

# 广义点变换法用于研究非线性脉冲系统<sup>1)</sup>

薛景璋

## 摘 要

广义点变换法是在差分相平面法和连续非线性系统的点变换法的基础上提出来的。它可用来全面地研究二阶非线性脉冲系统的自振荡工作(也可考虑推广到三阶)。和所列文献中各方法比较,不但在研究相轨迹的换接过程中要简便得多,而且能解决其它方法所不能解决的问题,即确定自振荡的稳定区域。

本文用广义点变换法详尽地研究了二阶非线性具有滞后环节的脉冲系统,绘制了曲线,利用它可很快地判别自振荡。此外,还推求了自振荡的稳定区域。

相平面法用于研究二阶非线性系统是一种行之有效的方法,在研究非线性连续系统时,它已成为一个完善的方法<sup>[1,2]</sup>。在非线性脉冲系统的研究工作中,近来也有应用相平面法者。由于在相平面上利用辅助线标出了时间间隔,从而能容易求出相轨迹的换接点<sup>[3,4]</sup>。在此基础上提出了等效滞后时间和极限带的概念,用它来分析自振荡,并得到结论:所有自振荡极圈必位于极限带之内<sup>[5]</sup>。R. E. 卡尔曼(Kalman)利用相平面法经过大量繁复计算,找到了非线性脉冲系统的自振荡工作状态,证明了它的稳定性。由于计算工作繁复庞大,他并不推荐这种方法<sup>[6]</sup>。J. A. 艾塞尔太因(Aseltine)从差分方程出发,绘制了差分相轨迹,可以求出各采样时刻系统输出讯号值<sup>[7]</sup>。还可利用它来研究自振荡<sup>[8]</sup>。

这些方法由于计算量大,使用上很多不便。同时一般说来,它们还无法用来判别自振荡的稳定性,无法求自振荡稳定区域和参数的临界值。

在研究非线性连续系统时,A. A. 安德罗诺夫(Андронов)创立了点变换法,可不必绘制或计算整条相轨迹,只须依次求出相轨迹的换接点即可。这样不但可大大缩减工作量,而且能判定自振荡的稳定性和求出参数的临界值。这个方法不能用于研究非线性脉冲系统。

本文吸取了所列参考文献的特点,试把点变换法加以扩展,用于研究二阶非线性脉冲系统,不但比文献中各种方法简便得多,而且能解决他们所不能解决的问题:确定自振荡的稳定区域和求参数的临界值<sup>2)</sup>。

## 一、广义点变换法

以图1的二阶非线性具有滞后环节的脉冲系统为例。系统中非线性元件具有理想继电器特性,脉冲元件带有零次插补装置。线性部分由积分环节、非周期环节和滞后环节组成,它们的放大系数和时间常数已归算为1,  $T_p$  为采样周期,  $\tau$  为滞后时间,都以标么值

1) 本文曾在1962年12月中国自动化学会学术报告会上宣读。

2) 参数临界值问题虽曾在会上宣读,但因限于篇幅,现已删去。

表示.

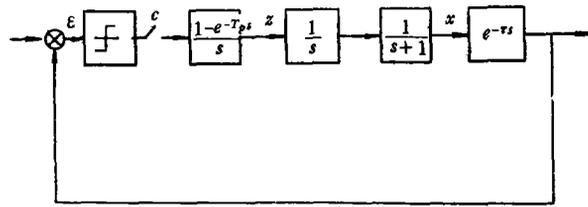


图 1.

运动方程可写为

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} = z(t). \quad (1)$$

当

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t) > 0 \text{ 时, } c(t) &= +1, \\ \varepsilon(t) < 0 \text{ 时, } c(t) &= -1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由于相平面的对称关系, 本文主要分析  $z(t) = +1$  的情况. 取  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ , 而它们的初始值为  $x_0, y_0$ . 当  $z(t) = +1$  时, 式(1)的解为

$$y = 1 - (1 - y_0)e^{-t}, \quad (3)$$

$$x = x_0 + t + (1 - y_0)(e^{-t} - 1). \quad (4)$$

由以上二式得相轨迹方程为

$$x - x_0 + y - y_0 + \ln \frac{1 - y}{1 - y_0} = 0. \quad (5)$$

由于脉冲元件的作用, 相平面上存在着换接区, 它以内、外换接线为界. 内换接线和非线性连续系统相同, 表示为

$$x - (e^\tau - 1)y = \tau + 1 - e^\tau. \quad (6)$$

外换接线考虑到由采样元件而引起的等效滞后, 它的方程为<sup>[5]</sup>

$$x - (e^{\tau+T_p} - 1)y = \tau + T_p + 1 - e^{\tau+T_p}. \quad (7)$$

如以  $t = T_p, 2T_p, \dots$  代入式(3)和(4), 当已知  $x_0$  和  $y_0$  时, 可以分别求得不同采样时刻输出信号的坐标值. 但其中只有一点落在换接区内, 它就是点变换法中要研究的换接点.

在非线性连续系统的点变换法中, 换接点总是位于唯一的换接线上, 因此点变换只牵涉到一个坐标的变换(一般是  $y$  的变换). 而在非线性脉冲系统中, 由于存在着换接区, 已不再是单一点变换, 因此必须同时实行二个坐标  $x$  和  $y$  的变换.

在进行变换前, 首先应该知道描繪点由任一初始点  $(x_0, y_0)$  移到下一换接点  $(x_1, y_1)$  所需的时间  $kT_p$ , 亦即求出  $k$  值. 设初始点位于左半相平面上, 此时  $z(t) = +1$ , 下一换接点  $(x_1, y_1)$  位于第一象限的换接区内, 它满足下列不等式

$$x_1 - (e^\tau - 1)y_1 \geq \tau + 1 - e^\tau, \quad (8a)$$

$$x_1 - (e^{\tau+T_p} - 1)y_1 < \tau + T_p + 1 - e^{\tau+T_p}. \quad (8b)$$

以  $t = kT_p$  代入式(3)和(4), 得

$$y_1 = 1 - (1 - y_0)e^{-kT_p}, \quad (9)$$

$$x_1 = x_0 + kT_p + (1 - y_0)(e^{-kT_p} - 1). \quad (10)$$

以此代入式(8),得

$$x_0 - (e^{\tau - kT_p} - 1)y_0 \geq 1 + \tau - kT_p - e^{\tau - kT_p}, \quad (11a)$$

$$x_0 - (e^{\tau - kT_p + T_p} - 1)y_0 < 1 + \tau - (k - 1)T_p - e^{\tau + T_p - kT_p}. \quad (11b)$$

这是二个基本的不等式,它划出了等时区的范围。当不同相轨迹的初始点位于同一等时区内时,经过同样时间  $kT_p$  后,它们都将落在换接区内,进行换接。因此,利用等时区的方法可在任何初始条件下求出描绘点由初始点移动至下一换接点  $(x_1, y_1)$  所需的时间  $kT_p$ 。方法简述如下:当  $T_p$  已知后,用  $k = 1, 2, 3, \dots$  各值代入下式

$$x - (e^{\tau - kT_p} - 1)y = 1 + \tau - kT_p - e^{\tau - kT_p}, \quad (12)$$

可得到一系列直线,绘于左半相平面。图2所示为  $\tau = 0.5, T_p = 1.0$  的直线族。已知初始点坐标  $(x_0, y_0)$  后,在它左侧最近的直线上可查得  $k$  值。例如,已知初始点为  $x_0 = -0.6, y_0 = -0.2$ , 由它左侧的直线可查得  $k = 3$ , 即知描绘点从这初始点移至下一换接区需时  $3T_p = 3.0$ 。

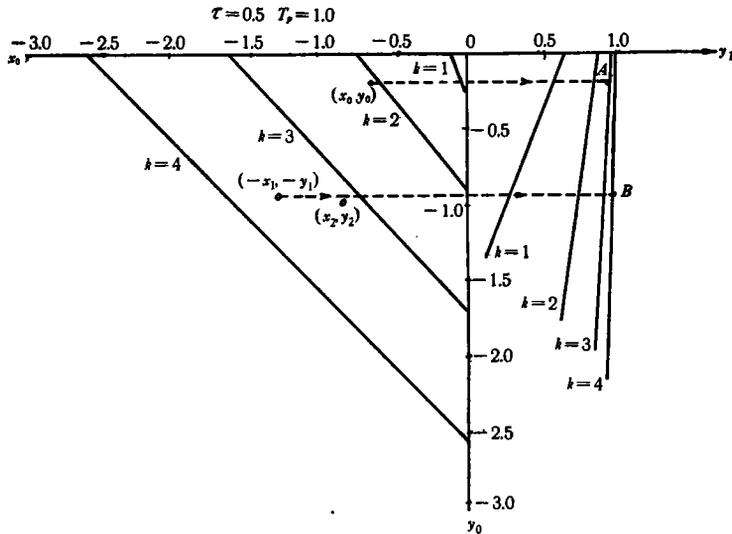


图2. 等时区域  $k = 1, 2, 3, 4$

查得  $k$  值后就能进一步求出  $(x_1, y_1)$  的坐标值。以  $k = 1, 2, \dots$  各值代入式(9),绘出直线族(示于图2第四象限)。当  $k$  值已知后,由  $y_0$  可立即查得  $y_1$  值,此时只须在图2上自  $(x_0, y_0)$  点作水平线向右交式(9)直线族中的同一  $k$  值线即可。上例中,  $y_0 = -0.2$  处于  $k = 3$  的等时区内。作水平线求得交点  $A$ , 查得  $y_1 = 0.95$ 。同时由式(10)求得  $x_1 = 1.26$ 。把新换接点  $(-x_1, -y_1)$  画在第三象限。

用同样方法可以从这个点求得再下一个换接点  $(x_2, y_2)$ , 此时只须在式(9)至(11)中用  $-y_1$  代替  $y_0, -x_1$  代替  $x_0, -y_2$  代替  $y_1, -x_2$  代替  $x_1$  即可。

## 二、判定自振荡的存在和稳定性

如不需求解过渡过程,只为了判定自振荡,可不必按上述方法逐步求点变换,直接求极圈端点坐标值即可。

在相平面法中已经证明:非线性连续系统中自振荡存在的条件是极圈二个端点必须位于换接线上,它们的纵坐标绝对值  $|y|$  必须相等<sup>[2]</sup>。同理,在非线性脉冲系统中,简单自振荡存在的条件是极圈二个端点必须位于换接区内,它们的纵坐标绝对值  $|y|$  必须相等。这个条件可由下面三个公式表述。

$$y_{n+1} = -y_n, \quad (13)$$

$$x_{n+1} - (e^\tau - 1)y_{n+1} \geq \tau + 1 - e^\tau, \quad (14)$$

$$x_{n+1} - (e^{\tau+T_p} - 1)y_{n+1} < \tau + 1 + T_p - e^{\tau+T_p}, \quad (15)$$

其中  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  位于第一象限,  $(x_n, y_n)$  位于第三象限,它们是极圈二个端点的坐标值。它们的关系可按式(9)、(10)写为

$$y_{n+1} = 1 - (1 - y_n)e^{-kT_p}, \quad (16)$$

$$x_{n+1} = x_n + kT_p + (1 - y_n)(e^{-kT_p} - 1). \quad (17)$$

将式(16)和(13)联解,得

$$y_n = -\operatorname{th} \frac{kT_p}{2}. \quad (18)$$

为了简化计算和分析,可认为极圈端点的横坐标相等,即

$$x_{n+1} = -x_n. \quad (19)$$

将上式和式(17)、(18)联解,得

$$x_n = -\frac{kT_p}{2} + \operatorname{th} \frac{kT_p}{2}. \quad (20)$$

我们将  $|x_n|$ 、 $|y_n|$  与  $kT_p$  的关系画成曲线,如图3所示。以式(18)和(20)代入式(14)、(15),可把自振荡条件归纳为

$$e^\tau \left(1 - \operatorname{th} \frac{kT_p}{2}\right) \geq \tau + 1 - \frac{kT_p}{2}, \quad (21a)$$

$$e^{\tau+T_p} \left(1 - \operatorname{th} \frac{kT_p}{2}\right) < \tau + T_p + 1 - \frac{kT_p}{2}. \quad (21b)$$

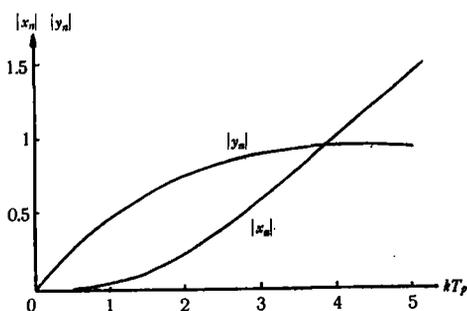


图 3.

由此,满足式(21)的  $kT_p$  值即为自振荡半周期。

为了工作方便,按下式作辅助曲线

$$e^\alpha \left(1 - \operatorname{th} \frac{\theta}{2}\right) = \alpha + 1 - \frac{\theta}{2}. \quad (22)$$

利用此曲线(图4)在  $\alpha = \tau$  和  $\alpha = \tau + T_p$  二点找出相应的  $\theta_{\min}$  和  $\theta_{\max}$ 。凡满足下式的  $k$  正整数就是自振荡半周期

$$\theta_{\min} \leq kT_p < \theta_{\max}. \quad (23)$$

$k$  可以有两个以上的数值,这意味着在非线

性脉冲系统中可以存在着二个以上的自振荡状态。

举例说明：已知  $\tau = 0.5, T_p = 1.0$ ，  
从图 3 查得  $\theta_{\min} = 2.45, \theta_{\max} = 4.83$ 。满  
足式(23)的  $k$  值为

$$kT_p = 3.0 \text{ 和 } 4.0, \text{ 即 } k = 3 \text{ 和 } 4.$$

再从式(18)和(20)求得  $k = 3$  时极圈端点  
为

$$|x_n| = 0.59, |y_n| = 0.91. \quad (24)$$

$k = 4$  的极圈端点为

$$|x_n| = 1.04, |y_n| = 0.96. \quad (25)$$

把它们标于图 5 中。它们也可直接从图 3  
查得。

如  $\tau = 0, T_p = 1.0$ 。查得  $\theta_{\min} = 0,$   
 $\theta_{\max} = 3.47$ ，可知自振荡半周期为(图 6)

$$kT_p = 0; 1.0; 2.0; 3.0.$$

又如  $\tau = 0, T_p = 0.04$ 。查得  $\theta_{\min} =$   
 $0, \theta_{\max} = 0.685$ ，则

$$kT_p = 0; 0.04; 0.08; \dots \text{直至 } 0.68,$$

共存在着十七个自振荡极圈。以上例子中

$kT_p = 0$  时， $x_n = 0, y_n = 0$ 。这意味着静止状态。

现来判别这些自振荡的稳定性。相平面法中关于自振荡稳定的充要条件是：当由于某种原因而使换接点纵坐标  $y$  发生变化，产生初始偏差  $|\Delta y_0| = |y_0 - y_k|$  后，必须满足下式

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\Delta y_m| = 0, \quad (26)$$

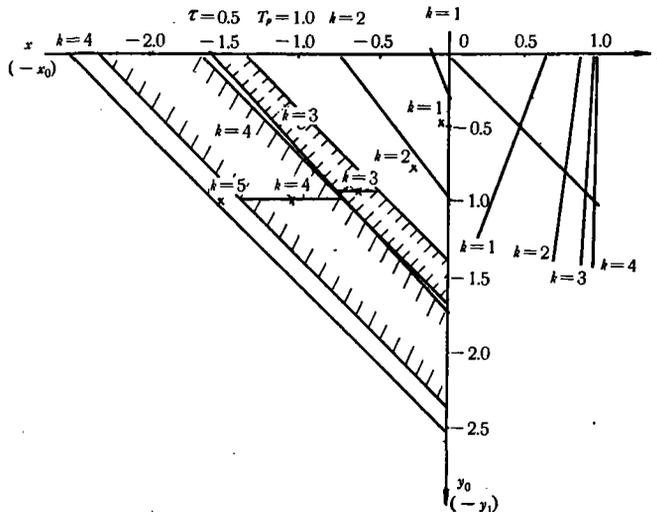


图 5.

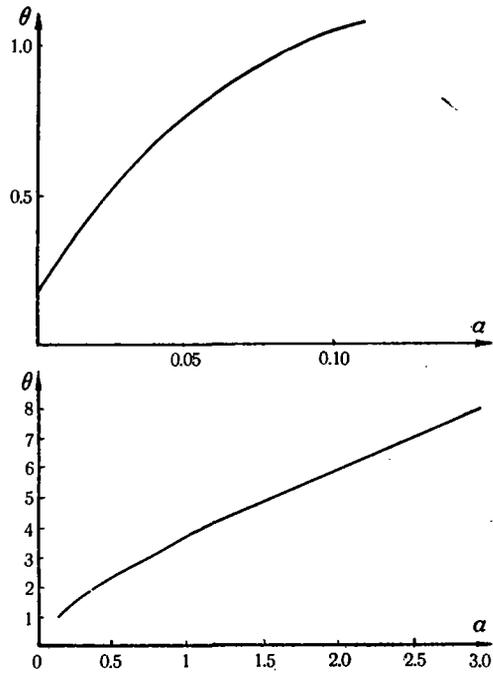


图 4.



至原  $k$  值的自振荡工作状态, 而所有换接点都位于该等时区内. 不同  $k$  值有着不同稳定区域.

从定义可知, 如果初始偏移点  $(x_0, y_0)$  位于某一  $k$  值稳定区域内, 则经过  $q$  次换接后 (即  $q$  次点变换后), 它的终点  $(x_q, y_q)$  必须落在同一  $k$  值的等时区内.  $q$  可为任意正整数. 显然, 稳定区域一定是等时区的一部分, 也即式(11)是稳定区的一个边界. 当  $(x_q, y_q)$  位于第三象限内时, 它的表示式为

$$x_q - (e^{\tau - kT_p} - 1)y_q \geq \tau + 1 - kT_p - e^{\tau - kT_p}, \quad (28a)$$

$$x_q - (e^{\tau - kT_p + T_p} - 1)y_q < \tau + 1 - (k - 1)T_p - e^{\tau - kT_p + T_p}. \quad (28b)$$

当  $(x_q, y_q)$  位于第一象限时, 它为

$$x_q - (e^{\tau - kT_p} - 1)y_q \leq -(\tau + 1) + kT_p + e^{\tau - kT_p}, \quad (29a)$$

$$x_q - (e^{\tau - kT_p + T_p} - 1)y_q > -(\tau + 1) + (k - 1)T_p + e^{\tau - kT_p + T_p}. \quad (29b)$$

现将这二种情况分别加以研究.

先看  $(x_q, y_q)$  在第三象限的情况. 从式(9)和(10)知

$$y_q = -1 + (1 + y_{q-1})e^{-kT_p}, \quad (30a)$$

$$x_q = x_{q-1} - kT_p - (1 + y_{q-1})(e^{-kT_p} - 1). \quad (30b)$$

在上式中取  $q = 2\lambda$ , 并代入式(28)倒推算得

$$x_{2\lambda-1} - (e^{\tau - 2kT_p} - 1)y_{2\lambda-1} \geq \tau + 1 - (2e^{\tau - kT_p} - e^{\tau - 2kT_p}), \quad (31a)$$

$$x_{2\lambda-1} - (e^{\tau - 2kT_p + T_p} - 1)y_{2\lambda-1} < \tau + 1 + T_p - (2e^{\tau - kT_p + T_p} - e^{\tau - 2kT_p + T_p}). \quad (31b)$$

逐次推算出  $(x_{2\lambda-2}, y_{2\lambda-2}) \dots$  直至  $(x_0, y_0)$  时为止,

$$x_0 - (e^{\tau - 2\lambda kT_p - kT_p} - 1)y_0 \geq \tau + 1 - kT_p - 2[e^{\tau - kT_p} - e^{\tau - 2kT_p} + e^{\tau - 3kT_p} - \dots + (-1)^\lambda e^{\tau - 2\lambda kT_p}] - e^{\tau - 2\lambda kT_p - kT_p}, \quad (32a)$$

$$x_0 - (e^{\tau - 2\lambda kT_p - kT_p + T_p} - 1)y_0 < \tau + 1 - (k - 1)T_p - 2[e^{\tau - kT_p + T_p} - e^{\tau - 2kT_p + T_p} + \dots + (-1)^\lambda e^{\tau - 2\lambda kT_p + T_p}] - e^{\tau - 2\lambda kT_p + T_p - kT_p}. \quad (32b)$$

当  $\lambda$  趋向无穷大时, 式(32)成为

$$x_0 + y_0 \geq \tau + 1 - kT_p - 2 \frac{e^{\tau - kT_p}}{1 + e^{-kT_p}}, \quad (33a)$$

$$x_0 + y_0 < \tau + 1 - (k - 1)T_p - 2 \frac{e^{\tau - kT_p + T_p}}{1 + e^{-kT_p}}. \quad (33b)$$

这是稳定区域的另一个界限.

再看  $(x_q, y_q)$  位于第一象限的情况. 由式(9)和(10)知

$$x_q = 1 - (1 - y_{q-1})e^{-kT_p}, \quad (34a)$$

$$x_q = x_{q-1} + kT_p + (1 - y_{q-1})(e^{-kT_p} - 1). \quad (34b)$$

同样方法, 以  $q = 2\lambda + 1$  代入上式, 逐次倒推算得

$$x_0 + y_0 \leq -(\tau + 1) + 2 \frac{e^{\tau - kT_p}}{1 + e^{-kT_p}}, \quad (35a)$$

$$x_0 + y_0 > -(\tau + 1) - T_p + 2 \frac{e^{\tau - kT_p + T_p}}{1 + e^{-kT_p}}. \quad (35b)$$

这是稳定区域的最后一个界限. 于是式(11)、(33)和(35)共六个不等式组成了自振荡稳

定区域的全部界限。实质上,在不同  $k$  值时,稳定区域只是由其中某三个不等式决定。

可以证明,对于周期最大的自振荡,稳定区由(11b)、(33b)和(35b)三个不等式决定。在图 5 例子中,当  $\tau = 0.5$ ,  $T_p = 1.0$  时,由图 3 查知  $k_{\max} = 4.0$ ,则它的稳定区是

$$\left. \begin{aligned} x_0 + 0.92y_0 &< -1.58, \\ x_0 + y_0 &< -1.65, \\ x_0 + y_0 &> -2.35. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

在图中标以  $k = 4$  的阴影区。

也可以证明,对于所有周期较小的自振荡,稳定区由(11a)、(33a)和(35a)三个不等式组成。在同一例子中,以  $k = 3$  代入上三式,得

$$\left. \begin{aligned} x_0 + 0.92y_0 &\geq -1.58, \\ x_0 + y_0 &\geq -1.65, \\ x_0 + y_0 &\leq -1.35. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

它是标以  $k = 3$  的阴影区。

同样,在图 6 例子中,当  $\tau = 0$ ,  $T_p = 1.0$  时,求得  $k = 1$  的自振荡稳定区域为

$$\left. \begin{aligned} x_0 + 0.632y_0 &\geq -0.368, \\ x_0 + y_0 &\geq -0.535, \\ x_0 + y_0 &\leq -0.465. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$k = 2$  的稳定区域为

$$\left. \begin{aligned} x_0 + 0.865y_0 &\geq -1.135, \\ x_0 + y_0 &\geq -1.24, \\ x_0 + y_0 &\leq -0.76. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$k = 3$  的稳定区域为

$$\left. \begin{aligned} x_0 + 0.95y_0 &< -1.135, \\ x_0 + y_0 &< -1.26, \\ x_0 + y_0 &> -1.74. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

可以看出,  $k = 1$  的稳定区域很小,平时不易碰到。较经常出现的自振荡只是  $k = 2$  和  $k = 3$  的工作状态。

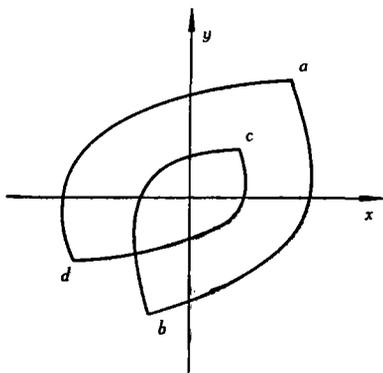


图 7.

此外,同一例子中作图和计算结果表明:在上述稳定区域以外的地区内,凡初始条件合乎下式者

$$\left. \begin{aligned} x_0 + y_0 &\geq -1.24 \pm mT_p, \\ x_0 + y_0 &\leq -0.76 \pm mT_p, \end{aligned} \right\} (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (41)$$

它最后的工作状态一定是  $k = 2$  的自振荡。同时如初始条件符合下式者

$$\left. \begin{aligned} x_0 + y_0 &< -1.26 \pm mT_p, \\ x_0 + y_0 &> -1.74 \pm mT_p, \end{aligned} \right\} (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (42)$$

它最后的工作状态一定是  $k = 3$  的自振荡。

在例子中还看出,除简单自振荡外,还存在着复杂的自振荡工作状态,它的极圈由四条相轨迹组成(图 7),具有四个端点。它的振荡周期为

$$\Theta = 2(2k_{\max} - 1)T_p = 10T_p.$$

它的稳定区域为

$$\left. \begin{array}{l} x_0 + y_0 < -1.24 \pm mT_p, \\ x_0 + y_0 > -1.26 \pm mT_p. \end{array} \right\} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (43)$$

在图 6 上是狭长带域, 由于宽度很小, 一般不易产生。它的极圈四个端点在图 7 上标为  $a, b, c, d$ 。

#### 四、結 論

1. 广义点变换法是在連續系统的点变换法和差分相平面法的基础上提出来的。它不但能和差分相平面法一样求出相轨迹的换接过程, 而且能解决差分相平面法所不能解决的问题, 即判别自振荡的稳定性和稳定区域。

2. 利用广义点变换法可以非常方便地判别自振荡的存在并求出它的半周期。经过证明知道, 除  $kT_p = 0$  的情况外, 所有自振荡都是稳定的。分析结果表明, 非线性脉冲系统中可以存在着二个以上稳定的自振荡, 同时还存在复杂自振荡。

3. 利用式(11)、(33)和(35)中三个不等式可求出自振荡的稳定区域。可以看出, 除周期最大和次大的二个简单自振荡状态具有大的稳定区域外, 其余周期较小的简单自振荡和复杂自振荡的稳定区域都很小, 一般情况下不易遇到。

#### 参 考 文 献<sup>1)</sup>

- [1] 钱学森: 工程控制论, 科学出版社, 北京, 1958 年。
- [2] B. B. 索洛多夫尼柯夫, 自动调节原理, 王众託译, 电力工业出版社, 北京, 1957 年。
- [3] Mullin, F. J., Jury, E. I., A Phase-plane Approach to Relay Sampled-data Feedback Systems, *AIEE, Trans.*, **77** (1958), pt. II, 517—23.
- [4] Andeen (Эндин), R. E., Анализ импульсных систем, содержащих нелинейные элементы, Труды 1-ой конференции ИФАК, том 3, 1961, 128—45.
- [5] Izawa (Идзава), K., Релейные системы регулирования с импульсным действием, Труды 1-ой конференции ИФАК, том 3, 1961, 146—58.
- [6] Kalman, R. E., Nonlinear Aspects of Sampled-data Control Systems, Proceedings of Symposium on Nonlinear Circuit Analysis, Polyt. Inst. of Brooklyn, 1956 April, 273—313.
- [7] Aseftine (Эселтайн), J. A., Исследование нелинейных импульсных систем при помощи разностной фазовой плоскости, Труды 1-ой конференции ИФАК, том 3, 1961, 85—107.
- [8] Востров, М. В., Применение метода фазовой плоскости для исследования нелинейных дискретных систем, *Известия АН СССР, Энергетика и Автоматика*, 1961, № 3, 31.

1) 不包括 1962 年以来有关文献。

---

## MODIFIED METHOD OF POINT TRANSFORMATION FOR THE STUDY OF NONLINEAR DISCRETE SYSTEMS

HSUEH CHING-HSUAN

Phase-plane method has been proved to be an effective method for the study of nonlinear continuous systems. In recent years, it has also been used in nonlinear discrete systems by number of authors.

This paper presents a "modified method of point transformation" for the study of second-order nonlinear discrete systems. It is not only much simpler than the methods previously developed, but also can be used to solve the problems of determining the region of stability of self-oscillation.