

具有一般质量指标的控制系統綜合方法¹⁾

宋 健

摘 要

文中研究了具有公式(3)表示的一般正积分泛函的最优控制系統的综合問題。

在第一部分中研究了具有控制参数的一阶微分方程組。控制系統的終点状态为 n 維相空間內的某一逐段光滑边界的閉性区域 Ω 。文中指出了根据极大值原理和軌道終点的橫截条件寻找引到 Ω 的所有最优軌迹的方法。这里詳細地研究了具有二次泛函和被积函数中不明显含有控制参数的质量指标泛函的綫性方程情况。在文中第二部分研究了等損耗区的主要特性。指出了等損耗区与最优控制函数之間的关系。导出了求算最优損耗函数 $J(\mathbf{x})$ 的偏微分方程, 以及这一函数与最优控制函数 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 的关系。上述方法是我們曾在文献[5, 6, 7]中用过的最优快速系統的综合方法的推广。文章最后举有例証。

控制系統的综合至今仍然是一个急待解决的理論和实际問題。关于最速控制系統的設計方法, 在文献[5, 6, 7]內已有叙述。当受控系統的质量指标为一般形式泛函时, 目前我們只了解一些个别結果^[4, 8], 这一方面所使用的方法有些是属于古典变分法的范畴。但是, 当控制参数的取值范围受到限制时, 这种方法就难以成为工程設計方法的基础。本文应用极大值原理^[9], 并在文献[5, 6, 7]內所建立的理論和方法的基础上討論了控制系統的一般綜合方法。

一、問題的一般提法

設我們所研究的受控系統的运动規律为下列向量方程式所描繪:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

式內: $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$ 为相空間 R_n 內之向量, $f = (f^1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \dots, f^n(\mathbf{x}, \mathbf{u}))$, 而 $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \dots, u^r)$ 为某一 r 維空間內之向量。繼設諸函数 $f^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}), i = 1, 2, \dots, n$, 对一切自变数連續, 而对 $x^i, i = 1, 2, \dots, n$ 連續可微。諸控制参数 $u^i, i = 1, 2, \dots, r$ 之值受到某种被实际条件所确定的限制, 向量 \mathbf{u} 取值于 r 維空間內的閉性或开性区域 U 。

系統的終点状态設为相空間內某一有界凸性区域 Ω , 它由不等式

$$g_l(\mathbf{x}) \leq 0, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

1) 本文曾在1962年12月中国自动化学会理論會議上宣讀。

2) 为了区别向量与其座标, 小写拉丁字母之左上角之数字做为向量 \mathbf{x} 的座标序列。一切沒有注角的粗体字母均表示向量, 左下角的注碼表示向量的序号, 如 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$, 表示第一个、第二个向量, 而 $x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n$ 则表示第一个向量的第一个, \dots , 第 n 个座标。

所确定。由等式 $g_i(\mathbf{x}) = 0$ 所确定的区域 Ω 的边界曲面 S 設为逐段光滑且无奇点, 即在一切光滑点上梯度向量 $\text{grad } g_i(\mathbf{z})$ 不为零向量, $\mathbf{z} \in S$ 。

設系統的起始状态为 \mathbf{x}_0 , $\mathbf{x}_0 \in \Omega^0$, 需找出向量控制函数 $\mathbf{u}(t)$, 使系統(1)自 \mathbf{x}_0 出发于有限時間 t_1 內到达 Ω , 而且这个运动所需之損耗

$$J(\mathbf{u}(t)) = \int_0^{t_1} f^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (3)$$

最小。这个控制函数称为最优控制。当然, 这一問題只有在最优控制存在的前提下才有意义。

設决定損耗的函数 $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 对 $n+r$ 个自变数連續, 且对各 $x^i, i = 1, 2, \dots, n$ 連續可微。此外, 設損耗函数 f^0 之值永远为正, 即对任何 \mathbf{x} 和 \mathbf{u} 均有

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) > \delta > 0.$$

所謂控制系統的綜合問題, 是指当对某一区域内的任意起始条件 \mathbf{x}_0 均存在到达 Ω 的最优控制时, 求出 r 个取值于 U 內的向量函数 $u^i(x^1, x^2, \dots, x^n), i = 1, 2, \dots, r$, 若将其代入式(1)后, 得一自治系統

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})),$$

它自任何起始状态出发, 均能以最小損耗自动地到达終点区 Ω 。

当然, 最优控制函数 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 只有在可控区内才有定义。以后可控区用 M 表示, 从它的任何点均可以用某一控制于有限時間內到达 Ω 。显然, 这个定义与文献[7]內之定义一致, 即 $M = \bigcup_{T>0} G(\Omega, T)^2$, 这里的 $G(\Omega, T)$ 是終点区 Ω 的 T 等时区。以后我們对最优控制的存在問題将不做单独討論, 而只假定其成立。

二、一般綜合方法

引进新座标

$$x^0(t) = \int_0^t f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt,$$

再引进相应的 $n+1$ 維向量 $\tilde{\mathbf{x}} = (x^0, x^1, \dots, x^n), \tilde{\mathbf{f}} = (f^0, f^1, f^2, \dots, f^n)$ 。这时, 式(1)和式(3)可联合写成方程式

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}). \quad (4)$$

然后, 构成式(4)的共軛方程式, 其变量为 $\tilde{\psi}, \tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)^3$,

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} = -A^*(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\tilde{\psi}, \quad (5)$$

这里, $A(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)$ 为 $n+1$ 阶方阵, A^* 为其轉置矩阵。再做函数 K

- 1) 符号 \in 讀做属于, \notin 讀做不属于。如 $\mathbf{x} \in \Omega$ 表示点(向量) \mathbf{x} 属于区域 Ω , $\mathbf{x} \notin \Omega$ 表示点 \mathbf{x} 不属于区域 Ω 。
- 2) 符号 \cup 表示“和”的意思, 若 A, B 为某一空間內的二个区域, 而二者之和构成区域 C , 此时写 $C = A \cup B$ 。
- 3) 此处 $\psi_i, i = 1, 2, \dots, n$, 表示向量 $\tilde{\psi}$ 的第 i 个座标。

$$K(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{\psi}, \mathbf{u}) = (\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tilde{\psi})^1 = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

設系統(4)的起始状态是 \mathbf{x}_0 , 而 $\mathbf{u}_0(t)$, $0 \leq t \leq t_1$ 是自此点至 Ω 的最优控制. 那么, 根据极大值原理可知, 此时必存在方程式(5)的一个非零解 $\tilde{\psi}(t)$, 使沿最优軌迹 $\mathbf{x}(t)$, 在几乎任何瞬間构成下列等式

$$K(\bar{\mathbf{x}}(t), \tilde{\psi}(t), \mathbf{u}_0(t)) = \sup_{\mathbf{u} \in U} (\tilde{\psi}(t), \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u})) = 0, \quad (6)$$

此时,

$$\psi_0(t) = \text{const.} \leq 0, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (7)$$

我們看到, 为了求出最优控制函数, 将式(4), (5), (6)和(7)联立起来后, 还缺少一个重要的起始条件 $\tilde{\psi}(0)$, 它显然与系統(4)的起始条件 \mathbf{x}_0 有关. 若能够找出 $\tilde{\psi}(0)$ 为 \mathbf{x}_0 的函数, 則最优控制便可由式(6)确定.

为了解决上述問題, 可以利用所謂軌道終点的橫截条件. 下面将根据損耗泛函的特性, 研究上述問題的解决方法. 考查系統(4)在 $n+1$ 維空間 R_{n+1} 內的运动軌迹. 在 R_{n+1} 內, 終点区域 Ω 成为以其为底的柱体 \tilde{Q} . 由于損耗函数始終为正, 任何軌迹 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 只能与 \tilde{Q} 的正半柱体相交, 故 $x^0 \geq 0$, 系統(4)的任何运动中座标 $x^0(t)$ 总是單調上升. 根据这些几何事实不难推知:

1. 一切最优控制必在有限時間內將起始点 \mathbf{x}_0 引到終点区域 Ω ;
2. 一切到达 Ω 的最优軌迹必以 Ω 的边界 S 上的点为終点;
3. 任何最优軌迹的端点 $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in S$, 必滿足边界条件

$$\psi(t_1) = -\text{grad } g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}}, \quad \mathbf{z} \in S, \quad (8)$$

而 $\psi_0(t_1)$ 之值則由式(6)确定, 即

$$K(\bar{\mathbf{z}}, \tilde{\psi}(t_1), \mathbf{u}_0(t_1)) = \sup_{\mathbf{u} \in U} [(-\text{grad } g(\mathbf{z}), \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{u})) + \psi_0 f^0(\mathbf{z}, \mathbf{u})] = 0, \quad \psi_0 < 0. \quad (9)$$

上列事实中的1, 2兩項的正确性是显而易見的. 第3点則需加以說明. 設在某最优軌迹的端点有 $\mathbf{x}^0 = J_0$, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in S$, 那么, 用(8)內的小区間变分的方法所得到的一切变化了的軌道端点, 可以构成一个以 \mathbf{z} 为頂点的凸錐, 后者不包含由不等式 $\mathbf{x}^0 \leq J_0$ 所决定的 \tilde{Q} 的截柱 \tilde{Q}_1 上的任何点为其內点. 因此可在半柱 \tilde{Q}_1 和上述凸錐之間做一平面 P , 将二者隔开. 平面 P 过 (J_0, \mathbf{z}) 点与凸錐不在同一側的法向量 $\tilde{\psi}_{\mathbf{z}}$ 必指向截柱 \tilde{Q}_1 的內部. 于是, 法向量 $\tilde{\psi}_{\mathbf{z}}$ 的第一个分量应小于零, 即 $\psi_0(\mathbf{z}) < 0$, 而其它分量与向量 $-\text{grad } g(\mathbf{x})|_{\mathbf{z}}$ 的方向一致. 平面 P 的法向量 $\tilde{\psi}_{\mathbf{z}}$ 此时可以写为

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{z}} = (\psi_0, -\text{grad } g(\mathbf{x})|_{\mathbf{z}}), \quad \psi_0 < 0,$$

而 ψ_0 之值可由式(9)确定之.

利用边界条件(8), (9)即可确定出最优控制所对应的方程式(5)的非零解. 但是, 方程式(4)給定的是起始条件, 而式(5)則給出終点条件. 这里出現的新的不合諧, 可用文献 [5, 6] 內所用过的方法加以克服. 将式(4)与(5)的运动逆轉, 得逆运动方程組:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = -\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad x^0(0) = 0, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in S, \quad (10)$$

1) 我們用圓括弧和逗点表示两个向量的数量积.

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} = A^*(\mathbf{x}, \mathbf{u})\tilde{\psi}, \quad \psi_0(0) = \psi_0, \quad \psi_0(0) = \text{grad}(\mathbf{z}), \quad (11)$$

最优控制函数 $\mathbf{u}_0(t)$ 則由式(7)确定为

$$\sup_{\mathbf{u} \in U} (\tilde{\psi}(t), \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u})) = 0. \quad (12)$$

这样,当 \mathbf{z} 历遍整个 Ω 的边界 S 后,条件(10),(11)和(12)便給出到达終点区域 Ω 的一切可能的最优控制函数,繼而可求出最优控制函数 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 的值的分布. 若式(9),(12)給出 ψ_0 和 $\mathbf{u}(t)$ 的每一瞬間值是唯一的,那么以 \mathbf{z} 为終点的到达 Ω 的最优控制也是唯一的. 当这种唯一性不存在时,則需另加判別. 若式(9)对某一 $\mathbf{z}, \mathbf{z} \in S$, 无 $\psi_0 < 0$ 之解,那么此点 \mathbf{z} 不可能成为任何最优軌迹之終点.

稍加改变后,上述方法可用于所謂变系数系統的综合. 当終点状态 Ω 为一孤立点 \mathbf{x}_1 时,不难証明,上列式(10),(11),(12)均繼續有效,只需将 \mathbf{z} 換为 \mathbf{x}_1 , 将 $\text{grad}(\mathbf{z})$ 換为单位球上的任意向量 $\psi, \|\psi\| = 1$ 即可.

三、綫性受控系統內的最优控制

現研究綫性系統內的最优控制函数的綜合. 設系統的运动方程式为

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad |u^i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (13)$$

A 为 n 阶常量方陣, B 为 $n \times r$ 长方矩陣; 終点状态为区域 Ω , 而(13)为非蜕化系統^[9]. 这里我們研究几个具体形式的最优控制.

1. 設 $f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ 为 \mathbf{x}, \mathbf{u} 的二次型

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (Q\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (P\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij}x^i x^j + \sum_{i=1}^r p_{ii}(u^i)^2. \quad (14)$$

上式內 Q 为非負方陣, $P = (p_{ii})$ 为对角矩陣, $p_{ii} \geq 0$. 此时,方程組(5)可以写成:

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = -A^*\psi - 2\psi_0 Q\mathbf{x}. \quad (15)$$

最优控制函数 $\mathbf{u}_0(t)$ 由式(6)确定:

$$\varphi(t) = \psi_0(P\mathbf{u}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) + (\psi(t), B\mathbf{u}_0(t)) = \max_{\mathbf{u} \in U} [\psi_0(P\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\psi(t), B\mathbf{u})].$$

将上式右端展开,配方后有

$$\varphi(t) = \max_{\mathbf{u} \in U} \left\{ \sum_{i=1}^l \psi_0 p_{ii} \left[u^i + \frac{(\mathbf{b}_i, \psi(t))}{2\psi_0 p_{ii}} \right]^2 + \sum_{\alpha=l+1}^r (\psi(t), \mathbf{b}_\alpha) u^\alpha + V(t) \right\}.$$

上式內, $V(t)$ 为与 \mathbf{u} 无关之 t 的函数; 設 $p_{ii} > 0$, 若 $i = 1, 2, \dots, l$; $p_{\alpha\alpha} = 0$, 若 $\alpha = l+1, \dots, r$; \mathbf{b}_i 为矩陣 B 的列向量.

由上式可知,当 $p_{ii} \neq 0$ 时,考虑到 $\psi_0 < 0$, 唯一的最优控制函数可写成下式:

$$u^i(t) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \frac{(\mathbf{b}_i, \psi(t))}{2\psi_0 p_{ii}} \leq -1; \\ -1, & \text{若 } \frac{(\mathbf{b}_i, \psi(t))}{2\psi_0 p_{ii}} \geq 1; \\ -\frac{(\mathbf{b}_i, \psi(t))}{2\psi_0 p_{ii}}, & \text{若 } -1 \leq \frac{(\mathbf{b}_i, \psi(t))}{2\psi_0 p_{ii}} \leq 1. \end{cases}$$

或者,用記号 sat 表示之,上列关系式可簡化为:

$$u^i(t) = - \operatorname{sat} \frac{(\mathbf{b}_i, \psi(t))}{2\psi_0 p_{ii}}. \tag{16}$$

若 $p_{aa} = 0$, 而 $(\mathbf{b}_a, \psi(t))$ 只在区間 $[0, t]$ 內的个别点上为零, 那么, 最优控制函数 $u^a(t)$ 由下式公式所单一确定:

$$u^a(t) = \operatorname{sign} (\mathbf{b}_a, \psi(t)). \tag{17}$$

我們看到損耗泛函(14)所要求的最优控制函数 $\mathbf{u}(t)$ 完全由方程組(15)的解所确定, 而后者的边界条件可由式(9)确定之

$$\psi(t_1) = - \operatorname{grad} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{z}},$$

ψ_0 之值則由等式

$$\max_{\mathbf{u} \in U} [\psi_0(Q\mathbf{z}, \mathbf{z}) + \psi_0(P\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (- \operatorname{grad} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{z}}, A\mathbf{z} + B\mathbf{u})] = 0$$

中求出.

解相应的逆运动方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= - A\mathbf{x} - B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{z}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= A^*\psi + 2\psi_0 Q\mathbf{x}, \quad \psi_0 < 0, \\ \psi(0) &= - \operatorname{grad} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

即可求出全部最优軌迹.

2. 損耗泛函之 f^0 內不含控制参数 \mathbf{u}

設

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^{t_1} f^0(\mathbf{x}) dt.$$

此类泛函所对应的共軛方程式为

$$\frac{d\psi}{dt} = - A^*\psi - \psi_0 \operatorname{grad} f^0(\mathbf{x}). \tag{18}$$

由于 f^0 內不含 \mathbf{u} , 故最优控制 $\mathbf{u}_0(t)$ 滿足条件

$$(\psi(t), A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}_0(t)) = \max_{\mathbf{u} \in U} (\psi(t), A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}).$$

当数量积 $(\mathbf{b}_i, \psi(t))$ 在区間 $[0, t_1]$ 內只有在个别点上为零时,

$$u^i(t) = \operatorname{sign} (\psi(t), \mathbf{b}_i). \tag{19}$$

显然, 最优控制函数为上式所单值确定的充分条件是系統(13)为非蜕化, 且

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{grad} f^0(\mathbf{x}), \mathbf{b}_i) &= 0, \\ (\operatorname{grad} f^0(\mathbf{x}), A\mathbf{b}_i) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ (\operatorname{grad} f^0(\mathbf{x}), A^{n-2}\mathbf{b}_i) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, \tau, \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

式內 \mathbf{b}_i 为矩陣 B 的列向量. 若(20)諸式成立, 則任何最优控制函数 $\mathbf{u}(t)$ 均取值于多面体 U 的頂点, 每一个分量 $u^i(t)$ 只取值 $+1$ 和 -1 , 在运动过程中 $u^i(t)$ 在各段內之符号相互置换.

决定方程式(18)的边界条件的方法与前述无异. 所不同的是 ψ_0 之值这里总可以直

接解出

$$\psi_0 = \frac{\max_{\mathbf{u} \in U} (\text{grad } g(\mathbf{x})|_{\mathbf{z}}, A\mathbf{z} + B\mathbf{u})}{f^0(\mathbf{z})}, \quad (21)$$

甚至, 这个解是唯一的. 将 ψ_0 与 $\psi(0) = \text{grad } g(\mathbf{x})|_{\mathbf{z}}$ 代入(13)和(18)的逆运动方程式后, 用前述方法即可求出全部最优軌迹.

当条件(20)得到滿足时, 或式(19)确能单值确定最优控制时, 任一控制参数 u^i 均只取值 ± 1 . 可以設想, 相空間中有开关曲面存在, 它将空間分为两部分 M_i^+ 和 M_i^- . 在前半空間內 u^i 取 $+1$, 在后者內 $u^i = -1$. 它們的边界 M_i^0 将成为 $u^i(t)$ 的最优开关曲面. 当方程式的維数較低时, 开关曲面 M_i^0 可以十分简单地用分析方法或用计算机解出.

四、等損耗区与最优控制函数

現在繼續研究綫性系統(13), 对它我們做如下的假定: 可控区 M 与相空間 R_n 相重合; 終点区域 Q 滿足等时区单調条件^[7]; 損耗泛函之 $f^0(\mathbf{x}) > \delta > 0$ 为 \mathbf{x} 的凸性函数, 即对任何两点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 均有下列不等式成立:

$$f^0(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f^0(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)f^0(\mathbf{x}_2).$$

在上述假定下, 自相空間內之任何点均可用最优控制到达 Q . 以 $G(Q, T)$ 記以 T 時間內所能到达 Q 的一切始点的集合. 在文献[7]內已經証明, 它是 n 維閉凸面体. 再用 $Q(Q, J_0)$ 表示用 $J_0 > 0$ 之損耗所能到达 Q 之一切始点之集合, 并称之为等損耗区. 不难証明, $Q(Q, J_0)$ 为封閉的凸性区域, 并且对 J_0 单調扩张.

显然, 等損耗区 $Q(Q, J_0)$ 为有界, 因为 $f^0(\mathbf{x}) > \delta > 0$, J_0 等損耗区全部位于等时区 $G(Q, T_1)$ 內部, 这里 $T_1 \geq \frac{J_0}{\delta}$. 設自 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 点均能用損耗 J_0 到达 Q , \mathbf{x}_1 与 \mathbf{x}_2 属于 $G(Q, T_1)$, 那么此两点連綫上的任意点 $\mathbf{x}_3 = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, 也属于 $Q(Q, J_0)$. 果然, 令 $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$, $0 \leq t \leq T_1$, 分别为以損耗 J_0 到达 Q 的軌迹, 那么 $\mathbf{x}_3(t) = \lambda\mathbf{x}_1(t) + (1-\lambda)\mathbf{x}_2(t)$ 为自 \mathbf{x}_3 点通向 Q 的軌迹, 其相应的控制函数为 $\lambda\mathbf{u}_1(t) + (1-\lambda)\mathbf{u}_2(t)$. 由于函数 $f^0(\mathbf{x})$ 的凸性, 沿 $\mathbf{x}_3(t)$ 通向 Q 所需之損耗不大于 J_0 . 但是, 由于 Q 內的一切点均为平衡点, 故自 \mathbf{x}_3 以 J_0 之損耗也可到达 Q , 所以 $\mathbf{x}_3 \in Q(Q, J_0)$.

总之, 經過类似的討論, 可以推知等損耗区 $Q(Q, J_0)$ 的下列特性:

1. 它是 n 維有界封閉凸面体;
2. 它随 J_0 之增大而单調扩张;
3. 若 Q 或 $f^0(\mathbf{x})$ 二者之一为严格凸, 則等損耗区也应为严格凸;
4. 自等損耗区 $Q(Q, J_0)$ 的边界点只能用最优控制才能以不大于 J_0 的損耗到达終点区域 Q .

現引进 n 元函数 $J(\mathbf{x})$, 其在 \mathbf{x} 点之值等于自該点到达 Q 之最小損耗. 根据上述特性可知, $J(\mathbf{x})$ 是相空間內諸点的单值函数. 再由于等損耗区 $Q(Q, J_0)$ 的凸性和对 J_0 的单調性, $J(\mathbf{x})$ 又是連續和几乎处处可微函数. 設 \mathbf{x}_0 是 $Q(Q, J_0)$ 的某一个边界点. 过此点可做一承托支面 P , 其与 $Q(Q, J_0)$ 不在同側的法向量称为外法向量, 并用 $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ 記

之。显然,若 n 元函数 $J(\mathbf{x})$ 在此点可微,或者 $J(\mathbf{x})$ 的边界在此点光滑,那么函数 $J(\mathbf{x})$ 在此点的梯度向量 $\text{grad } J(\mathbf{x})$ 必与上述承托支面 P 的外法向量方向一致,即有下列向量等式成立:

$$\text{grad } J(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} = a\mathbf{n}(\mathbf{x}_0), \quad a \text{ 为正常数.}$$

或将上展开成为諸座标之間的等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x^1} \Big|_{\mathbf{x}_0} &= an^1(\mathbf{x}_0), \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x^n} \Big|_{\mathbf{x}_0} &= an^n(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

而当梯度向量为已知时,按定义可推知,函数 $J(\mathbf{x})$ 满足下列一阶偏微分方程式:

$$\max_{\mathbf{u} \in U} (-\text{grad } J(\mathbf{x}), A\mathbf{x} + B\mathbf{u}) = f^0(\mathbf{x}), \tag{22}$$

或者展写为

$$\max_{\mathbf{u} \in U} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x^j + \sum_{j=1}^r b_{ij}u^j \right) \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x^i} = -f^0(\mathbf{x}). \tag{22'}$$

或者,当数积 $(\text{grad } J(\mathbf{x}(t)), \mathbf{b}_i)$ 只在个别孤立点上为零时 (\mathbf{b}_i 为矩阵 B 之列向量), 则可由已知函数 $J(\mathbf{x})$ 求出最优控制函数

$$u^i(\mathbf{x}) = -\text{sign}(\text{grad } J(\mathbf{x}), \mathbf{b}_i), \quad i = 1, 2, \dots, r. \tag{23}$$

这样,最优控制函数的综合就归结为寻找最小损耗函数 $J(\mathbf{x})$, 当这一函数求出后,关系式(23)即给出最优系统综合问题的答案。

至于函数 $J(\mathbf{x})$ 的求得, 则可以采用文献[6, 7]内所用过的方法。为了叙述简单, 设受控系统只含有一个控制参数 $u^1 = \mathbf{u}$, $|u| \leq 1$, $B = \mathbf{b}$ 为 n 维常向量。在 Q 的边界曲面 S 上, 最优控制 $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in S$ 为横截条件所唯一确定, 曲面 S 被向量 \mathbf{b} 分为二部分 S^- 和 S^+ , 在其中一个曲面内, $(\text{grad } g(\mathbf{z}), \mathbf{b}) > 0$, 而在另一个曲面内, $(\text{grad } g(\mathbf{z}), \mathbf{b}) < 0$, 故有

$$u(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \mathbf{z} \in S^+ \\ -1, & \text{若 } \mathbf{z} \in S^- \end{cases} \tag{24}$$

以 S^- 做 $J(\mathbf{x})$ 的边界条件解一阶偏微方程式

$$(-\text{grad } J(\mathbf{x}), A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = f^0(\mathbf{x}), \quad J(\mathbf{x})|_{S^-} = 0. \tag{25}$$

在 S^+ 的半曲面附近解另一方程式

$$(-\text{grad } J(\mathbf{x}), A\mathbf{x} + \mathbf{b}) = f^0(\mathbf{x}), \quad J(\mathbf{x})|_{S^+} = 0. \tag{26}$$

求出 $J(\mathbf{x})$ 后, 再求开关曲面 L , 它由下列方程式决定:

$$(\text{grad } J(\mathbf{x}), \mathbf{b}) = 0. \tag{27}$$

在此开关曲面以外, 以 L 为新的边界条件, 将式(25)和(26)置换, 就可依次延拓最小损耗函数至更大的范围。以此类推, 可在全空间内求出 $J(\mathbf{x})$, 因而综合问题也随之得到解决。

前节和本节内的方法, 稍加补充后均可推广至变系数线性系统, 结果与文献[6, 7]内得到的结果类似。

五、例 題

我們应用本文內所敘述的綜合方法去解决一个簡單的最优系統的設計問題, 設受控系統为一个二阶系統

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= u, \quad |u| \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

終点状态 Q 是以原点为圓心, 以 $\rho (0 < \rho < 1)$ 为半径的圓, 它可由不等式 $g(x, y) = x^2 + y^2 - \rho^2 \leq 0$ 所确定. 用以評价系統质量的損耗函数設为:

$$J(u(t)) = \int_0^{t_1} (x^2 + 1) dt,$$

t_1 为到达 Q 的时刻.

方程組(28)的逆运动方程組为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y, \\ \frac{dy}{dt} &= -u, \quad |u| \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

其共軛方程組为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dt} &= 0, \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -2\psi_0 \cdot x, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

以 ρ 为半径的圓的圓周边界分为上下两半部, 在上半圓周上,

$$(\text{grad } g(x, y), \mathbf{b}) = 2y_0 > 0,$$

式中向量 $\mathbf{b} = (0, -1)$, 它由式(28')內 u 的系数所确定, 故此处 $u = -1$. 同理, 在下半圓周上, $u = +1$.

根据式(21)可求出 ψ_0 之值:

$$\psi_0 = \frac{2x_0y_0 - 2|y_0|}{x_0^2 + 1}.$$

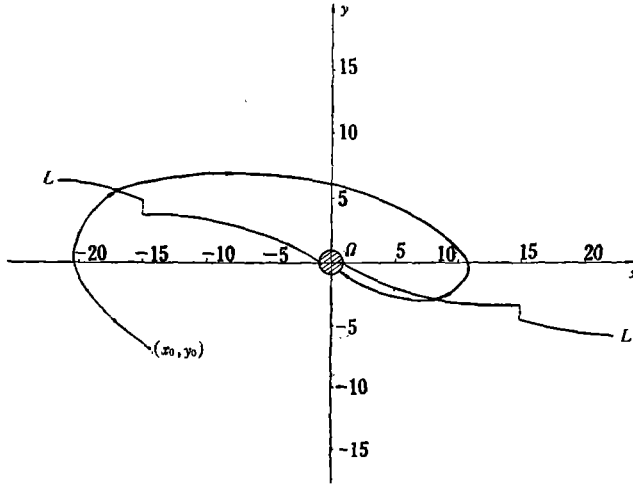
显然, 当 $x_0^2 + y_0^2 \leq \sqrt{2}$ 时, 上式之 ψ_0 值总小于零. 故圓周上任一点均有最优軌迹通过. 反之, 則不然.

用 (x_0, y_0) 及 $(\psi_0, 2x_0, 2y_0)$ 分別做方程組(28')和(29)的起始条件, 再考虑关系式

$$u(t) = -\text{sign}(\psi(t), \mathbf{b}), \quad (30)$$

便可以求出通过 Q 的全部最优軌綫. 图內繪出了最优軌迹在相平面內的几何分布及相应的开关曲綫. 此相图系用模拟計算机算出, 其精度为 1% 左右, 故有定性的意义. 从图中

可看出,开关曲线 L 异于最速系统之开关曲线,这里 L 有两个断点,断点内之一段开关曲线与最速控制系统的开关曲线相重合,断点以外之开关曲线则略高于最速控制系统的开关曲线,最优控制之过渡曲线示于同一图内。



参 考 文 献

- [1] 钱学森, 工程控制论, 科学出版社, 北京, 1958.
- [2] 张学铭, 控制过程中的微分方程问题, 数学进展, 第四卷(1962), 4, 285—300.
- [3] 张嗣瀛, К теории оптимального регулирования, ПММ, вып. 3 (1961).
- [4] 章仁为, Одна задача синтеза оптимальных систем по принципу максимума, Автоматика и телемеханика, 11 (1960), № 10.
- [5] 宋 健, Синтез оптимальных систем на основании поля изохрон, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1960, № 5, 96—103.
- [6] 宋 健, 最优控制系统的综合理论, 中国自动化学会第一次(天津)学术会议报告, 1961, 11.
- [7] 宋 健, 韩京清, 最速控制系统的分析与综合, 数学进展, 第四卷(1962), 4, 264—284.
- [8] Летов, А. И., Аналитическое конструирование регуляторов, Автоматика и телемеханика, 11 (1960), № 4, 5, 6, 436—441, 561—568, 661—665.
- [9] Повтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, Москва, 1961.
- [10] Bellman, R., Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL SYSTEMS WITH A GENERAL FUNCTIONAL CRITERION

SUNG JIAN

In this paper the general synthesis problem of optimal control systems with the criterion of transient responses as a positive integral functional (3) is discussed.

In the first part it is assumed that the motion of controlled object is described by a system of ordinary differential equations and that the final states of the system form a bounded and closed convex region in n -dimensional euclidian phase space. A method is proposed for finding all optimal control functions which lead any starting state into the given final region of states. Some conclusions are obtained from the maximum principle by using transversal conditions of optimal trajectories in terminal points, and the particular properties of the stated problem are pointed out. The case of linear differential equations with integral quadratic functional criterion is investigated in detail.

Further, in the second part the fundamental properties of isocost regions, the relations between the isocost region and optimal control functions are indicated. As a direct result a partial differential equation determining the optimal loss-function $J(\mathbf{x})$ is found and the connection between function $J(\mathbf{x})$ and optimal vector control function $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ is also stated. The methods proposed are practically the extension of the methods used by us for designing time optimal control systems as seen in [5, 6, 7].

Finally, an example is illustrated with optimal trajectories shown in phase plane. The necessary numerical data is calculated by an analog computer with high accuracy.