第2卷 第4期 自动化学报 Vol. 2, No. 4
1964年10月 ACTA AUTOMATICA SINICA October, 1964

研究簡报

关于常系数綫性系統衰減时間的估計問題

陈永毅

摘　　要

本文对常系数綫性系統，在初始扰动取值于相空間一定范围內而确定的运动衰減到另一个預先給定的范围所需时間，进行了估計，并获得了一定的結果，这个时間的上下界仅跟系統的系数有关.

一、引　言

現考慮常系数綫性系統

$$\frac{dy_k}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{k\alpha}y_{\alpha}, \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

在工程实际中，除需研究系統的稳定性問題外，还要解决衰減时間的估計問題，也就是要对在初始扰动取值于相空間一定范围內由方程(1)确定的运动衰減到另一个預先給定的范围所需时間，进行估計. М. Г. Четаев[1,2] 和黄琳[3]曾利用李雅普諾夫第二方法，从不同角度分别获得如下的結果:

記 M_1, m_1, M_2 与 m_2 分别为 V 与 U 的最大与最小特征值(其中 V 与 U 皆为正定二次型，它們之間的关系为 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)}=\mathrm{grad}\,V\cdot AY=-U$)[4]. 假定一切初始扰动取值于 n 維球面 $\sum_{j=1}^{n}y_j^2=R^2$ 上，則由方程(1)确定的扰动运动衰減到 n 維球面 $\sum_{j=1}^{n}y_j^2=r^2$ 上所經过的时間，总滿足下列不等式

$$\frac{m_1}{2M_2}\ln\frac{M_1R^2}{m_1r^2}\leqslant T\leqslant\frac{M_1}{2m_2}\ln\frac{M_2R^2}{m_1r^2}. \tag{2}$$

本文直接利用已知的李雅普諾夫函数[5]来解决上述时間的估計問題，所得結果是上述时間 T 的上下界，仅与系統(1)的系数 $(a_{k\alpha})$ 有关.

二、定理及其証明

如果特征方程

$$|a_{ks}-\lambda\delta_{ks}|=(-1)^n(\lambda^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n)=0$$

的所有根均具有負实部

$$R_e\lambda_k<0, \quad (k=1,2\cdots n)$$

则其充要条件是 Routh-Hurwitz 行列式

$$\Delta_1 = p_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_0 & p_2 \end{vmatrix} > 0, \cdots \begin{vmatrix} p_1 p_3 \cdots p_{2n-1} \\ p_0 p_1 \cdots p_{2n-2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\ 0 \cdots p_n \end{vmatrix} > 0, \tag{3}$$

式中 $p_0 \equiv 1$, $p_k \equiv 0$, 当 $k > n$ 时.

作出李雅普諾夫函数[5]

$$V(y_1, \cdots, y_n) = \Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq\sigma\pm1}}^{n} \Delta_s \Delta_{\sigma j}^2 (y_1 \cdots y_n). \quad (\Delta_0 \equiv 1) \tag{4}$$

沿方程(1)的曲綫求导数,则有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} = -2\Delta_1 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} y_j^2. \tag{5}$$

这里引入符号

①在 n 阶系数行列式 $|a_{k\alpha}|$ 中第 j 列的元素换以 $\begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}$ 后,取它的第 $v_1 \cdots v_k$ 行、第 $v_1 \cdots v_k$ 列的元素 $(v_1 < v_2 < \cdots < v_k)$, 作出 k 阶子行列式,并以 $M_{v_1 \cdots v_k}^{(j)}(y_1 - y_n)$ 表示之;

②記号 $\sum M_{v_1 \cdots v_k}^{(j)}(y_1 - y_n)$ 表示諸 $M_{v_1 \cdots v_n}^{(j)}(y_1 \cdots y_n)$ 对 $v_1 \cdots v_k$ 的和, 其中 $v_1 \cdots v_k$ 是集 $(1, 2, \cdots, n)$ 中的各种可能組合,但数 j 必須取到;

③行列式 Δ_s 的第 s 行中所有元素 p_{k-1} 以 $\sum M_{v_1 \cdots v_k}^{(j)}(y_1 \cdots y_n)$ 代替, 所得到的新行列式以 $\Delta_{sj}(y_1 - y_2)$ 表示.

对式(4)的 $\Delta_{\sigma j}(y_1 \cdots y_n)$ 进行估計,得如下引理.

引理 1 令 $A = \max|a_{k\alpha}| (k, \alpha = 1, 2, \cdots, n)$, 则有

$$|\Delta_{\sigma j}(y_1 \cdots y_n)| \leqslant (\sigma - 1)!(n!)^{\sigma-1}(A)^{\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}} k_\sigma \sum_{q=1}^{n} |y_q|,$$

$$\sigma = 1, 2, \cdots, n-1, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$k_\sigma = \begin{cases} c_1^{n-1} + c_3^{n-1} \cdot 3! + \cdots + c_\sigma^{n-1} \cdot \sigma! & (\sigma \text{ 为奇数}), \\ 1 + c_2^{n-1} \cdot 2! + \cdots + c_\sigma^{n-1} \cdot \sigma! & (\sigma \text{ 为偶数}). \end{cases}$$

引理的証明完全相同于文献 [5] §5 中的引理 2, 不同之处仅在于 A 的意义有差异.

应用引理 1, 并考虑条件(3)和不等式

$$2|\alpha\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|,$$

则对式(4),我們有下面的估計式.

引理 2 令 $L = \Delta_2 \cdots \Delta_n + n^2 \sum_{\sigma=1}^{n-1} \Big(\prod_{\substack{s=1 \\ s\neq\sigma\pm1}}^{n} \Delta_s \Big) [(\sigma - 1)!]^2 (n!)^{2(\sigma-1)} A^{\sigma(\sigma+1)} k_\sigma^2$, 则有

$$\Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \leqslant V(y_1 \cdots y_n) \leqslant L \sum_{j=1}^{n} y_j^2. \tag{6}$$

証明 左端不等式是显然的,我們現証明右端不等式

$$V(y_1\cdots y_n)\leqslant \Delta_2\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}y_j^2+\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\Big(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Big)[(\sigma-1)!]^2(n!)^{2(\sigma-1)}A^{\sigma(\sigma+1)}k_\sigma^2$$

$$\Big(\sum_{q=1}^{n}|y_q|\Big)^2\leqslant \Delta_2\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}y_j^2+\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\Big(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Big)[(\sigma-1)!]^2\cdot(n!)^{2(\sigma-1)}$$

$$A^{\sigma(\sigma+1)}k_\sigma^2 n\sum_{q=1}^{n}y_q^2=\Big\{\Delta_2\cdots\Delta_n+n^2\sum_{\sigma=1}^{n-1}\Big(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Big)$$

$$[(\sigma-1)!]^2(n!)^{2(\sigma-1)}A^{\sigma(\sigma+1)}k_\sigma^2\Big\}\sum_{j=1}^{n}y_j^2.$$

至此，引理 2 証毕.

估計式(6)等价于不等式

$$-\sum_{j=1}^{n}y_j^2\leqslant -\frac{V}{L},\tag{6-a}$$

以及

$$-\sum_{j=1}^{n}y_j^2\geqslant -\frac{V}{\Delta_2\cdots\Delta_n}.\tag{6-b}$$

把式(6-a)代入式(5)，得

$$\frac{dV}{dt}=-2\Delta_1\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}y_j^2\leqslant -\frac{2\Delta_1\cdots\Delta_n}{L}V.$$

将此式积分，则得

$$V(T)\leqslant V(0)e^{\frac{-2\Delta_1\cdots\Delta_n}{L}T}.\tag{7}$$

应用引理2，可将式(7)写为

$$\sum_{j=1}^{n}y_j^2(T)\leqslant\frac{LR^2}{\Delta_2\cdots\Delta_n}e^{-\frac{2\Delta_1\cdots\Delta_n}{L}T},\tag{8}$$

或

$$r^2\leqslant\frac{LR^2}{\Delta_2\cdots\Delta_n}e^{-\frac{2\Delta_1\cdots\Delta_n}{L}T}.$$

求解 T，得

$$T\leqslant\frac{L}{2\Delta_1\cdots\Delta_n}\ln\frac{LR^2}{\Delta_2\cdots\Delta_n r^2}.\tag{9}$$

同样，把式(6-b)代入式(5)，得

$$\frac{dV}{dt}\geqslant -2\Delta_1 V.$$

最后得

$$T\geqslant\frac{1}{2\Delta_1}\ln\frac{\Delta_2\cdots\Delta_n R^2}{Lr^2}.\tag{10}$$

合并(9)、(10)两个不等式，便得到下列定理:

定理 如果系統(1)是漸近稳定的，則其初始扰动取値在 n 維球面 $\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = R^2$ 上，由(1)确定的运动衰減到 n 維球面 $\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = r^2$ 所經过的时間 T、总可满足下列不等式

$$\frac{1}{2\Delta_1} \ln \frac{\Delta_2 \cdots \Delta_n R^2}{L r^2} \leqslant T \leqslant \frac{L}{2\Delta_1 \cdots \Delta_n} \ln \frac{L R^2}{\Delta_2 \cdots \Delta_n r^2}. \tag{11}$$

从估計式(11)可知，时間 T 的上下界仅与系統(1)的系数有关.

以上估計常系数綫性系統衰減时間的方法，若作适当的修改，則对变系数系統也仍然有效.

参 考 文 献

[1] Четаев, М. Г., О выборе параметров устойчивой механической системы, ПММ, в. 3, 1951.
[2] Четаев, М. Г., 运动稳定性理論，国防工业出版社，1959.
[3] 黄琳，关于非綫性系統的衰減时間的估計問題，北京大学学报(自然科学版) 1960, № 1.
[4] 黄琳，控制系統动力学及运动稳定性理論的若干問題，力学学报，1963年，第6卷，第1期.
[5] 蔡燧林，常系数綫性微分方程組的李雅普諾夫函数公式，数学学报，1959年，第9卷，第4期.

ON THE ESTIMATION OF THE DECAYING TIME FOR A LINEAR SYSTEM

Chen Yong-yi