第1卷 第2期 自动化学报 Vol. 1, No. 2
1963年10月 ACTA AUTOMATICA SINICA October, 1963

軌綫末端受限制时的最优控制問題[1)]

張嗣瀛

摘要

当軌綫末端受有条件限制时,将使最优控制系統有关的微分方程的边界条件变得复杂.本文考虑了各种受限情形,提出了确定边界条件的方法,得到泛函改变量公式,討論了控制最优性的充分条件以及在某些情形下的必要条件.

一、問題的提法

設下面的微分方程組描写一个最优控制系統:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_r; t), \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{1}$$

此处, $x_1, \cdots, x_n$——广义坐标, $u_1(t), \cdots, u_r(t)$——控制参数,以后簡称为“控制”,它們可以是逐段連續的函数并有有限个第一类間断点. 此外,它們还受如下m个条件的限制:

$$g_j(u_1, \cdots, u_r) \leqslant 0. \quad (j = 1, \cdots, m) \tag{2}$$

以后称满足条件(2)的控制为“容許控制”.

最优控制問題可这样提出[2]:对于系統(1)要求自(2)中选取容許控制 $u_1, \cdots, u_r$, 以使函数

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) \tag{3}$$

在 $t = T$ 时有极大値或极小値,此处 $c_i (i = 1, \cdots, n)$ 是些不全部为零的常数.

这样提出的問題具有相当广泛的代表性[2].

在最优控制問題中,T 值可以是固定的,也可以不是固定的;又,当 $t = T$ 时,相空間軌綫的末端 [即諸 $x_i(T)$] 可以不受任何限制,也可以受某些条件的限制.

我們称使 $S(T)$ 有极大値或极小値的容許控制为“最优控制”.

以下将討論軌綫末端受限制时問題中所出現的特点,以及此时控制最优性的充分条件和在某些情形下的必要条件. 但为了在第三部分叙述方便起見,下节将先討論軌綫末端不受限制的情形,因为其中的公式在第三部分中将要用到,虽然第二部分中的基本結論在文献 [1, 2, 3] 中已經有了.

二、軌綫末端不受任何限制的情形

首先推求泛函改变量公式.

設系統(1)右端的函数 $f_i (i = 1, \cdots, n)$ 是变量 $x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_r; t$ 的連續函数,又設 f_i 对于諸 x_j 有連續的一阶及二阶偏导数, 且 f_i 及 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 等对于 $u_k (k = 1, \cdots, r)$

1) 本文曾在一般力学会議上(1962年8月,北京)宣讀.

满足李普希兹条件(以上各条件在文献 [1, 2] 中都已論及).

今将最优控制記作 $u_1, \cdots, u_r$; 又将异于最优控制的其他容許控制記作 $u_1+\delta u_1, \cdots, u_r+\delta u_r$.

組織函数

$$H=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\dot{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_r; t), \tag{4}$$

其中 $\lambda_i(t)$ 是乘子,它满足微分方程

$$\dot{\lambda}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (i=1, \cdots, n) \tag{5}$$

在引入H后,方程組(1)还可写成:

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}. \quad (i=1, \cdots, n) \tag{6}$$

設对于(6)給定的初始条件为

$$x_i(t_0)=x_i^0, \quad (i=1, \cdots, n) \tag{7}$$

則根据(1)我們有

$$\delta\dot{x}_i=f_i(x_1+\delta x_1, \cdots, x_n+\delta x_n; u_1+\delta u_1, \cdots, u_r+\delta u_r; t)-$$
$$-f_i(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_r; t), \quad (i=1, \cdots, n)$$

其中 δx_i, $\delta\dot{x}_i$ 是由于 δu_k 等所引起的 x_i 及 $\dot{x}_i$ 的改变量.

将上式左右两端各乘以乘子 λ_i, 然后两端各自 t_0 到 T 积分. 左端积分时应用分部积分法,同时注意到由于固定的初始条件(7),将有

$$\delta x_i(t_0)=0. \quad (i=1, \cdots, n)$$

这样进行积分后,两端按 i 相加,便不难得出:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(T)\delta x_i(T)=\int_{t_0}^{T}\left\{\sum_{i=1}^{n}\dot{\lambda}_i\delta x_i+[H(\lambda, x+\delta x, u+\delta u, t)-H(\lambda, x, u, t)]\right\}dt,$$

此处为了书写簡便, $H(\lambda, x+\delta x, u+\delta u, t)$ 及 $H(\lambda, x, u, t)$ 分别表示为

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x_1+\delta x_1, \cdots, x_n+\delta x_n; u_1+\delta u_1, \cdots, u_r+\delta u_r; t)$$

及

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_r; t).$$

将上式右端被积函数加減 $H(\lambda, x, u+\delta u, t)$ 項及 $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial H(\lambda, x, u, t)}{\partial x_i}\delta x_i$ 項,經过整理后,又可得出:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(T)\delta x_i(T)=\int_{t_0}^{T}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\lambda}_i+\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)\delta x_i\right]+[H(\lambda, x, u+\delta u, t)-H(\lambda, x, u, t)]+\right.$$
$$+\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\lambda, x, u+\delta u, t)-H(\lambda, x, u, t))\delta x_i\right]+$$
$$\left.+\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\lambda, x+\theta\delta x, u+\delta u, t)\right]\right\}dt. \quad 0<\theta(t)<1 \tag{8}$$

如果我們选取 $\lambda_i(T)$，使

$$\lambda_i(T) = -c_i, \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{9}$$

同时，由于

$$\dot{\lambda}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

及

$$\Delta S(T) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta x_i(T),$$

于是我們有：

$$\Delta S(T) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta x_i(T) = -\int_{t_0}^{T} \Big\{[H(\lambda, x, u+\delta u, t) - H(\lambda, x, u, t)] + \\ + \Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(H(\lambda, x, u+\delta u, t) - H(\lambda, x, u, t))\delta x_i\Big] + \\ + \Big[\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\Big)^2 H(\lambda, x+\theta\delta x, u+\delta u, t)\Big]\Big\} dt, \quad 0 < \theta(t) < 1 \tag{10}$$

这便是泛函改变量公式.

式(9)是微分方程(5)所应满足的边界条件.

今据式(10)来分析最优控制所应满足的必要条件及充分条件.

首先，对 $\delta x_i(t)$ 进行估值. 在上述对函数 f_i 所設的条件下，我們有[2]：

$$|\delta x_i(t)| \leqslant M_1 \int_{t_0}^{T} \sum_{k=1}^{r} |\delta u_k(\xi)| d\xi, \quad (i = 1, \cdots, n; t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{11}$$

此处 M_1 是与 $\delta u_k(t)$ 等无关的某一常数.

今以最优控制 $u_1, \cdots, u_r$ 給出 $S(T)$ 以极小值为例来进行討論. 在文献 [1, 2] 中，已証明了最优控制的必要条件为：最优控制 $u_1, \cdots, u_r$ 必要时給出函数 $H(\lambda, x, u, t)$ 以极大値. 这便是 Л. С. 庞特里亚庚 (Понтрягин) 等人的"极大值原理". 在此原理中，函数 $H(\lambda, x, u, t)$ 中的 λ, x, t 被看作是固定的，即 H 只作为是 u 的函数.

下面分两种情形討論充分条件.

1. 选取 $\delta u_k(t)$ $(k = 1, \cdots, r)$，使其屬于 $[t_0, T]$ 的某一子区間 $[t_1, t_2]$ 上，$\delta u_k(t) \neq 0$，而在除此子区間之外 $[t_0, T]$ 上的任何其他时間都有 $\delta u_k = 0$.

于是式(11)可写成：

$$|\delta x_i(t)| \leqslant M_1 \int_{t_0}^{T} \sum_{k=1}^{r} |\delta u_k(\xi)| d\xi = M_1 \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{r} |\delta u_k(\xi)| d\xi \leqslant k M_1 \tau, \\ (i = 1, \cdots, n; \quad t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

此处

$$k = \sup_{\xi \in [t_1, t_2]} \sum_{k=1}^{r} |\delta u_k(\xi)|, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

据此估值公式及 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j}$ 等的有界性，对于式(10)被积函数的后两項有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\lambda,x,u+\delta u,t)-H(\lambda,x,u,t))\delta x_i\right|\leqslant \tau K_1^* k^2,$$

$$\left|\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\lambda,x+\theta\delta x,u+\delta u,t)\right|\leqslant \tau^2 K_2^* k^2,$$

其中 K_1^*, K_2^* 是与 τ, k 不相关的正的常数.

如果最优控制給出 $S(T)$ 以极小値,则应有

$$\Delta S(T)\geqslant 0.$$

根据上面的估値,同时由于如上那样选取 $\delta u_k(t)$, 就使得除了在 $[t_1, t_2]$ 上以外,都有

$$H(\lambda,x,u+\delta u,t)-H(\lambda,x,u,t)=0.$$

于是从式(10)可推出

$$\Delta S(T)\geqslant -\int_{t_1}^{t_2}\{[H(\lambda,x,u+\delta u,t)-H(\lambda,x,u,t)]+\tau k^2(K_1+K_2)\}dt, \quad (12)$$

此处 K_1, K_2 是与 τ, k 不相关的正的常数, 当滿足控制最优性的必要条件时, 因須給出 H 以极大値,故

$$\Delta H=H(\lambda,x,u+\delta u,t)-H(\lambda,x,u,t)\leqslant 0.$$

由此,如果将 τ 取得充分小,而对于不論怎样的 $\delta u_k(t)$ 存在一个常数 $a>0$ 使

$$|\Delta H|>ak, \quad \left(k=\sup_{t\in[t_1,t_2]}\left|\sum_{k=1}^{r}\delta u_k(t)\right|\right) \quad (13)$$

或

$$\Delta H<ak,$$

则根据式(12)就有:

$$\Delta S(T)>-\int_{t_1}^{t_2}\{-a+\tau k(K_1+K_2)\}k\,dt.$$

由此可見,只要 τ 取得充分小,就总有:

$$\Delta S(T)>0,$$

这样就給出 $S(T)$ 以极小値. 按文献[3],此时可称控制 $u_1, \cdots, u_r$ 为"在小区間 $[t_1, t_2]$ 上最优".

2. 选取 $\delta u_k(t)$, 使其在 $[t_0, T]$ 上有:

$$|\delta u_k(t)|<\varepsilon, \quad (k=1,\cdots,r)$$

此处 $\varepsilon>0$ 是一个充分小的数.

于是据估値公式(11)我們有:

$$\delta x_i(t)\leqslant N_1\varepsilon, \quad (i=1,\cdots,n;\ t_0\leqslant t\leqslant T)$$

此处 N_1 是一个与 ε 无关的常数.

根据 $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ 等对于 u_k 滿足李普希茲条件及此处的估値公式,对于式(10)右端被积函数的后两項我們有:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\lambda,x,u+\delta u,t)-H(\lambda,x,u,t))\delta x_i\right|\leqslant \varepsilon^2 k_1,$$

$$\left|\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\lambda,x+\theta\delta x,u+\delta u,t)\right|\leqslant \varepsilon^2 k_2,$$

其中 k_1, k_2 都是与 ε 无关的正的常数。

于是从式(10)可推出：

$$\Delta S(T) \geqslant -\int_{t_0}^{T}\{[H(\lambda, x, u+\delta u, t)-H(\lambda, x, u, t)]+\varepsilon^2(k_1+k_2)\}dt. \quad (14)$$

因此，如果存在一个 $A>0$ 使有

$$|H(\lambda, x, u+\delta u, t)-H(\lambda, x, u, t)|>A\sum_{k=1}^{r}|\delta u_k(t)|, \quad (15)$$

则由于满足必要条件时必須 $\Delta H \leqslant 0$[1,2]，故条件(15)相当于

$$\Delta H < -A\sum_{k=1}^{r}|\delta u_k(t)| \leqslant -B\varepsilon. \quad (B>0)$$

由此可見，此时式(14)的右端将大于零，从而有

$$\Delta S(T)>0,$$

这样就給出 $S(T)$ 以极小値. 据文献[3]，此时可称 $u_1, \cdots, u_r$ 为“小范围最优”.

对于使 $S(T)$ 有极大値的情形，可类似地进行討論.

将两种情形总起来，可得如下結論：在满足必要条件的前提下，

1) 若满足条件(13)，则 $u_1, \cdots, u_r$ 在小区間 $[t_1, t_2]$ 上最优；

2) 若满足条件(15)，则 $u_1, \cdots, u_r$ 为小范围最优.

三、軌綫末端受有条件限制的情形

現对各种情形分别加以討論.

1. 当 $t=T$ 时，$x_i(T)\ (i=1, \cdots, n)$ 受有如下 p 个条件的限制

$$F_l(x_1, \cdots, x_n) \leqslant 0. \quad (l=1, \cdots, p<n) \quad (16)$$

在不影响普遍性的情况下，設 $p=1$（在 p 不为 1 的一般情形下完全可与 $p=1$ 时类似地討論).

在以后的討論中，我們实际上是借用了分析力学中的方法(可参看文献[6]，第五章，§2)，亦即我們把式(16)看作是加于系統的“約束”. 由于有了这些約束，使得在 $t=T$ 时諸 $\delta x_i(T)\ (i=1, \cdots, n)$ 之間不能再是任意的，而須受到附加条件的限制. 計及这些附加条件，并象分析力学中那样，引入拉格朗日不定乘子 μ，就可得到有关的泛函改变量公式及微分方程的边界条件.

以下分两种情形加以討論.

1) 設在 $t=T$ 时，映象点正位于区域(16)的边界上，即：

$$F(x_1(T), \cdots, x_n(T))=0. \quad (17)$$

今予諸 $x_i(T)$ 以限制条件所允許的改变量 $\delta x_i(T)$，則据条件(16)有

$$F(x_1+\delta x_1, \cdots, x_n+\delta x_n)=\delta c_1. \quad (\delta c_1 \leqslant 0)$$

再由式(17)，于是我們有

$$F(x_1+\delta x_1, \cdots, x_n+\delta x_n)-F(x_1, \cdots, x_n)=\delta c_1. \quad (\delta c_1 \leqslant 0)$$

据函数一次变分的定义，我們又有(設 F 对諸 x_i 有一阶偏导数)：

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}\delta x_n=\delta c. \quad (\delta c \leqslant 0)$$

这就是"約束"(17)加于諸 $\delta x_i(T)$ 間的限制.

将上式两端乘以乘子 μ (其作用将在下面討論),可得关系式:

$$\mu \frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots + \mu \frac{\partial F}{\partial x_n}\delta x_n - \mu\delta c = 0. \quad (\delta c \leqslant 0)$$

再将此式与式(8)相加,得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i(T) + \mu\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\delta x_i(T) - \mu\delta c = \int_{t_0}^{T}\Big\{[H(\lambda, x, u+\delta u, t) - H(\lambda, x, u, t)] + \\ + \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\lambda, x, u+\delta u, t) - H(\lambda, x, u, t))\delta x_i\right] + \\ + \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\lambda, x+\theta\delta x, u+\delta u, t)\right]\Big\}\, dt. \tag{18}$$

今选取乘子 μ (其符号也将在下面討論)及乘子 λ_i 在 $t = T$ 时的值 $\lambda_i(T)$ 使

$$\lambda_i(T) + \mu\frac{\partial F}{\partial x_i} = -c_i, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

或写成

$$\lambda_i(T) = -c_i - \mu\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{19}$$

则据式(18)我們将有:

$$\Delta S(T) + \mu\delta c = -\int_{t_0}^{T}\Big\{[H(\lambda, x, u+\delta u, t) - H(\lambda, x, u, t)] + \\ + \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(H(\lambda, x, u+\delta u, t) - H(\lambda, x, u, t))\delta x_i\right] + \\ + \left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2 H(\lambda, x+\theta\delta x, u+\delta u, t)\right]\Big\}\, dt. \tag{20}$$

这就是軌綫末端受有上述条件限制下泛函的改变量公式. 这里应注意我們已用式(19)代替了式(9),并作为微分方程(5)的边界条件. 在文献 [2] 中,由几何的考虑也得到这种形式的边界条件, 但要求 (16) 为凸集并至少有一个內点, 而此处所用的方法并不要求有內点.

今指出乘子 μ 的作用.

首先,如果不引入乘子 μ, 将有

$$\lambda_i(T) = -c_i - \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (i = 1, \cdots, n)$$

但一般說来,在 $t = T$ 时,諸 $\lambda_i(T)$ 还須受到另一附加条件的限制[1,2],例如

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(T)f_i(x_1(T), \cdots, x_n(T), u_1(T), \cdots, u_r(T)) = 0.$$

这样一来, n 个 $\lambda_i(T)$ 不一定能同时满足上面 $(n+1)$ 个关系式,而在引入未定乘子 μ 后, 式 (19) 实质上給出 $(n-1)$ 个独立关系式,这就可使 n 个 $\lambda_i(T)$ 满足上面 n 个独立关系式.

另外，此时对于 $2n$ 个微分方程(5)，(6)的边界条件为(7)，(17)，(19)共 $2n+1$ 个，如果不引入 μ，則边界条件的个数超过了微分方程的个数．引入 μ 之后，如上述，式(19)只給出了 $(n-1)$ 个独立关系式，則共得到 $2n$ 个边界条件．

以下将推求充分条件．仍如上节分两种情形加以討論．

(1) 若按上节 1 选取 $\delta u_k(t)$，則将有

$$\Delta S(T)+\mu\delta c\geqslant-\int_{t_1}^{t_2}\{\Delta H+\tau k^2(K_1+K_2)\}dt.$$

当

$$|\Delta H|>ak\quad(a>0)$$

时，就有

$$\Delta S(T)+\mu\delta c>0.$$

今选取乘子 μ 使

$$\mu\delta c\leqslant 0,$$

由于 $\delta c\leqslant 0$，故此时必須

$$\mu>0.$$

在此条件下，将有

$$\Delta S(T)>0.$$

可見，这就給出 $S(T)$ 以极小值（小区間最优）．应該注意，$\mu>0$ 是一附加条件，此一条件与式(17)，(19)必須同时被满足才能得到上述結論．

(2) 若按上节 2 选取 $\delta u_k(t)$，則又将有

$$\Delta S(T)+\mu\delta c\geqslant-\int_{t_0}^{T}\{\Delta H+\varepsilon^2(k_1+k_2)\}dt.$$

由此不难得知：上节关于充分性的結論（小范围最优）仍然保持．

对于使 $S(T)$ 有极大値的情形，可类似地进行討論．

归結以上，我們的結論是：在此处所討論的情形下，微分方程(6)增加了一个在 $t=T$ 时的附加条件(17)，微分方程(5)在 $t=T$ 时应满足边界条件(19)．在这些特定的边界条件以及 $\mu>0$ 的条件下，上节关于控制最优性的充分条件均将保持．

在 p 不等于 1 的普遍情形下，只須以

$$F_l(x_1(T),\cdots,x_n(T))=0,\quad(l=1,\cdots,p)\tag{21}$$

代替式(17)，并以

$$\lambda_i(T)=-c_i-\sum_{l=1}^{p}\mu_l\frac{\partial F_l}{\partial x_i},\quad(i=1,\cdots,n)\tag{22}$$

代替式(19)就行了．

2) 設在 $t=T$ 时，映象点位于区域(16)的內部．

此时我們将有

$$\frac{\partial F_l}{\partial x_1}\delta x_1(T)+\cdots+\frac{\partial F_l}{\partial x_n}\delta x_n(T)=\delta c_l,\quad(l=1,\cdots,p)$$

但是此处 δc_l 将不再有一定的符号．这样一来，在諸 $\delta x_i(T)$ 之間就不再能形成一定条件的附加限制，于是我們仍应采用前面的边界条件：

$$\lambda_i(T) = -c_i. \quad (i = 1, \cdots, n)$$

但对于式(6), 当 $t = T$ 时,应满足下面的条件:

$$F_l(x_1(T), \cdots, x_n(T)) < 0. \quad (l = 1, \cdots, n) \tag{23}$$

2. 当 $t = T$ 时, $x_i(T)$ 受如下 p 个条件的限制:

$$F_l(x_1(T), \cdots, x_n(T)) = 0, \quad (l = 1, \cdots, p) \tag{24}$$

且在 $t = T$ 以后,总要求保持

$$F_l(x_1, \cdots, x_n) = 0. \quad (l = 1, \cdots, p)$$

在这种情形下,我們有

$$\frac{\partial F_l}{\partial x_1}\delta x_1(T) + \cdots + \frac{\partial F_l}{\partial x_n}\delta x_n(T) = 0. \quad (l = 1, \cdots, p)$$

与情形 1 相比,此处相当于 $\delta c = 0$ 的情形. 此时对于乘子 λ_i 的微分方程我們将有边界条件:

$$\lambda_i(T) = -c_i - \sum_{l=1}^{p}\mu_l\frac{\partial F_l}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \cdots, n).$$

由于 $\delta c = 0$, 故当选择乘子 μ_l 时, 就不象在前一段那样必須受附加条件的限制 (例如前段中必須 $\mu > 0$), 而其所应取的符号及大小将在具体問題中加以确定. 又控制最优性的充分条件仍如前. 还可指出,由于 $\delta c = 0$, 故此时式(20)和式(10)相同,因此仍可得出如第二部分中的必要条件.

3. 当 $t = T$ 时, $x_s(T)$ 受有如下的条件限制:

$$x_s(T) = x_s^1, \quad (s = 1, \cdots, m < n) \tag{25}$$

这里 $x_s^1(i = 1, \cdots, m)$ 是些給定的值.

最快过渡过程問題就属于这种类型,并对应于 $m = n - 1$ 的情形.

在此处的情形下,对于 x_i 及 λ_i 的微分方程組,将有如下的边界条件(共 $2n$ 个):

$$\begin{aligned} x_i(t_0) &= x_i^0, & (i &= 1, \cdots, n) \\ x_s(T) &= x_s^1, & (s &= 1, \cdots, m) \\ \lambda_r(T) &= -c_r. & (r &= m+1, \cdots, n) \end{aligned}$$

控制最优性的必要条件及充分条件仍不变.

4. 在工程实际中,常遇到如下形式的問題,即:在第一部分所提出的最优控制問題中,除了滿足該处的一切条件外,在控制过程中对于系統(1)还要求某一函数的积分取給定的值,即

$$Q = \int_{t_0}^{T} f(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_r; t)dt, \tag{26}$$

此处, Q 是給定的量(例如可以是軋鋼机的行程),函数 f 的形式将視工程問題中的具体要求而定.

对于这类問題可处理如下:

引入一个新变量 x_{n+1}, 使

$$\dot{x}_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_r; t).$$

将此方程式并入系統(1)中,我們不难看出:

$$x_{n+1}(T) - x_{n+1}(t_0) = Q,$$

或

$$x_{n+1}(T) = Q + x_{n+1}(t_0).$$

如果能据工程問題中的具体条件定出

$$x_{n+1}(t_0) = x_{n+1}^0,$$

并将此条件归并入初始条件 $x_i(t_0) = x_i^0$, $(i = 1, \cdots, n)$, 再将 $Q + x_{n+1}(t_0)$ 写成 x_{n+1}^1, 則显然这类問題可完全化归为前一段所討論的类型.

5. 对于任何 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 以及在 $t = T$ 以后总要求满足:

$$F_l(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad (l = 1, \cdots, p < n) \tag{27}$$

此时,对于任何 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 总有

$$F_l(x_1 + \delta x_1, \cdots, x_n + \delta x_n) - F(x_1, \cdots, x_n) \equiv 0.$$

設 F_l 对于諸 x_i 有一阶及二阶的偏导数,于是有:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta x_i\right)^2 F_l(x_1 + \theta_1\delta x_1, \cdots, x_n + \theta_n \delta x_n) \equiv 0. \quad (l = 1, \cdots, p)$$

此式两端还可乘以乘子 μ_l, 这就是約束(27)加于 $\delta x_i(t)$ 間的限制. 又因为此式恆等于零, 故在乘以 μ_l 再按 l 相加后, 可加于公式(8)的被积函数中. 这样, 經过一些分析計算后, 便不难得出: 在此情形下, 类似于拉格朗日条件极值問題. 我們引入函数 H^0 以代替 H, 此 H^0 为:

$$H^0 = H + \sum_{l=1}^{p} \mu_l F_l, \tag{28}$$

此处 H 仍然是(4),其中乘子 $\lambda_i(t)$ 令其满足微分方程

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H^0}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{29}$$

則系統(1)又可写成

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H^0}{\partial \lambda_i}, \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{30}$$

而(29)的边界条件仍取为

$$\lambda_i(T) = -c_i. \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{31}$$

最后可知第二部分中关于最优控制的必要条件及充分条件等結論仍然保持.

可見在这种情形下只是将 H^0 代替 H 就行了.

最后,作者向天津大学周恆同志,数学研究所宋健、韓京清等同志,自动化研究所章仁为同志,致以深切的謝意. 因为在完成此文的过程中,他們对作者提出了宝貴的意見.

参　考　文　献

[1] Понтрягин, Л. С. 等, Математическая теория оптимальных процессов, ГИФМЛ, 1961.
[2] Розоноэр, Л. И., Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, I, II, III, *Автоматика и телемеханика*, **20** (1959), № 10, 11, 12, 1320, 1441, 1561.
[3] Розоноэр, Л. И., О достаточных условиях оптимальности, *Докл. АН СССР*, **127** (1959), № 3, 520.
[4] Литовченко, И. А., Об одной задаче оптимального управления, *Автоматика и телемеха-*

ника, 1960, № 8, 1122.
[5] Locke, A. S., Guidance, 1955, Chap. 12.
[6] H. H. 蒲赫哥尔茨，理論力学基本教程，錢尙武、錢敏譯，商务印书館.

ON THE PROBLEMS OF OPTIMUM CONTROL WITH CONSTRAINTED CONDITIONS AT THE ENDS OF TRAJECTORIES

CHANG SZU-YING

In this paper some cases of optimum control are studied when the conditions at the ends of trajectories are constrainted. The boundary conditions of the system of the differential equations (19), (22), etc. are determined; the formulae of functional variation (20) are derived; and the sufficient conditions of optimality and necessary conditions in some cases are proved.