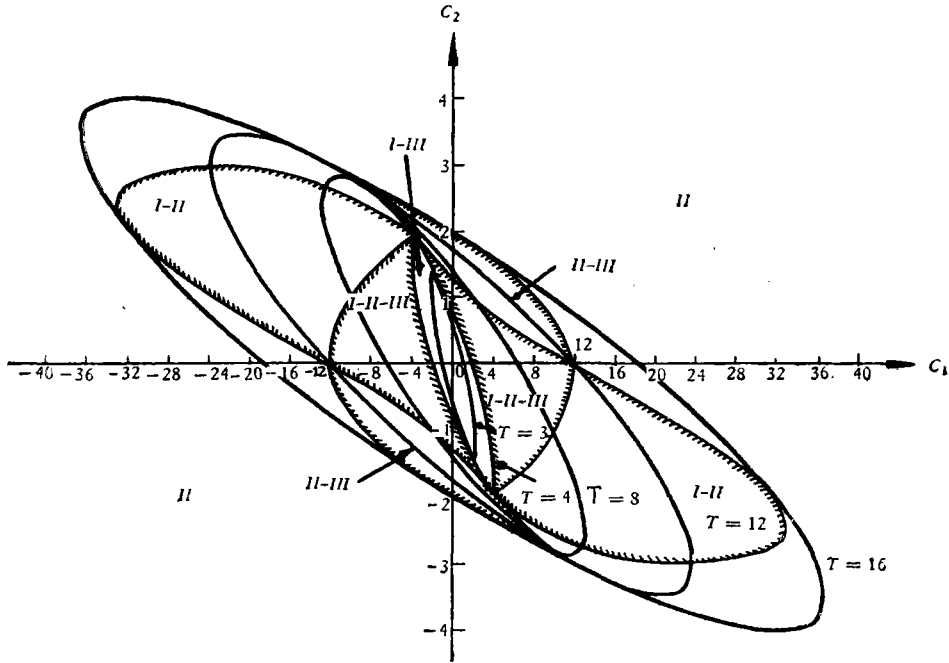


图 2.

表 1.

区 域	控制量的形式	等 时 线 方 程
I-III		$C_1 = \pm \frac{C_2^2}{4u_a} - \frac{T}{2} C_2 \mp \frac{u_a T^2}{4}$
I-II		$C_1 = \pm \frac{u_a T^2}{2} - T(C_2 \pm u_a T) + \frac{4(C_2 \pm u_a T)^2}{9(\pm 2u_a C_2 - u_a^2 T + M)}$
II-III		$C_1 = \mp \frac{u_a T}{2} + \frac{4(C_2 \mp u_a T)^2}{9(\pm 2u_a C_2 - u_a^2 T - M)}$
I-II-III		$C_1 = \pm \frac{u_a}{4} \left( \frac{C_2 \mp T}{u_a} \right)^2 \mp \frac{3}{16} u_a \left( \frac{M}{u_a^2} - T \right)^2 \mp \frac{u_a T^2}{2}$
II		$12C_1^2 + 12TC_1C_2 + 4T^2C_2^2 - T^3 = 0$

### 三、求最优控制的逐次逼近法

根据以上分析,把求最优控制问题归结为求公式(21),(22)和(35)的极大值  $\alpha_0(\eta_0)$ ,  $\tilde{\alpha}_0(\eta_0)$  和  $\bar{\alpha}_0(\eta_0)$ ,这已经成为求自变量在开域上变化的多元函数极值问题。以下考虑用快速上升法求  $\alpha_0(\eta_0)$  (求  $\tilde{\alpha}_0$  与  $\bar{\alpha}_0$  的情形完全类似)。给定  $T$  后,  $\alpha$  是  $\eta$  的函数  $\alpha(\eta)$ 。先适当地选择一个初始的  $\eta(0)$ , 然后沿着  $\alpha[\eta(0)]$  的梯度方向修改  $\eta(0)$  以保证  $\alpha$  增大。如此反复进行直到  $\eta$  使  $\alpha(\eta)$  达到极大值为止。换句话说,把  $\eta$  看作参变量  $s$  的函数,而且满

足方程

$$\frac{d\eta(s)}{ds} = k \text{grad } \alpha[\eta(s)], \quad (36)$$

式中  $k$  是正值常数, 或者是  $\eta$  和  $s$  的正值函数. 在给出式(36)的初条件  $\eta(0)$  时, 应注意式(17)的要求, 即

$$\eta(0) \cdot [X(T)x(0) - y(-\eta(0))] < 0. \quad (37)$$

于是  $\alpha[\eta]$  的极大点  $\eta_0$  可以由方程 (36) 的解求得  $[\eta_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \eta(s)]$ . 在应用快速上升法时, 要求  $\text{grad } \alpha(\eta)$  存在且连续. 这里可以直接利用文献 [8] 中已经得到的结论. 由公式 (20),

$$\text{grad } \alpha(\eta) = \frac{-[X(T)x(0) - y(\eta)] - \alpha(\eta) \int_0^T X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)u^0(\eta, \tau) d\tau}{\eta \cdot \int_0^T X(T)X^{-1}(\tau)B(\tau)u^0(\eta, \tau) d\tau}. \quad (38)$$

根据式(36),

$$\frac{d\alpha[\eta(s)]}{ds} = \text{grad } \alpha[\eta(s)] \cdot \frac{d\eta(s)}{ds} = k \text{grad } \alpha[\eta(s)] \cdot \text{grad } \alpha[\eta(s)]. \quad (39)$$

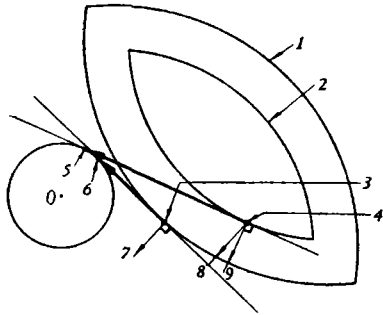


图 3.

- 1— $\partial D_{\alpha_{i+1}}[x(0), T], \alpha_{i+1} > \alpha_i$ ;
- 2— $\partial D_{\alpha_i}[x(0), T]$ ;
- 3— $X(T)x(0) + \alpha_{i+1}z(T, \eta^{(i+1)})$ ;
- 4— $X(T)x(0) + \alpha_i z(T, \eta^{(i)})$ ;
- 5— $y(-\eta^{(i)})$ ; 6— $y(-\eta^{(i+1)})$ ;
- 7— $\eta^{(i+1)}$ ; 8— $\eta^{(i+1)}$ ; 9— $\eta^{(i)}$

当  $\eta \neq \eta_0$  时,  $d\alpha/ds > 0$ ,  $\alpha$  是  $s$  的单调增函数. 当给定满足(37)的  $\eta(0)$  以后, 可以证明方程(36)的解恒满足(37). 在求解方程 (36) 时, 可以把微分方程化成差分方程, 因此求解是反复迭代的过程. 用  $\eta^{(i)}$  表示第  $i$  次迭代时的  $\eta$  值, 则对于充分小的  $\Delta$ ,

$$\eta^{(i+1)} = \eta^{(i)} + k \text{grad } \alpha[\eta^{(i)}] \Delta. \quad (40)$$

计算时, 可根据上述关系修改  $\eta$ . 这个关系的几何解释见图 3. 由于  $\alpha[\eta(s)]$  是  $s$  的单调增函数, 因此只要  $\Delta$  取得合适, 就可以保证  $\alpha[\eta^{(i+1)}] > \alpha[\eta^{(i)}]$ . 在求解过程中, 可从  $T < T_0$  出发, 并不需要求出  $\lim_{s \rightarrow \infty} \eta(s)$  的值. 当进行到  $s = s_i$  时, 只要  $\alpha[\eta(s_i)] > 1$ , 就不必再继续下去, 因为根据  $d\alpha/ds > 0$ , 再增大  $s$ , 就必然使  $\alpha$  更大.

发现  $\alpha[\eta(s_i)] > 1$  后, 就修改  $T$ , 把  $T$  增加一个  $\Delta T$  后, 再进行计算. 这样交替地修改  $\eta$  和  $T$  值, 就能较快地搜索到与  $\alpha_0 = 1$  对应的  $\eta_0$ . 这个步骤可以形象地用图 4 表示. 在图 4 中,  $T_1 < T_2 < \dots < T_i$ . 可以看出, 上述计算步骤特别适合于用快速电子数字计算机进行计算.

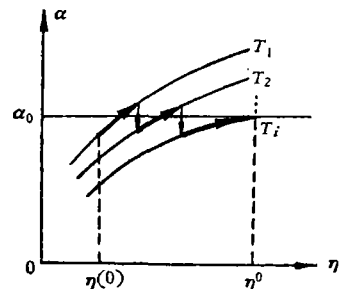


图 4.

#### 四、关于过渡过程时间的估计问题

控制量幅值受到限制时, 求最优控制较繁复. 对于要求系统从初始状态  $x(0)$  以最短时间到达原点问题,



如果能够估计出使系统由  $x(0)$  运转到原点的最短时间  $T_0$  的下界, 那么利用上一节的方法求最优控制时, 将可减少计算的工作量。利用第一节中把控制区域加以扩大或缩小的想法, 便可给出由初始状态估计过渡过程时间的表达式。对于总的损耗不超过容许值且控制量幅值受限制的情形, 显然若  $M = \infty$  (这表示总损耗没有限制), 则系统从  $x(0)$  到达原点的最短时间, 一定要比总的损耗有限制时所需的最短时间少。用  $U$  表示  $r$  维空间中由  $|u_i| \leq 1 (i = 1, 2, \dots, r)$  决定的正方体。如果能够找到一个  $V$ , 使  $V \supset U$ , 那么在  $V$  中挑选控制使系统由  $x(0)$  到达原点的最短时间要比在  $U$  中挑选控制使系统由  $x(0)$  到达原点的最短时间小。利用这个明显的事实, 便可较方便地给出求  $T_0$  下界的表达式。以下我们对此作扼要的分析。

为了简单起见, 只考虑有一个控制量的情形, 即方程(1)中,  $B(t)$  是  $n \times 1$  阶矩阵, 且控制量  $u$  满足限制条件  $|u| \leq 1$ 。如果把  $u$  的限制条件换成

$$\frac{1}{T} \int_0^T u^2 d\tau \leq 1, \quad (41)$$

则稍加分析, 就会发现当  $u$  为幅值等于 1 的继电器式控制作用时, 式(41)仍然成立。因此满足(41)的最优控制, 使系统由  $x(0)$  到达原点的最短时间, 一定比  $T_0$  小。对于形式如(41)的限制条件, 初始状态  $x(0)$  和最短过渡过程时间  $T_1$  的关系, 可以表示成

$$x(0) \cdot P^{-1}(T_1)x(0) = T_1, \quad (42)$$

式中

$$P(T_1) = \int_0^{T_1} X^{-1}(\tau)B(\tau)B'(\tau)X^{-1}(\tau)' d\tau. \quad (43)$$

给定初始状态  $x(0)$ , 求出方程(43)的最小正根后, 就可得到关于  $T_0$  的下界估计值。

当被控对象为常系数线性环节所描述, 而其特征方程的根都是实部为负的单根时, 可以求得估计  $T_0$  下界的公式。化成标准形式后, 被控对象方程变为

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x(t=0) = x(0). \quad (44)$$

控制量  $u$  满足限制条件  $|u| \leq 1$ 。

$$A = \begin{pmatrix} -\zeta_1 & v_1 & & & & \\ -v_1 & -\zeta_1 & & & & \\ & & -\zeta_2 & v_2 & & 0 \\ & & -v_2 & -\zeta_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\zeta_r & v_r \\ & & & & & 0 & -v_r & -\zeta_r \\ & & & & & & & & -\zeta_{2r+1} & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & -\zeta_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

在方程(44)中, 用  $\zeta_{\max}$  代换其余的  $\zeta$  后, 其系数所构成的方阵用  $C$  表示。另外用  $n$  个独立控制分量  $v_i$  代换  $b_i u (i = 1, 2, \dots, n)$ , 用  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  表示  $n$  维控制向量, 这样就得到新的方程

$$\frac{dy}{dt} = Cy + v. \quad (45)$$

考虑  $V$  为下列方程所确定的一个圆球体

$$v \cdot v \leq M^2 = \sum_{i=1}^n |b_i|^2. \quad (46)$$

换句话说,  $v \cdot v = M^2$  表示长方体  $|v_i| \leq |b_i| (i = 1, 2, \dots, n)$  的外接圆球面, 因此  $V$  包含着长方体, 如图 5 所示. 在方程 (45) 中, 假设  $n$  维控制向量  $v$  满足条件

$$v \in V. \quad (47)$$

如果  $T_0$  表示控制量  $|u| \leq 1$ , 使 (44) 所描述的系统由  $x(0)$  运行到原点的最短时间,  $T_1$  表示控制向量满足式 (47), 使式 (45) 所描述的系统由  $x(0)$  运行到原点的最短时间, 则

$$T_0 \geq T_1. \quad (48)$$

对于  $V$  是圆球体的情形, 则当  $x(0)$  给定后, 即可求出  $T_1$ .

方程 (45) 的解为

$$y(t) = Y(t) \left\{ x(0) + \int_0^t Y^{-1}(\tau) v(\tau) d\tau \right\}, \quad (49)$$

式中  $Y(t)$  表示式 (45) 的基本解矩阵

$$Y(t) = e^{-\zeta_{\max} t} \begin{pmatrix} \cos v_1 t & \sin v_1 t & & & & \\ -\sin v_1 t & \cos v_1 t & & & & \\ & & \cos v_2 t & \sin v_2 t & & \\ & & -\sin v_2 t & \cos v_2 t & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & \cos v_r t & \sin v_r t \\ & & & & -\sin v_r t & \cos v_r t \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = e^{-\zeta_{\max} t} \Psi(t).$$

对于  $v \in V$  的情形, 最优控制可以求得如下

$$v^0(\eta, \tau) = - \frac{M \Psi^{-1}(\tau)' \eta}{\|\Psi^{-1}(\tau)' \eta\|} = \frac{-M \bar{\Psi}^{-1}(\tau)' \eta}{\|\eta\|}, \quad (50)$$

式中  $\eta$  为  $n$  维非零常数向量,  $\|\eta\| = (\eta \cdot \eta)^{1/2}$ ,  $\Psi^{-1}(\tau)$  为  $\Psi(\tau)$  的逆矩阵,  $\Psi^{-1}(\tau)'$  为  $\Psi^{-1}(\tau)$  的转置矩阵. 如果  $T = T_1$  时, 系统状态到达原点,  $y(T_1) = 0$ , 则由式 (49) 与式 (50), 我们得到

$$x(0) = M \frac{\eta}{\zeta_{\max} \|\eta\|} (e^{\zeta_{\max} T_1} - 1). \quad (51)$$

由此便得到关于  $T_0$  的下界的估计公式

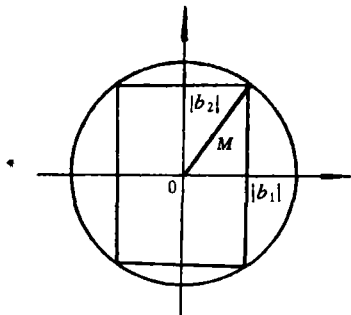


图 5.

$$T_1 = \frac{1}{\zeta_{\max}} \ln \left( 1 + \frac{\zeta_{\max}}{M} \|x(0)\| \right). \quad (52)$$

如果把式(41)改成

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^n v_i^2(\tau) \right] d\tau \leq \sum_{i=1}^n b_i^2, \quad (53)$$

其中  $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为  $n$  维控制向量  $v$  的分量, 那么在式(53)条件下, 可求得类似于式(42)的表达式

$$\sum_{i=1}^r \frac{2\zeta_i [x_i^2(0) + x_{i+1}^2(0)]}{e^{2\zeta_i T_1} - 1} + \sum_{i=2r+1}^n \frac{2\zeta_i x_i^2(0)}{e^{2\zeta_i T_1} - 1} = T_1 \sum_{i=1}^n b_i^2. \quad (54)$$

根据上式, 由给定的初始状态可求得  $T_0$  的估计值  $T_1$ .

当控制量为一个  $r$  维向量时, 则用类似的方法, 也同样可以得到关于过渡过程时间的估计式. 这里对此不再加以叙述.

## 五、例题和计算结果

下面讨论一个具体的例子. 我们知道, 即使被控对象是常系数线性环节, 但如包含有振荡环节, 则具体求出系统从初始状态到达原点的快速最优控制, 往往也很困难. 文献[11—13]曾用开关曲面投影法求解, 但有很大局限性. 现根据前几节所述方法进行计算. 设被控对象由一惯性环节和一振荡环节组成, 它的动态方程可用下列标准形式描述:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\zeta x_1 + v x_2 + \zeta u, \quad \frac{dx_2}{dt} = -v x_1 - \zeta x_2 + v u, \quad \frac{dx_3}{dt} = -r x_3 + u,$$

控制量  $u$  满足条件  $|u| \leq 1$ , 初始状态为  $x_1(0)$ 、 $x_2(0)$ 、 $x_3(0)$ , 要求系统达到的指定状态为坐标原点. 这时, 利用公式(22)进行计算, 在选定过渡过程时间  $T$  后, 取  $\eta(0) = -X(T)x(0)$ , 即能满足  $\eta(0) \cdot X(T)x(0) < 0$  的要求. 每当  $\eta$  的修改值取定后, 主要在于求函数  $\eta \cdot X(T)X^{-1}(\tau)B$  的零点. 如果利用高精度的模拟计算机求零点, 同时用快速电子数字计算机修改  $\eta$ , 将更为方便. 这种混合计算的例子, 可参看文献[8]. 我们对上述三阶系统的计算(求零点及修改  $\eta$  值)是在 104 型快速电子数字计算机上进行的. 计算结果表明, 只要选择适当的  $\Delta$ , 收敛是很快的. 计算过程中, 采用了一串试探性的  $\Delta$ :  $\Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_m$ , 由  $\Delta_m$  开始, 由大到小, 依次试探. 如果仍找不到使  $\alpha$  上升的  $\Delta$ , 则把所有  $\Delta_i$  都除以  $N (N > 1)$ , 然后再依次试探, 直至找到使  $\alpha$  上升的  $\Delta$  为止. 当  $T < T_0$  时, 一般只要迭代一两次就会使  $\alpha > 1$ , 于是即可增大  $T$ . 表 2 所列是对应于  $\zeta = 0.2$ 、 $v = \sqrt{1 - \zeta^2} \doteq 0.98$ 、 $\gamma = 1$ 、 $x_1(0) = x_2(0) = 3.82$ 、 $x_3(0) = 0$  的一些数值结果.

在计算中, 当  $\alpha > 1$  时, 即将  $T$  增加 0.01, 而当系统状态到达原点的指定邻域内, 即停止计算. 可以看出, 当  $T = 4.36$  时, 系统状态绝对值的平均值已不超过 0.023,  $\alpha$  和 1 之差不超过 0.00023. 通过以上计算, 可得下述简短结论: 对于快速控制这类两点边值问题, 采用快速上升法, 用数字计算机求解是有效的. 主要问题在于选取适当的  $\Delta$ , 但这是一维的试探问题, 困难不大. 另外, 把过渡过程时间取定, 把控制量的限制嵌入到一族中, 对计算也是方便和有利的. 如果要求系统到达的状态或到达的凸面体不随时间的变化而变化, 则采用交替修改  $\eta$  和  $T$  的步骤, 就能求得最优控制.

表 2.

$T$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\alpha$	$\Delta$	$x_1(T)$	$x_2(T)$	$x_3(T)$
3.50	$0.18189854 \times 10^1$	$-0.53826923 \times 10^0$	$-0.11535400 \times 10^0$	$0.13231378 \times 10^1$				
3.51	$0.18189854 \times 10^1$	$-0.53826923 \times 10^0$	$-0.11535400 \times 10^0$	$0.13194408 \times 10^1$				
.	.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.	.			
4.31	$0.14432028 \times 10^1$	$-0.13460713 \times 10^1$	$-0.56126150 \times 10^0$	$0.10010299 \times 10^1$				
4.32	$0.14432028 \times 10^1$	$-0.13460713 \times 10^1$	$-0.56126150 \times 10^0$	$0.99415895 \times 10^1$	1.0	$-0.18416945 \times 10^0$	$-0.20308740 \times 10^0$	$0.13498584 \times 10^{-1}$
4.32	$0.12590333 \times 10^1$	$-0.15491587 \times 10^1$	$-0.54776292 \times 10^0$	$0.10034734 \times 10^1$				
4.33	$0.13282592 \times 10^1$	$-0.15336091 \times 10^1$	$-0.43262390 \times 10^0$	$0.10016125 \times 10^1$				
4.34	$0.13282592 \times 10^1$	$-0.15336091 \times 10^1$	$-0.43262390 \times 10^0$	$0.99592885 \times 10^0$	2.0	$-0.61863878 \times 10^{-1}$	$-0.71454109 \times 10^{-1}$	$0.63360802 \times 10^{-1}$
4.34	$0.12045314 \times 10^1$	$-0.16765173 \times 10^1$	$-0.30590229 \times 10^0$	$0.99988098 \times 10^0$	1.0	$0.77068890 \times 10^{-1}$	$0.35570332 \times 10^{-1}$	$0.10852359 \times 10^0$
4.34	$0.12816003 \times 10^1$	$-0.16409470 \times 10^1$	$-0.19737870 \times 10^0$	$0.10030475 \times 10^1$	2.0	$-0.28883539 \times 10^{-1}$	$0.30012337 \times 10^{-1}$	$0.61969715 \times 10^{-1}$
4.34	$0.12238332 \times 10^1$	$-0.17009717 \times 10^1$	$-0.73439271 \times 10^{-1}$	$0.10060315 \times 10^1$	2.0	$-0.46618988 \times 10^{-2}$	$-0.59833881 \times 10^{-2}$	$0.60896362 \times 10^{-1}$
4.34	$0.12145094 \times 10^1$	$-0.17129385 \times 10^1$	$0.48353452 \times 10^{-1}$	$0.10079172 \times 10^1$				
4.35	$0.12145094 \times 10^1$	$-0.17129385 \times 10^1$	$0.48353452 \times 10^{-1}$	$0.10033397 \times 10^1$				
4.36	$0.12145094 \times 10^1$	$-0.17129385 \times 10^1$	$0.48353452 \times 10^{-1}$	$0.99868204 \times 10^0$	1.0	$-0.64887097 \times 10^{-1}$	$-0.44901932 \times 10^{-1}$	$0.39123002 \times 10^{-1}$
4.36	$0.11496223 \times 10^1$	$-0.17578404 \times 10^1$	$0.87476454 \times 10^{-1}$	$0.10002275 \times 10^1$		$-0.83101587 \times 10^{-2}$	$0.25968673 \times 10^{-2}$	$0.63105361 \times 10^{-1}$

在编写本文过程中, 岳子平、张宝康同志曾对计算工作进行了大力帮助, 谨此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] 钱学森, 工程控制论, 科学出版社, 北京, 1958, 第十章.
- [2] 周 恆, 关于利用继电器元件改进控制系统的一个问题, 力学学报, 1957年, 第1卷, 第3期.
- [3] 宋 健、韩京清, 线性最速控制系统的分析与综合理论, 数学进展, 1962年, 第5卷, 第4期.
- [4] Понтрягин, Л. С. и другие, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва, 1961, гл. 1.
- [5] Гамкрелидзе, Р. В., Теория оптимальных по быстрдействию процессов в линейных системах, *Изв. АН СССР, Сер. Матем.*, **22** (1958), № 4.
- [6] Neustadt, L. W., Synthesizing Time Optimal Control Systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **1** (1960), No. 4.
- [7] Neustadt, L. W., Time Optimal Systems with Position and Integral Limits, *J. Math. Anal. Appl.*, **3** (1961), No. 3.
- [8] Neustadt, L. W., On Synthesizing Optimal Control, 2nd IFAC, Basel Switzerland, 1963.
- [9] Ho Yu-chi, A Successive Approximation Technique for Optimal Control Systems Subject to Input Saturation, *Trans. ASME Series D*, **84** (1962), No. 1.
- [10] Paiewonsky, B., Time Optimal Control of Linear Systems with Bounded Controls, International Symposium on Non-linear Differential Equations and Non-linear Mechanics, Academic Press, New York and London, 1963, 333—365.
- [11] Flügge-Lotz, I. and Min Yin, The Optimal Response of Second-Order, Velocity-Controlled Systems with Contractor Control, *Trans. ASME Series D*, **83** (1961), No. 1.
- [12] Flügge-Lotz, I. and Titus, H. A., The Optimal Response of Full Third-Order Systems with Control, *Trans. ASME Series D*, **85** (1963), No. 1.
- [13] Flügge-Lotz, I. and Titus, H. A., Optimal and Quasioptimal Control of Third and Fourth Order Systems, 2nd IFAC, Basel Switzerland, 1963.
- [14] Красовский, Н. Н., О приближенном вычислении оптимального управления прямым методом, *ПММ*, **24** (1960), № 2.
- [15] Красовский, Н. Н., К теории оптимального регулирования, *Автоматика и телемеханика*, **18** (1957), № 11.
- [16] Красовский, Н. Н., Об одной задаче оптимального регулирования, *ПММ*, **21** (1957), № 5.
- [17] Bellman, R., Adaptive Control Processes: A Guided Tour, Princeton, 1961.
- [18] Bellman, R., On the "Bang-Bang" Control Problem, *Quart. Appl. Math.*, **14** (1956), No. 1.
- [19] Kreindler, E., Contributions to the Theory of Time Optimal Control, *J. Franklin Institute*, **275** (1963), No. 4.
- [20] Роземан, Е. А., О предельном быстрдействии следящих систем с ограниченным по мощности и скорости исполнительным элементом, *Автоматика и телемеханика*, **19** (1958), № 7.

## A COMPUTING METHOD FOR LINEAR TIME OPTIMAL CONTROL SYSTEMS

TAI JU-WEI LI POW-SO WANG YU-YIN

On the basis of the "principle of invariant imbedding", a successive approximation method is proposed to solve the linear time optimal controls subject to various constraints. Formulas for estimating the transient time are also given. An example for the non-trivial case is given.