

在随机干扰影响下两种极值 调节系统的分析¹⁾

欧陽景正

摘 要

本文利用近似法求出两种极值调节系统在随机干扰影响下搜索损耗的数学期望，因而可以在具体条件下比较两种调节器的优缺点。在正态平稳随机干扰下，相关搜索法对较强的输入端干扰是适宜的；反之，在较弱的输入端干扰时，一般步进搜索法比较有利。

计算结果也给出了在各种干扰强度下步进法的最佳步长及相关法的最佳搜索信号振幅。这些都是调节器的重要参数。

一、引 言

所谓极值调节系统乃是指这样一种调节系统(图1)，该系统能自动地寻找被调对象的某一质量指标(例如图1的 y)的极值，并使系统在极值附近运行。调节器的功能是要自动调整输入量 x ，使之保持在极值点 $x_{\text{极值}}$ 附近。一般说来，在被调对象的输入和输出端还有一些惯性环节，并有随机干扰 $n_i(t)$ 和 $n_o(t)$ 加在输入端与输出端。不过，下面我们都不考虑惯性环节的影响。

为要确定极值点 $x_{\text{极值}}$ ，就需要进行搜索，使 x 以某种方式进行变化而测定相应的 y 值。根据不同的搜索方式，可构成不同的极值调节器。目前已有多种极值调节器，如巔值保持调节器^[1]、相关搜索调节器^[2]、步进式调节器^[3]等等。在干扰 $n_i(t)$ 和 $n_o(t)$ 都不存在时，无论哪一种调节器，在理论上都可以使 x 与 $x_{\text{极值}}$ 完全一致。然而在实际工作中，干扰是不可避免的，因此 x 不能等于 $x_{\text{极值}}$ ，而是在极值点附近随机地波动。 y 和极值的距离(即 $|y - y_{x=x_{\text{极值}}}|$)是一个随机量，这个随机量的数学期望则称为搜索损耗的数学期望。显然，这一数值愈小，则表示系统工作愈好。下面我们将要研究两种调节器在 $n_i(t)$ 、 $n_o(t)$ 影响下搜索损耗的计算方法，并比较这两种调节器在某些具体条件下的优缺点。

A. A. 费尔巴姆(Фельдбаум)^[4]和S. 逊顿盖尔梯(Serdengerti)^[2]等人曾研究过输出端有干扰时的极值调节系统，然而他们都没有考虑输入端干扰 $n_i(t)$ 的影响。

由于极值调节系统是一个非线性反馈系统，因此要准确地求解是有困难的。下面我

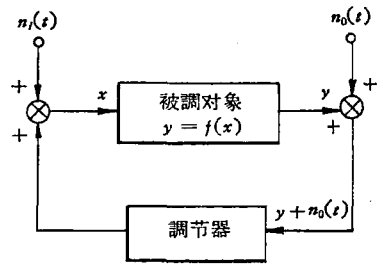


图 1.

1) 本文曾在中国自动化学会1962年12月学术报告会上宣读。

們在一些假定下近似地計算了搜索損耗。

二、步進式極值調節系統的搜索損耗

1. 當輸入端沒有干擾時, 搜索損耗的計算

步進式極值調節系統如圖 2 所示。系統的工作過程是這樣的。假定時間 t 只取離散值 $t = kT_0 (k = 0, 1, 2, \dots)$, 當 $t = 0$ 時, x 取某一起始值 x_0 , 並在此時給以一個試驗

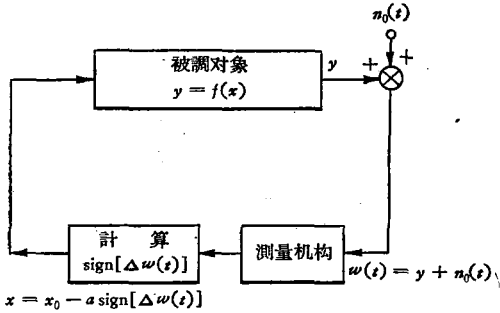


圖 2.

“步” $\Delta x_1 = a$ (即 $x = x_0 + a$, 其中 a 稱為步長, 並且 $a = \text{常數}$), 經過 $T_0/2$ 秒後測量並記錄相應的輸出量 $w(T_0/2) = w_1 (w_1 = y_1 + n_0(T_0/2))$, 然後又給輸入端一個試驗步 $\Delta x_2 = -a$ (即 $x = x_0 - a$), 經過 $T_0/2$ 秒後 (即 $t = T_0$), 測量並記錄相應的輸出量 $w(T_0) = w_2 (w_2 = y_2 + n_0(T_0))$. 計算裝置求出兩個被記錄的量的增量符號 $\text{sign}[\Delta w_1]$. 如果我們要使質量指標 y 取極小值, 那麼求出 $\text{sign}[\Delta w_1]$ 後, 可令 $x =$

$x_1 = x_0 + \Delta x_1 = x_0 - a \text{sign}[\Delta w_1]$. 在以上的測量和計算過程中都是假定不需要時間的。可見, 如果干擾 $n_0(t)$ 不存在, $\text{sign}[\Delta w_1] = \text{sign}[\Delta y_1] = \text{sign}[y_2 - y_1]$, 此時輸入量取 x_1 值將會比取 x_0 值更為接近極值點, 如此重複下去, 就會使系統工作於最佳點 (y 處於極值附近)。但是當干擾 $n_0(t)$ 存在時, $\text{sign}[\Delta w]$ 不一定與 $\text{sign}[\Delta y]$ 相同, 這就會使系統發生誤差。

如果被調對象特性為 $y = kx^2$, 並且 x 只取離散值 $x = na (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 此時由於輸出端干擾 $n_0(t)$ 的存在而使輸入量有可能朝錯誤的方向移動 (使 x 跑離極值點)。因而, 輸入量 x 與一個在 x 軸上作隨機游動 (Random Walk) 的分子的位置是一致的。這個分子每隔 T_0 秒往左或往右移動一步 (步長為 a), 往左移的概率為

$$p_L(x) = \begin{cases} 1 - p(x) & x > 0, \\ p(x) & x < 0. \end{cases}$$

往右移的概率 $p_R(x) = 1 - p_L(x)$, 並且 $p_R(0) = p_L(0) = \frac{1}{2}$, 式中 $p(x)$ 為 $\text{sign}[\Delta w]$ 與 $\text{sign}[\Delta y]$ 不一致的概率。

假定干擾是平穩的, 並且令

$$\eta(t) = n_0(t) - n_0\left(t + \frac{T_0}{2}\right),$$

則 $p(x)$ 可寫成

$$p(x) = p(ia) = p_i = \text{prob}(\eta(t) \leq -4|i|ka^2) = \int_{-\infty}^{-4|i|ka^2} \omega(\eta) d\eta, \quad (1)$$

式中 $\omega(\eta)$ 是 $\eta(t)$ 的分布密度。

為了求出搜索損耗, 我們可以研究下面的隨機游動分子 (圖 3)。這個分子在 x 的正半軸上作隨機游動, 步長為 a 。在 $x = 0$ 和 $x = ka$ 處有一反射壁。當 $x \approx 0$ 和 $x \approx ka$

时,分子每隔 T_0 秒以概率 p_i 往右移一步,以概率 $q_i = 1 - p_i$ 往左移一步. 当 $x = 0$ (或 $x = ka$) 时,分子以概率 1 (或 q_k) 往右 (或左) 移动一步,以概率 0 (或 p_k) 停留在 $x = 0$ (或 $x = ka$) 处. 这样的随机游动便构成一个均匀离散的有限马尔科夫链^[5,6], 它的概率特性可以用下面的随机矩阵描述:

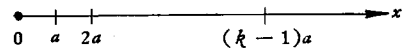


图 3.

$$P = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ q_1, & 0, & p_1, & \dots, & 0 \\ 0, & q_2, & 0, & p_2, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & \dots, & 0, & q_{k-1}, & 0, & p_{k-1} \\ 0, & \dots, & 0, & q_k, & p_k \end{pmatrix}$$

当系统运行很长时间后,可以证明(附录 1)分子处于 ia 处的概率为

$$p(i, a) = \frac{p_1 p_2 \dots p_{i-2} q_i q_{i+1} \dots q_k}{\prod_{j=1}^k q_j + \prod_{j=2}^k q_j + p_1 \prod_{j=3}^k q_j + \dots + q_k \prod_{j=1}^{k-2} p_j + \prod_{j=1}^{k-1} p_j}$$

我们现在来求 y 的平均值 \bar{y} . 显然,对于 $x = 0$ 和 $x = ka$ 处没有反射壁的情况下,

$$\bar{y}_k = \sum_{i=1}^k p(i, a) k [(i-1)a]^2 = ka^2 Q_k(a),$$

式中

$$Q_k(a) = \sum_{i=1}^k (i-1)^2 p(i, a).$$

由于被调对象对称于 y 轴,故上述的 \bar{y}_k 当 $k \rightarrow \infty$ 时正好就是搜索损耗的数学期望. 由于我们讨论稳定的系统,故 Q_∞ 是收敛的.

当干扰是正态分布时,亦即

$$\omega(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} e^{-\eta^2/2\sigma_0^2}$$

时,由式(1)可知

$$p_i = \frac{1}{2} - \Phi(4|i|ka^2/\sigma_0) = \frac{1}{2} - \Phi(2k\rho|x|),$$

式中 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$, $\rho = 2a/\sigma_0$.

实际计算可知 Q_k 收敛得比较快,故可取有限项的 \bar{y}_k 来代替 \bar{y} . 从计算结果可知 $\rho = 0$ (或 $a = 0$) 时 \bar{y} 最小,亦即搜索损耗最小.

然而在实际情况中还需考虑输入端的干扰. 除了可能有外加的输入端干扰外,被调对象特性比较缓慢的变化(漂移)也可以被看成是输入干扰的一种. 对于被调对象特性变化的影响,我们可近似地把它看成是极值点比较缓慢的“漂移”,而整个被调对象特性的形状则是不变的. 因此,为了使系统经常保持在极值点附近工作,就须使输入量“跟踪”着极值点移动. 如果考虑到输入端干扰的影响,步长 a 很小或等于零是不利的,因为这样输入

量就会“跟不上”极值点的移动。所以应该有一个最佳步长 $a_{最佳}$ (或 $\rho_{最佳}$)，在这一步长下工作，由于输入端干扰而使输入量“跟不上”极值点的漂移所产生的输出量损耗，以及由于输出端干扰所引起的输出量损耗的总和将会最小。

2. 当输入端有干扰 $n_i(t)$ 时，搜索损耗的计算

首先让我们求出调节器以怎样的速度 V 来跟踪极值点的漂移。

输入量 x 每隔 T_0 秒移动一步 a ，然而它是以概率 q_i 往极值点移动，以概率 p_i 朝相反的方向移动。所以每隔 T_0 秒输入量往极值点移动的一段平均距离为

$$d = q_i a - p_i a = a(1 - 2p_i).$$

跟踪极值点的平均速度为

$$V = \frac{a}{T_0} (1 - 2p_i) = \frac{2a}{T_0} \Phi(2k\rho|x|). \quad (2)$$

现在我们考虑图 4 所示的非线性调节系统。该系统的线性环节的传递函数为 $\frac{2a}{T_0 S}$ ，而输入量 $n_i(t)$ 是随机的，具有一定的功率谱密度 (或自相关函数 $R_{n_i}(\tau)$) $S_{n_i}(\omega)$ 。如果把

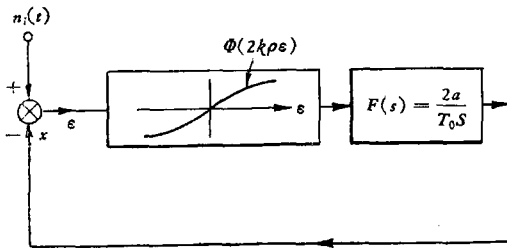


图 4.

$n_i(t)$ 看成是极值调节系统的输入端干扰，那么图 4 中的误差信号 $\epsilon(t)$ 就是极值调节系统输入量与极值点的差：

$$\epsilon(t) = n_i(t) - x(t) = x_{极值} - x.$$

这样， $\epsilon(t)$ 的均方差 ($\overline{\epsilon^2(t)}$) 即代表由于 $n_i(t)$ 所引起的输出量损耗的均方差 D_i 。

由于 $n_i(t)$ 的功率谱已知，所以 D_i 可以求出。不过，要准确地决定 D_i 还是有困难的。

为此，可以采用所谓统计线性化^[7]的方法去近似求解。假定

$$S_{n_i}(\omega) = \frac{2\sigma_i^2}{\omega_c \pi} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^2}. \quad (3)$$

这相当于

$$R_{n_i}(\tau) = \sigma_i^2 e^{-\omega_c |\tau|},$$

式中 σ_i^2 是 $n_i(t)$ 的方差， ω_c 是 $S_{n_i}(\omega)$ 的半功率点。

这样的干扰是比较常见的。

在附录 2 中求出了 D_i 的表示式：

$$D_i/\sigma_0 = \frac{\lambda^2 \mu v_1}{\mu v_1 + \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{4k\rho_1}{\sqrt{1 + 16k^2\rho_1 D_i/\sigma_0}}}}}, \quad (4)$$

式中 $\lambda = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_0}}$ ， $\rho_1 = \frac{a^2}{\sigma_0}$ ， $v_1 = \frac{v}{\mu}$ ， $v = \omega_c T_0$ ， $\mu = T_0 b$ ， $1/b$ 是测量机构的时间常数。

3. 在考虑有 $n_i(t)$ 和 $n_0(t)$ 同时存在时搜索损耗的计算

在 $n_i(t)$ 和 $n_0(t)$ 同时存在的影响下，可把总的损耗写成

$$\bar{D} = D_i + \bar{y},$$

或者

$$D/\sigma_0 = D_i/\sigma_0 + \bar{y}/\sigma_0. \tag{5}$$

用图解法可求出 D/σ_0 。图 5、图 6、图 7 繪出了在各种 k 和 λ 情况下 ρ_1 对 D/σ_0 的曲线。

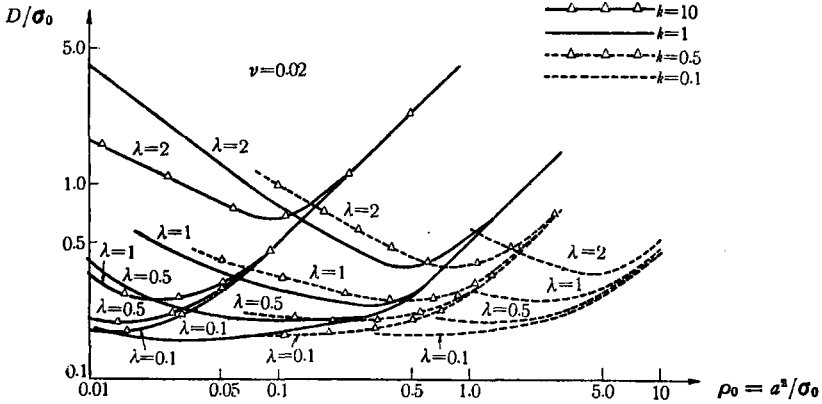


图 5.

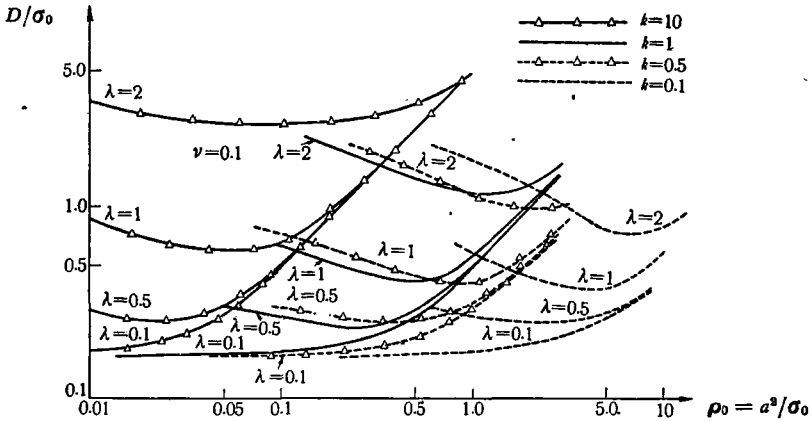


图 6.

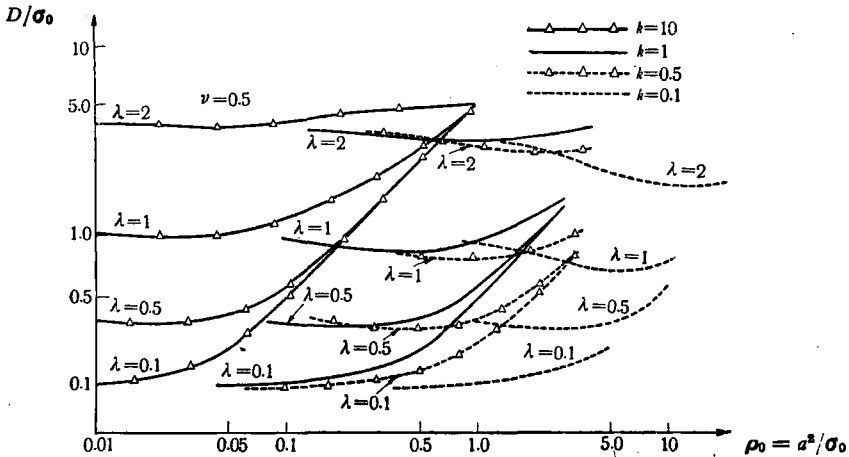


图 7.

从这些曲线可得到下面的结论:

1) 在输入端和输出端有干扰时, 步进式极值调节器有一个最佳工作步长, 在此步长下工作, 搜索损耗将取极小值。

2) 当 T_0 、 λ 、 k 一定时, 随着 ω_c 的增加 (亦即输入端干扰频谱加宽, 或者相当于极值点漂移得比较快), D/σ_0 的极值点将愈不明显。这意味着输入端干扰的影响很大, 在一定范围内无论怎样增加搜索速度 (增加 ρ_1) 也跟不上极值点的移动。在这种情况下, 用步进式极值调节器所得的好处并不大。

3) 从曲线可以看出, 在一定的条件下采用极值调节器 (步长为最佳步长) 比不采用极值调节器 (步长为零) 要好。

三、相关搜索法步长可变系统

本节将讨论图 8 所示的系统。假设被调对象可以用一个二次多项式表示:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c. \quad (6)$$

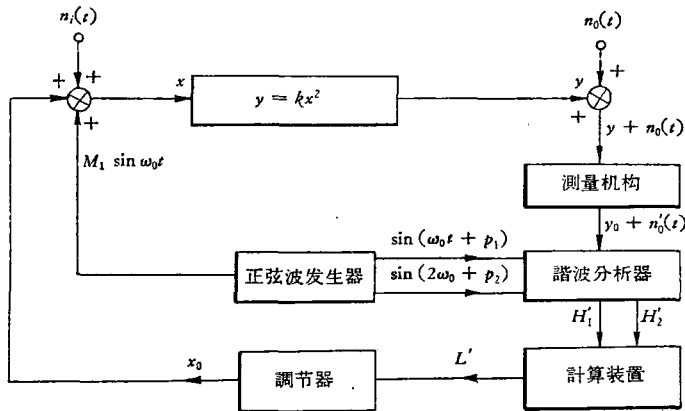


图 8.

令 $x = u + v$, 代入式(6)得

$$y = Au^2 + Bu + C,$$

式中

$$A = \frac{f''(v)}{2} = 2a, \quad B = f'(v), \quad C = f(v).$$

令 $u = M_1 \sin \omega_0 t$, 代入上式, 则得

$$y = H_2 \cos 2\omega_0 t + H_1 \sin \omega_0 t + H_0, \quad (7)$$

式中

$$H_2 = -\frac{M_1^2}{2} A, \quad H_1 = M_1 B, \quad H_0 = \frac{M_1^2}{2} A + C.$$

如果 $x = v_x$ 时 y 取极值, 则

$$y' = f'(v_x) = 0$$

或

$$2av_x + b = 0,$$

但

$$2av + b = B,$$

两式相减得

$$v_x - v = -B/2a = -B/A = L$$

或

$$L = \frac{M_1 H_1}{4H_2} \quad (8)$$

如果在输入端送入一个正弦波 $M_1 \sin \omega t$ 及恒定值 v , 而测量输出端的一次和二次谐波分量, 则可计算出系统距离极值点多远(即求出 L), 因而可以使系统工作于极值点。我們可以用谐波分析器求出 y 所含的一次和二次谐波分量

$$H_i = \frac{1}{NT_0} \int_0^{NT_0} y \sin \left(\frac{2\pi i}{T_0} t + \varphi_i \right) dt, \quad (9)$$

式中 $i = 1$ 或 2 , N 是积分的周期数。

由于干扰存在, 因而实际测出的谐波分量并不等于式(9)的数值, 这就产生误差。下面我们来计算这些误差。

1. 实际测量的 H_1 和 H_2 的误差

我們只考虑输出端干扰的影响, 这时谐波分析器实际测得的数值为(图8)

$$\begin{aligned} H'_i &= \frac{1}{NT_0} \int_0^{NT_0} \left[y_0 + n'_0(t) \sin \left(\frac{2\pi i}{T_0} t + \varphi_i \right) \right] dt = \\ &= H_i^0 + \frac{1}{NT_0} \int_0^{NT_0} n'_0(t) \sin \left(\frac{2\pi i}{T_0} t + \varphi_i \right) dt = H_i^0 + H_{n_i}. \end{aligned} \quad (10)$$

象以前一样, 假定 $n_0(t)$ 是平稳正态过程, 并且数学期望为零。此时, 如果积分周期 $\rightarrow \infty$, 则

$$H_{n_i} = \frac{1}{NT_0} \int_0^{NT_0} n'_0(t) \sin \left(\frac{2\pi i}{T_0} t + \varphi_i \right) dt \rightarrow 0.$$

上式之所以成立, 是由于干扰与 $\sin \left(\frac{2\pi i}{T_0} t + \varphi_i \right)$ 互相独立。当 N 有限时, H_{n_i} 就不为零了。下面我们计算 H_{n_i} 的方差。

设有两个平稳随机过程 $\{\xi(t)\}$ 和 $\{\eta(t)\}$, j 表示其第 j 个实现。令

$${}^j R_{\xi\eta}(\tau, NT_0) = \frac{1}{NT_0} \int_0^{NT_0} {}^j \xi(t) \cdot {}^j \eta(t + \tau) dt.$$

它表示两个随机过程的近似相关函数。上式对 j 取群集平均, 则得

$$\begin{aligned} [{}^j R_{\xi\eta}(\tau, NT_0)]_{AV} &= \frac{1}{NT_0} \int_0^{NT_0} [{}^j \xi(t) \cdot {}^j \eta(t + \tau)]_{AV} dt = \\ &= \frac{1}{NT_0} \int_0^{NT_0} R_{\xi\eta}(\tau) dt = R_{\xi\eta}(\tau). \end{aligned}$$

如果把 ${}^j R_{\xi\eta}(\tau, NT_0)$ 看作是一个随机变量, 那么它的数学期望就是 ξ 和 η 的互相关函数。可以证明^[8] ${}^j R_{\xi\eta}(\tau, NT_0)$ 的方差 $\sigma_{\xi\eta}^2(\tau, NT_0)$ 可由下式表示:

$$\sigma_{\xi\eta}^2(\tau, NT_0) = \frac{2}{N^2 T_0^2} \int_0^{NT_0} (NT_0 - \nu) [P_{\xi\eta}^2(\tau, \nu) - R_{\xi\eta}^2(\tau)] d\nu, \quad (11)$$

式中

$$P_{\xi\eta}^2(\tau, \nu) = [{}^j \xi(t) \cdot {}^j \eta(t + \tau) \cdot {}^j \xi(u) \cdot {}^j \eta(u + \tau)]_{AV}.$$

令 $\{i n'_0(t)\} = \{i \xi(t)\}, \{i \eta(t)\}$ 就是正弦电压, 于是

$$H_{n_i} = i R_{\xi \eta}(0, NT_0).$$

由于干扰与 $\sin\left(\frac{2\pi i}{T_0}t + \varphi_i\right)$ 互相独立, 故

$$P_{\xi \eta}(0, \nu) = [i \xi(0) \cdot i \xi(\nu)]_{AV} \cdot [i \eta(0) i \eta(\nu)]_{AV} = R_{n'_0 n'_0}(\nu) \cos \frac{2\pi i}{T_0} \nu, \quad (12)$$

式中 $R_{n'_0 n'_0}(\nu)$ 是干扰 $n'_0(t)$ 的自相关函数.

把 $P_{\xi \eta}(0, \nu)$ 代入式(11)得

$$\sigma_{\xi \eta}^2(0, NT_0) = \frac{2}{N^2 T_0^2} \int_0^{NT_0} (NT_0 - \nu) R_{n'_0 n'_0}(\nu) \cos \frac{2\pi i}{T_0} \nu d\nu. \quad (13)$$

如果 $n_0(t)$ 是白色噪声, 并且测量机构是一个低通滤波器, 则其频率特性为

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{1 + j\omega/b}. \quad (14)$$

于是将

$$R_{n'_0 n'_0}(\nu) = \sigma_0^2 e^{-b|\nu|} \quad (15)$$

代入式(13), 可得

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi \eta}^2(0, NT_0) = \frac{2\sigma_0^2}{(NT_0)^2} & \left\{ \frac{NT_0 b}{(\omega_i^2 + b^2)} + \frac{1}{(\omega_i^2 + b^2)^2} \left[e^{-bNT_0} (-\omega_i b \sin \omega_i NT_0 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \omega_i^2 \cos \omega_i NT_0) + \omega_i^2 - \omega_i b e^{-bNT_0} \left(\sin \omega_i NT_0 - \frac{b}{\omega_i} \cos \omega_i NT_0 - b^2 \right) \right] \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

式中

$$\omega_i = \frac{2\pi i}{T_0}.$$

当 $i = 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi \eta}^2(0, NT_0) = \frac{\sigma_0^2}{2N^2 \pi^2 (1 + Q^2)^2} & \{ 2N\pi Q^3 + (e^{-2N\pi Q} - 1) Q^2 + \\ & + 2N\pi Q + 1 - e^{-2N\pi Q} \}, \quad (17) \end{aligned}$$

式中

$$Q = \frac{bT_0}{2\pi} = \frac{b}{\omega_0}.$$

可见 $\sigma_{\xi \eta}^2(0, NT_0)$ 是随着 N 的增加而减少.

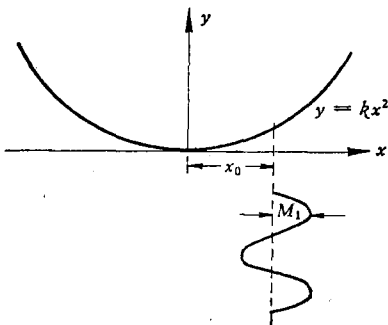


图 9.

2. 搜索损耗的计算

如图 9 所示, 假定输入量与极值点的距离为 x_0 ,

而 $x = x_0 + M_1 \sin \omega_0 t$, $y = k(x_0 + M_1 \sin \omega_0 t)^2$.

取 y 在一个周期内的平均可得搜索损耗

$$D_1 = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} y dt = k \left(x_0^2 + \frac{1}{2} M_1^2 \right).$$

当系统工作于极值点时, $x_0 = 0$, 这时搜索损耗最

小, $D_1 = \frac{1}{2} k M_1^2$.

如果没有干扰的话, 系统经过若干个积分周期后就可以使 $x_0 = 0$ 。但是由于 $n_0(t)$ 的存在使谐波分析器的工作不准确, 因而 x_0 是一个随机变量。假定 x_0 的分布密度为 $W(x_0)$, 方差为 $\sigma_{x_0}^2(0, NT_0)$, 数学期望为零。这时 D_1 的数学期望 \bar{D} 可写成:

$$\bar{D} = \int_{-\infty}^{\infty} D_1 W(x_0) dx_0 = \int_{-\infty}^{\infty} k \left(x_0^2 + \frac{1}{2} M_1^2 \right) W(x_0) dx_0 = k \left[\sigma_{x_0}^2 + \frac{1}{2} M_1^2 \right]. \quad (18)$$

显然, x_0 是由于谐波分析器受 $n_0(t)$ 的影响而产生的, 也就是由于计算 L 值不准确而产生的。如果计及测量机构的惯性, 并认为系统的工作周期 NT_0 足够长, 因而可以将测量机构的过渡过程忽略不计, 则计算装置的输出 L' (图 8) 可以用下式求出(式(8))

$$L' = \frac{M_1}{4} \frac{H_1^0 |F(\omega_0)| + H_{n1} |F(\omega_0)|}{H_2^2 |F(2\omega_0)| + H_{n2} |F(2\omega_0)|}.$$

由于 H_2 是常数(即不随 x 而变), 故 H_2 的积分时间可从系统开始工作时算起, 亦即积分时间可以很长, $H_{n2} \rightarrow 0$, 因而

$$L' = \frac{M_1}{4} \frac{H_1 + H_{n1} |F(\omega_0)|}{H_2}. \quad (19)$$

L 的准确值如式(8)所示, 故

$$x_0 = L' - L = \frac{M_1 H_{n1}}{4 H_2 |F(\omega_0)|}.$$

H_{n1} 的方差如式(17)所示, x_0 的方差为

$$\sigma_{x_0}^2(0, NT_0) = \frac{M_1^2 \sigma_{\xi\eta}^2(0, NT_0)}{16 H_2^2 |F(\omega_0)|^2}.$$

把 $\sigma_{x_0}^2$ 代入式(18)可得

$$\bar{D} = k \left[\frac{M_1^2}{16 H_2^2 |F(\omega_0)|^2} \sigma_{\xi\eta}^2(0, NT_0) + \frac{1}{2} M_1^2 \right]. \quad (20)$$

但是从式(6)及式(7)可知

$$H_2 = -\frac{M_1^2}{4} y''(0) = -\frac{k}{2} M_1^2,$$

故

$$\bar{D} = k \left\{ \frac{\sigma_{\xi\eta}^2(0, NT_0)}{4 M_1^2 k^2 |F(\omega_0)|^2} + \frac{1}{2} M_1^2 \right\}. \quad (21)$$

用一般的分析方法可知, 当

$$M_1^2 = \sqrt{\frac{\sigma_{\xi\eta}^2(0, NT_0)}{2 k^2 |F(\omega_0)|^2}} \quad (22)$$

时, \bar{D} 取极小值 $\bar{D}_{\text{最小}}$

$$\bar{D}_{\text{最小}} = \frac{\sigma_{\xi\eta}^2(0, NT_0)}{\sqrt{2} |F(\omega_0)|}.$$

3. $n_i(t)$ 的影响

和以前一样, 先求出跟踪极值点的平均速度 V 。在目前情况下, 系统每隔 NT_0 秒往极值点移动一段距离 L' , 而 L' 的平均值就是 L (见式(19)), 故可把 V 写成

$$V = \frac{L}{NT_0}.$$

和以前一样,可繪出等效的随动系統(图 10)。目前这个系統是綫性的,因为 V 是 L 的綫性函数。这样, ε 的方差乘上 k 就是我們所求的損耗 D_i

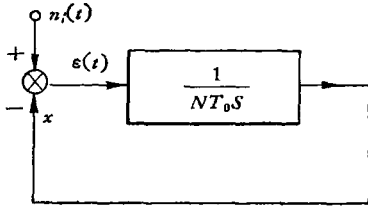


图 10.

$$D_i = k\overline{\varepsilon^2}. \tag{23}$$

从图 10 可知 ε 的功率譜为

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{N^2 T_0^2 \omega^2}{1 + N^2 T_0^2 \omega^2} S_{n_i}(\omega),$$

式中 $S_{n_i}(\omega)$ 是 $n_i(t)$ 的功率譜,并假設和以前一样(式(3)),故

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_0^\infty S_\varepsilon(\omega) d\omega = \frac{N\sigma_i^2 v}{1 + Nv},$$

式中

$$v = \omega_c T_0.$$

因而可得

$$D_i = \frac{kN\sigma_i^2 v}{1 + Nv}.$$

4. n_i 和 n_0 同时存在时的計算

和以前一样,把 $n_i(t)$ 和 $n_0(t)$ 所引起的損耗加起来作为总的損耗 D_T

$$D_T = \overline{D}_{n_0} + D_i,$$

或計及式(17)、(21)、(22),得

$$\begin{aligned} D_T/\sigma_0 &= \frac{kN\lambda^2 v}{1 + Nv} + \frac{1}{2\sqrt{2}N\pi(1 + Q^2)^{1/2}Q} \{2N\pi Q^3 + (e^{-2N\pi Q} - 1)Q^2 + \\ &+ 2N\pi Q + 1 - e^{-2N\pi Q}\}^{1/2} = \frac{k\lambda^2 N\mu v_1}{1 + N\mu v_1} + \\ &+ \frac{\left[\frac{N\mu^3}{4\pi^2} + (e^{-N\mu} - 1) \frac{\mu^2}{4\pi^2} + \mu N + 1 - e^{-N\mu} \right]^{1/2}}{\sqrt{2}N\mu[1 + (\mu/2\pi)^2]^{1/2}}, \end{aligned} \tag{24}$$

式中 $\mu = T_0 b$, $v_1 = \omega_c/b$.

四、两种极值調节系統的搜索損耗比較

我們現在把图 2 和图 8 所示的系統进行比較。假定被調对象都是一样的,即 $y = kx^2$, 并且輸入和輸出干扰也是一样的。輸入干扰的功率譜如式(3)所示,而輸出干扰則为正态白色噪声,它的功率譜为

$$S_{n_0}(\omega) = \Delta^2 = \text{常数},$$

測量机构的传递函数为

$$F_j(S) = \frac{\sqrt{2}}{1 + S/b_j}, \quad (j = 1, 2)$$

亦即两种測量机构的时间常数可以不相同。

为了进行比較,必須將式(5)和式(24)中的 σ_0 进行变换,使它們都对应于相同的干扰 Δ^2 。

先考虑相关搜索法。从式(15)可知 σ_0^2 是图 8 中测量机构输出端干扰的方差, 它可写成

$$\sigma_0^2 = \int_0^\infty \Delta^2 |F_2(\omega)|^2 d\omega = \pi \Delta^2 b_2. \quad (25)$$

但 $\mu = T_0 b_2$, 故

$$\sigma_0^2 = \frac{\pi \mu}{T_0} \Delta^2.$$

根据式(24)可得

$$D_2^* = (D_T/\Delta) \sqrt{\frac{T_0}{\pi}} = \frac{k\lambda^2 N \mu^{3/2} v_1}{1 + N \mu v_1} + \frac{\left[\frac{N \mu^3}{4\pi^2} + (e^{-N\mu} - 1) \frac{\mu^2}{4\pi^2} + \mu N + 1 - e^{-N\mu} \right]^{1/2}}{N \sqrt{2\mu(1 + \mu^2/4\pi^2)}}. \quad (26)$$

对于步进法, σ_0^2 是 $\eta\left(\frac{T_0}{2}\right) = n_0'(t) - n_0'(t + T_0/2)$ 的方差(图 2), 故

$$\sigma_0^2 = [\eta^2(T_0/2)]_{AV} = 2\sigma_1^2(1 - r), \quad (27)$$

式中

$$\sigma_1^2 = [n_0'^2(t)]_{AV} = \pi \Delta^2 b_1 = \frac{\pi \mu}{T_0} \Delta^2,$$

$$r = \frac{[n_0'(t)n_0'(t + T_0/2)]_{AV}}{\sigma_1^2}, \quad (r \text{ 为相关系数}).$$

而

$$[n_0'(t)n_0'(t + T_0/2)]_{AV} = \sigma_1^2 e^{-\frac{1}{2}b_1 T_0},$$

故

$$r = e^{-\frac{1}{2}b_1 T_0} = e^{-\mu/2}. \quad (28)$$

由式(5)、(27)、(28)可得

$$D_1^* = (D/\Delta) \sqrt{\frac{T_0}{\pi}} = (D/\sigma_0) \sqrt{2\mu(1 - e^{-\mu/2})}. \quad (29)$$

可见 μ 愈小愈好。但是为了保证我们的分析准确, μ 不能过小, 否则 $y(t)$ 在测量机构中的过渡过程就须加以考虑。如果取 $\frac{\mu}{2} = 1$, 这时有

$$D_1^* = 1.585D/\sigma_0. \quad (30)$$

也就是说可以利用图 5、图 6、图 7 来求 D_1^* 。把式(26)的 D_2^* 对各种 v, k, μ 值绘成曲线(如图 11、图 12、图 13 所示)。由于上述的理由, 图中只绘出 $\mu \geq 1$ 的情形。

图 5 至图 7 所用的 λ 与图 11 至图 13 所用的 λ 是不一样的。为了比较起见必须求出它们的关系。设前者用 λ_s 表示, 后者用 λ_e 表示。根据式(27)及式(28)以及 $\mu = 1$ 的关系, 可得

$$\lambda_s = \sigma_1^2/\Delta \frac{0.631\sqrt{T_0}}{\sqrt{\pi}}.$$

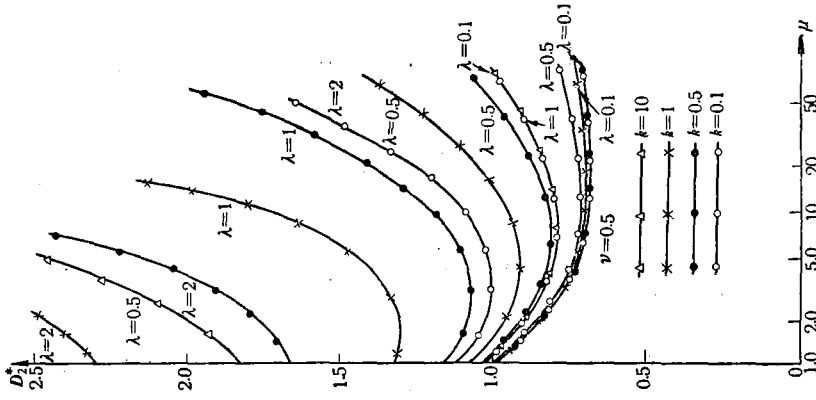


图 11.

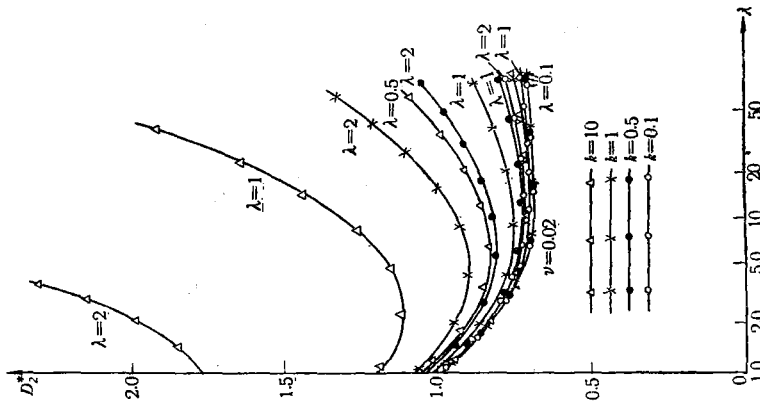


图 12.

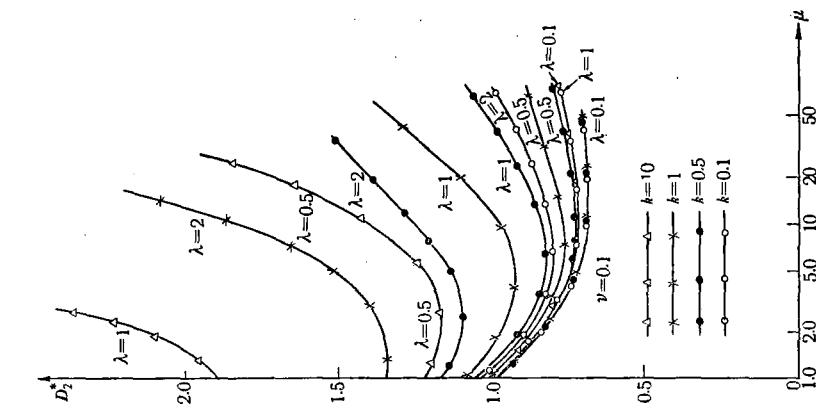


图 13.

同理可得

$$\lambda_c = \sigma_i^2 / \Delta \frac{\sqrt{T_0}}{\sqrt{\pi\mu}}$$

故

$$\lambda_s / \lambda_c = 0.631 \sqrt{\mu} \tag{31}$$

現在我們可以对两种系统的搜索损耗进行比较了。首先假定 k, ν 和 λ_c 已给定, 再从图 11 至图 13 的曲线决定相关搜索法的最佳 μ 值 $\mu_{最佳}$ (即对应于 D_2^* 最小值的 μ) 以及 D_2^* 的最小值 $D_{2^*}^{*最小}$, 然后从式(31)计算出相应的 λ_s 值, 并在图 5 至图 7 中根据已定的 k, ν 和 λ_s 求出相应的最小 D/σ_0 值以及 ρ_1 的最佳值 $\rho_{1最佳}$ 。根据式(30)可得最小的 D_1^* 值 $D_{1^*}^{*最小}$ 。如果 $D_{1^*}^{*最小} < D_{2^*}^{*最小}$, 则表示在已给定的条件下步进搜索损耗比相关搜索来得小, 反之则相关搜索损耗较小。表 1、表 2 和表 3 列出了一些数据(表中的数字是在曲线上用内插法或外推法求得的, 故用近似号 \approx 表出)。

表 1.

	$\nu = 0.02 \quad k = 0.1$			$\nu = 0.02 \quad k = 1$			$\nu = 0.02 \quad k = 10$		
λ_c	0.1	1	2	0.1	1	2	0.1	1	2
λ_s	0.221	2.03	3.88	0.219	2	2.82	0.21	0.94	1.26
$D_{1^*}^{*最小}$	0.69	0.7	0.72	0.69	0.75	0.89	0.7	1.11	1.77
$D_{2^*}^{*最小}$	0.3	0.57	≈ 0.90	0.285	0.6	≈ 0.8	≈ 0.30	≈ 0.40	≈ 0.58
$\mu_{最佳}$	13	11	10	12	10	5	11	2.2	1
$\rho_{1最佳}$	0.9	4.6	>10	≈ 0.05	0.47	>1.0	0.014	≈ 0.02	0.4

表 2.

	$\nu = 0.1 \quad k = 0.1$			$\nu = 0.1 \quad k = 1$			$\nu = 0.1 \quad k = 10$	
λ_c	0.1	1	2	0.1	1.0	2	0.1	1
λ_s	0.245	2.0	3.1	0.236	1.41	1.55	0.2	0.631
$D_{2^*}^{*最小}$	0.69	0.72	0.8	0.69	0.92	1.44	0.72	1.9
$D_{1^*}^{*最小}$	≈ 0.35	≈ 1.17	≈ 1.8	≈ 0.35	≈ 1.1	≈ 1.28	≈ 0.35	≈ 0.47
$\mu_{最佳}$	15	10	6	14	5	1.5	10	1
$\rho_{1最佳}$	0.7	7.0	>10	0.12	≈ 0.8	≈ 1.0	0.012	≈ 0.032

表 3.

	$\nu = 0.5 \quad k = 0.1$			$\nu = 0.5 \quad k = 1$			$\nu = 0.5 \quad k = 10$	
λ_c	0.1	1	2	0.1	1	2	0.1	1
λ_s	0.267	1.87	2.36	0.209	0.722	1.26	0.155	0.631
$D_{2^*}^{*最小}$	0.69	0.79	1.01	0.7	1.3	2.3	0.79	4.3
$D_{1^*}^{*最小}$	≈ 0.43	≈ 2.54	≈ 3.85	≈ 0.4	≈ 0.95	≈ 2.4	≈ 0.317	≈ 0.8
$\mu_{最佳}$	18	7	3.5	11	1.5	1	6	1
$\rho_{1最佳}$	≈ 1.7	≈ 10	>10	≈ 0.23	≈ 0.4	≈ 0.8	≈ 0.01	≈ 0.027

从表中的数字可见, 输入端干扰较强时(即 λ_c 比较大)相关搜索法较优越。反之则步进法较优越。

五、結 論

以上用近似方法分析和計算了两种极值調节系統的搜索損耗，根据这些結果可以判定在具体工作条件下，哪一种系統的搜索損耗較小。

本文曾經在华南工学院 504 教研組討論过，并且得到余有庸先生和李伯天先生的一些指教，作者深表謝意。

附 录 1.

从非負矩陣理論可知随机矩陣 P 是正則的^[5]。亦即它的特征矩陣

$$C = \lambda E - P$$

以 1 为最大单根，式中 E 是单位矩陣， λ 是参数，故終极概率 $p(i, a)$ 可从下式求出^[5]：

$$p(i, a) = \frac{p_{ii}(1)}{\sum_{\beta=1}^k p_{\beta\beta}(1)},$$

式中 $p_{ii}(1)$ 是矩陣 C 的 i 行 i 列代数余因式，并以 1 代替参数 λ 。具体地求出 $p_{ii}(1)$ 就可得到 $p(i, a)$ 的表示式。

附 录 2.

根据統計綫性化的理論可知，图 4 中的非綫性环节可以用一綫性环节（放大器）来代替。这一綫性环节的放大倍数对于求平均值和求方差是不一样的，它們分別以 K_0 和 K_1 来表示。

$$\therefore \varepsilon(t) = n_i(t) - x(t),$$

$$\therefore \varepsilon(s) = n_i(s) - x(s),$$

式中 $\varepsilon(s)$ 、 $n_i(s)$ 和 $x(s)$ 分別为 $\varepsilon(t)$ 、 $n_i(t)$ 及 $x(t)$ 的拉氏变换。

从图 4 可知对于平均值及方差分別有如下的传递关系

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{n}_i}{1 + K_0 \frac{2a}{T_0 S}} = 0,$$

$$\varepsilon(s) = \frac{n_i(s)}{1 + K_1 \frac{2a}{T_0 S}}.$$

因此 ε 的方差 $\bar{\varepsilon}^2$ 为

$$\bar{\varepsilon}^2 = D_\varepsilon = \int_0^\infty S_{n_i}(\omega) \frac{\omega^2/R^2}{K_1^2 + (\omega/R)^2} d\omega,$$

式中

$$R = \frac{2a}{T_0}.$$

把式(3)的 $S_{n_i}(\omega)$ 值代入即得

$$D_i = \frac{\sigma_i^2 \omega_c / R}{\omega_c / R + K_1} \quad (32)$$

从统计线性化理论可知 K_1 与 D_i 有关, 并且可写成(当 ε 是正态分布)

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{D_i} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \Phi(2k\rho\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k\rho}{\sqrt{1 + 4k\rho^2 D_i}}, \end{aligned}$$

式中

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_i}} e^{-\varepsilon^2/2D_i}.$$

把上式代入式(32)即得正文中的式(4).

参 考 文 献

- [1] 钱学森, 工程控制论, 科学出版社, 北京, 1958.
- [2] Serdengerti, S., Optimizing Control in the Presence of Noise Interference, *Jet Propulsion*, 26 (1956), No. 6, 465—473.
- [3] Фельдбаум, А. А., Автоматический оптимизатор, *Автоматика и телемеханика*, 19 (1958) № 8, 731—743.
- [4] Фельдбаум, А. А., Установившийся процесс в простейшей дискретной экстремальной системе при наличии случайных помех, *Автоматика и телемеханика*, 20 (1959), № 8, 1056—1070.
- [5] Романовский, В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1949, 罗曼诺夫斯基, В. И., 疏散的马尔可夫链, 梁文骥译, 科学出版社, 1958.
- [6] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1957.
- [7] Пугачев, В. С., Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957.
- [8] Bendat, J. S., Principles and Applications of Random Noise Theory, New York, John Wiley & Sons, Inc., London, Chapman & Hall Limited, 1958.

ANALYSIS OF OPTIMALIZING CONTROL SYSTEMS UNDER RANDOM INTERFERENCES

AU-YOUNG KING-CHING

Two types of optimalizing control systems are analyzed and compared under random interferences. By means of approximation, the expectation values of hunting loss are calculated.

In the case of Guassion stationary random interferences, when the interference at the input terminal is stronger than that at the output terminal, the hunting loss of the correlation type optimalizing system is smaller; but when the interference at the input terminal is weaker than that at the output terminal, the hunting loss of the gradient type optimalizing system is smaller. These results can be used as a guide to choose the searching method in various interference levels.