研究簡报

李雅普諾夫(Ляпунов)第二方法的一个应用*

黄 琳

一、

李雅普諾夫第二方法除可用來判別动力学系統的穩定性問題[1,2]，还可用來研究系統的品質，例如估計系統的衰減时間[3]．近年来，已有不少学者将其用于对系統进行設計．本文継卡尔曼(Kalman)等在設計快速系統应用李雅普諾夫第二方法方面，給出一些回答．

現研究常系数綫性系統

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

其中 x 是 n 維受控向量，u 是受有

$$|u_i| \leqslant 1 \tag{2}$$

限制的 m 維控制，A 与 B 均是 $n \times n$ 的方陣．对应于(1)的自由系統是

$$\dot{x} = Ax. \tag{3}$$

所提出的間題是設計控制器

$$u_i = u_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{4}$$

可使閉合好的系統

$$\dot{x} = Ax + Bu(x) \tag{5}$$

将扰动运动較快地击中原点．

以后，称包含原点为內点的区域 G 为系統(1)按綫性开关的可控区，系指存在有継电器控制

$$u(x) = \operatorname{sign} L(x), \tag{6}$$

其中 $L(x)$ 是 m 維的 x 的綫性函数向量，即

$$L(x) = Cx. \tag{7}$$

对应于該系統，任何初値落在 G 內的运动，均能在有限时間內击中原点．

对于系統(1)，可考慮建立一正定李雅普諾夫函数 V，然后按

$$[\operatorname{grad} V, Bu] = \min, \ |u_i| \leqslant 1 \tag{8}$$

来确定控制．显然，当 V 是正定二次型 $V = x'Vx$ 时，即有

$$u_i = -\operatorname{sign}\left[b_{1i}\frac{\partial V}{\partial x_1} + \cdots + b_{ni}\frac{\partial V}{\partial x_n}\right]. \ (i = 1, 2, \cdots m) \tag{9}$$

显然，这就是綫性开关綫下的継电器．

* 本文于1963年3月收到．

可以証明下述定理成立.

[定理 1]　对于系統(1), 若 B 是非奇异的, 則一定存在按綫性开关的可控区.

[証明]　任給一正定二次型

$$V = x'Vx = \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \tag{10}$$

作为李雅普諾夫函数, 并組成 V 的全导数, 則有

$$\dot{V}|_1 = x'[VA + A'V]x + 2u'B'Vx, \tag{11}$$

其中 A', B' 表示 A, B 的轉置. 現选择 u 使有

$$\dot{V}|_1 = \min, \quad |u_i| \leqslant 1. \tag{12}$$

由此立卽有

$$u_i = -\operatorname{sign} L_i(x), \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{13}$$

其中

$$L_i(x) = C_{i1}x_1 + \cdots + C_{in}x_n. \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{14}$$

但

$$C_{ij} = V_{i1}B_{j1} + \cdots + V_{in}B_{jn}, \tag{15}$$

其中 V_{ij} 是 V 的元素, 它是完全确定的.

显然, 按这样設計的开关面, 总一定是綫性开关面, 且由于 B 非奇异, 矩陣 C 亦非奇异, 由此可知对任一非零的向量 x 总不可能使

$$L_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{16}$$

得到滿足.

若将控制(15)代入式(11)中, 則有

$$\frac{dV}{dt} = W - \sum_{i=1}^{n} |L_i(x)|, \tag{17}$$

其中 $W = x'[VA + A'V]x$, 而 $-\sum_{i=1}^{n} |L_i(x)|$ 总是負定的.

由于 W 是二次型而 V 正定, 故一定存在实数 K_1 使在全空間有不等式

$$W \leqslant K_1 V \tag{18}$$

成立. 另一方面, 在全空間又总有不等式

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} |L_i(x)|\right\}^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} [L_i(x)]^2 = x'ex \tag{19}$$

成立. 故考虑到矩陣 C 非奇异, 得知 e 是正定的, 从而存在 $K_2 = \alpha^2$, 使全空間有

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} |L_i(x)|\right\}^2 \geqslant \alpha^2 V. \tag{20}$$

将不等式(18)和(20)代入式(17)中, 并引入新的変数 $\mu = \sqrt{V}$, 則有 μ 滿足微分不等式

$$\frac{d\mu}{dt} \leqslant \frac{1}{2}[K_1\mu - \alpha]. \tag{21}$$

現利用微分不等式(21)就不同 K_1 的符号来加以考虑.

(1) 若 $K_1 = -K < 0$, 則对微分不等式(21)两边求积分, 可知从区域 $\mu \leqslant \mu_0$ 內任

一点 x_0 出发的运动击中原点的时間一致地满足

$$T \leqslant \frac{2}{K} \log \frac{\alpha + K\mu_0}{\alpha} < +\infty. \tag{22}$$

考虑到 μ_0 的任意性,故可知全空間将是按綫性开关的可控区.

(2) 若 $K_1 = 0$, 則微分不等式退化为

$$\frac{d\mu}{dt} \leqslant -\frac{1}{2}\alpha. \tag{23}$$

由此不难得知代替不等式(22)的将是

$$T \leqslant \frac{2}{\alpha}\mu_0, \tag{24}$$

显然,此时全空間将是按綫性开关的可控区.

(3) 若 $K_1 = K > 0$, 則考虑到区域 G:

$$\mu_0 < \frac{\alpha}{K}, \tag{25}$$

可知, 从区域 $\mu = \mu_0 < \frac{\alpha}{K}$ 內任一点出发的运动击中原点的时間,将一致地满足

$$T \leqslant \frac{2}{K} \log \frac{\alpha}{\alpha - K\mu_0}. \tag{26}$$

由此可知 G 是按綫性开关的可控区.

[定理 2]　若对系統(1)中的 $|B| \neq 0$ 能求得一正定二次型 V, 而其对自由系統(3)的全导数

$$\operatorname{grad} V \cdot Ax \tag{27}$$

是負常号二次形,則全空間是系統按綫性开关的可控区.

应用定理 1 中的 $K_1 = 0$ 的情形,即可証明此定理.

[推論]　若系統(1)满足下述条件:

(1) B 是非奇异的,

(2) A 的特征值均具有非正实部,而对应零实部的根均具有簡单的初等因子,則全空間是按綫开关的可控区.

事实上,若系統(1)满足上述推論的全部要求,則可求出一非奇异綫性变换

$$y = Cx, \quad x = C^{-1}y. \tag{28}$$

将系統(1)变成下述实系数的正則型

$$\dot{y} = Jy + Du, \tag{29}$$

其中 $D = C^{-1}B$ 也是非奇异的. 又

$$J = \begin{Vmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_3 \end{Vmatrix}, \tag{30}$$

其中 J_1 是对应零根的若当块的全部(設其为 l 阶), J_2 是对应純虛根的若当块的全部(設其为 $2m$ 阶), 它們对应的初等因子都是一次的; J_3 对应的是具有負实部根的若当块的全部.

不难証明，由于对 J_3 的假定，一定存在正定矩陣 $\bar{V}^{(3)}$，使有

$$\bar{V}^{(3)}J_3 + J_3'\bar{V}^{(3)} = -I^{(3)}, \tag{31}$$

其中 $I^{(3)}$ 是与 $J^{(3)}$ 同阶的单位矩陣. 考虑到对称矩陣

$$\bar{V} = \begin{vmatrix} I^{(1)} & & 0 \\ & I^{(2)} & \\ 0 & & \bar{V}^{(3)} \end{vmatrix}, \tag{32}$$

可知若

$$\bar{V} = y'\bar{V}y, \tag{33}$$

則总有

$$\mathrm{grad}_y\, \bar{V} \cdot Jy \leqslant 0$$

成立. 由此可知 $\bar{V}$ 适合于定理 2 的全部要求，故推論正确.

在一般情况下，若 B 是奇异的，則定理 1 一般都不成立，此时，不論是对于 $m < n$ 的情形，还是对于可測坐标 x_i 的个数 $< n$ 的情形，均如此.

二、

現考虑非綫性变系数受控系統

$$\dot{x} = X(x, t) + Bu \tag{34}$$

的控制受有(2)的限制. 这里 $X(x, t)$ 是 n 維的向量函数，它对其变量連續. 对应的自由系統是

$$\dot{x} = X(x, t). \tag{35}$$

［定理3］ 对系統(34)存在按綫性开关可控区的充分条件是:

(1) B 是非奇异的，

(2) $X(0, t) = 0$,

(3) $X(x, t)$ 在 $x = 0$ 附近对 $t \in [0, +\infty]$ 有一致小，即任給 $\varepsilon > 0$，总有 $\delta > 0$，使当 $\sum_{s=1}^{n} x_s^2 < \delta^2$ 时总有 $|X(x, t)| < \varepsilon$ 对一切 $t > 0$ 成立.

証明: 任給一正定二次型 $V = x'Vx$，它对系統的全导数是

$$\dot{V} = \mathrm{grad}\, V \cdot X(x, t) + \mathrm{grad}\, V \cdot Bu. \tag{36}$$

选择控制为

$$u = -\mathrm{sign}\, B'Vx = -\mathrm{sign}\, L(x), \tag{37}$$

在此控制下，有

$$\mathrm{grad}\, V \cdot Bu \leqslant -\alpha\sqrt{V}. \tag{38}$$

考虑到 $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$，則按条件(3)可証有 $\delta > 0$，使当 $\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant \delta^2$ 时总有

$$|\mathrm{grad}\, V \cdot X(x, t)| \leqslant \frac{\alpha}{2}\sqrt{V} \tag{39}$$

成立. 由此不难有

$$\dot{V} \leqslant -\frac{\alpha}{2}\sqrt{V},\ 当\ \sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant \delta^2. \tag{40}$$

研究极值 $V = \min, \sum_{s=1}^{n} x_s^2 = \delta^2$, 則 $V < V_{min}$ 就是按綫性开关的可控区，而 $V_{\min}$ 不难求得是 $\nu\delta^2$, 其中 ν 是 V 的最小特征值.

同样，下述两定理亦成立.

[定理4] 对任何变系数綫性受控系統

$$\dot{x} = A(t)x + Bu \tag{41}$$

存在按綫性开关可控区的充分条件是:

(1) $|B| \neq 0$,

(2) $A(t)$ 是有界矩陣.

[定理 5] 对系統(34)，全空間是按綫性开关可控区的充分条件为:

(1) $|B| \neq 0$,

(2) 存在有正定李雅普諾夫函数 $V(x_1, \cdots x_n)$, 它有对任何 $\lambda>1$, 有 $V(\lambda x)>V(x)$ 以及 $\mathrm{grad}\, V \cdot X(x, t) < 0$.

三、

現应用第一部分的結果对系統进行綜合.

首先需指出应用二次形李雅普諾夫函数对綫性受控系統进行設計的全部問題，均归結为如何有效地建立李雅普諾夫函数，这在目前已有現成的公式可加引用[3]. 有了李雅普諾夫函数，綜合問題就变得相当簡单了.

对常系数綫性系統

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{42}$$

的中心問題，是設法求得一正定二次形 V，使由

$$\mathrm{grad}\, V \cdot Bu = \min, \quad |u_i| \leqslant 1 \tag{43}$$

确定的 u 能有

$$\mathrm{grad}\, V \cdot Ax + \mathrm{grad}\, V \cdot Bu < 0, \text{ 当 } x \neq 0. \tag{44}$$

在 $n > m$ 的一般情况下，上述問題的解是否一定存在，还尚待研究，但下述情况，問題是有解的.

(1) 若 A 的特征值均具有負实部，B 是 $n \times m$ 矩陣，則 V 可选为对自由系統判定漸近稳定的李雅普諾夫函数，而根据式(43)确定的綫性开关总可使不等式(44)成立. 由此可知，全空間将至少是系統关于原点的按綫性开关的吸引区.

(2) 若 B 是 $n \times n$ 的非奇异方陣，又 A 满足推論的全部要求，則利用第一部分的結果，上述問題也一定有解，且全空間总是按綫性开关的可控区.

(3) B 的假定同(2)，但 A 并不满足推論的要求，此时可选择如下具有未定参数 α_i 的正定二次形:

$$V = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2, \quad \alpha_i > 0. \tag{45}$$

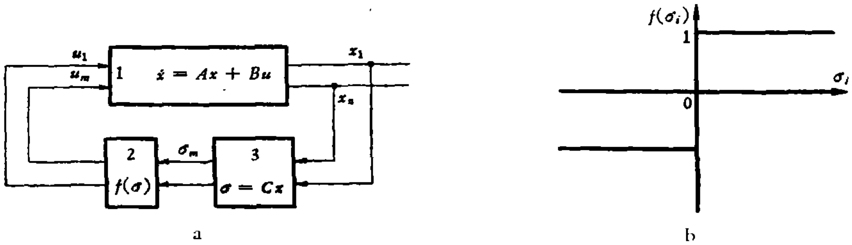
按定理 1 必能求得按綫性开关的可控区 $\mu \leqslant \frac{a}{K}$. 不同的 α_i，可控区当然也将不同. 我們現以可控区較大的一个来确定 α_i. α_i 确定后，就有控制

$$u_i = -\mathrm{sign}[b_{1i}\alpha_1 x_1 + b_{2i}\alpha_2 x_2 + \cdots + b_{ni}\alpha_n x_n]. \tag{46}$$

在应用二次形李雅普諾夫函数后，我們得到的控制器将是

$$u = \mathrm{sign}\,\sigma, \quad \sigma = Cx, \tag{47}$$

其中 C 是 $n \times m$ 矩陣. 由此設計成的系統将如图 1 所示，图 1a 中的 1 为受控对象，2 为理想繼电器，3 为控制命令組合器. 图 1b 为理想繼电器的特性.



a b

图 1

在利用綫性开关設計系統时，往往会出現开关面两側运动方向相反的情况. 此时由于各种实际存在的扰动和时滞，将会产生沿开关面的高頻抖振. 这种現象在使用理想繼电器时常会碰到. 为避免这种現象产生，可利用带有綫性段的繼电器来代替原有的理想繼电器. 前者的特性如图 2 所示. 应該指出，当 $|B| \neq 0$ 时，所有带綫性段的繼电器同时在綫性范围內工作的区域，将只在坐标原点的附近. 这表明系統在大偏差时按快速系統原則工作，而在小偏差时，可用綫性系統代替.

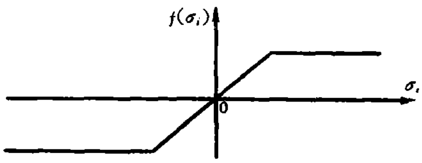


图 2

在常系数綫性受控系統的綜合問題上，目前比較有效的方法还比較少. 列托夫、黄琳等提出应用李雅普諾夫第二方法解貝尔曼方程来解决最优控制器問題[5,7]. 他們的最优指标是針对偏差进行討論的，所得到的也是如图 2 所示的繼电控制.

現应用前述方法討論几个例子.

例一 求本身不稳定的迴轉系統的可控区.

系統方程是

$$\dot{x} = ax + by + u_1, \quad \dot{y} = -bx + ay + u_2, \tag{48}$$

其中 $a > 0$, $b > 0$, 而控制 u 受有 $|u_i| \leqslant 1$ 的限制. 为要确定可控区，可选李雅普諾夫函数为

$$V = x^2 + y^2. \tag{49}$$

此时，V 对(48)的全导数为

$$\frac{dV}{dt} = 2a[x^2 + y^2] + 2xu_1 + yu_2. \tag{50}$$

由此則有

$$u_1 = -\mathrm{sign}\,x, \quad u_2 = -\mathrm{sign}\,y. \tag{51}$$

在引入此組控制下，便有在全空間 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 滿足

$$\frac{dr}{dt} = ar - \frac{1}{r}[|x| + |y|]. \tag{52}$$

为使此式的右端为負值，应有

$$ar^2 - [|x| + |y|] \leqslant 0, \tag{53}$$

它在 xy 平面上是由四个圓的內部所构成，其中一个圓是以 $\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right)$ 为圓心、$\frac{1}{\sqrt{2a}}$ 为半径，其余三个圓則与之对称，如图 3 所示.

考慮到 V 函数在上述区域边界上的最小值为 $\frac{1}{a^2}$，得知可控区域是圓

$$x^2 + y^2 \leqslant \left(\frac{1}{a}\right)^2 \tag{54}$$

的內部.

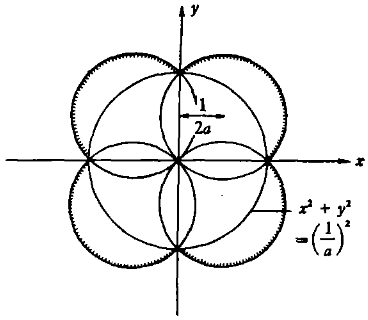


图 3

若 $a \leqslant 0$，則不难証明全空間是按綫性开关的可控区，并且应用上述控制将不难估算出击中原点的时間. 当 $a = -\alpha < 0$ 时，一切初值在 $r \leqslant r_0$ 內发生的运动其击中原点的时間

$$T \leqslant \frac{1}{\alpha} \log [1 + \alpha r_0]; \tag{55}$$

而当 $a = 0$ 时，一切初值在 $r \leqslant r_0$ 內发生的运动其击中原点的时間

$$T \leqslant r_0. \tag{56}$$

例二 三阶系統的綜合

現研究三阶系統

$$\dot{x} = -2x + y + u_1, \ \dot{y} = -2y + u_1 + u_2, \ \dot{z} = -z + 2u_1 + u_3 \tag{57}$$

的控制受有

$$|u_i| \leqslant 1 \tag{58}$$

的限制.

若写成矩陣形式，則对应的矩陣为

$$A \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{59}$$

由于 A 的特征値是 $-1, -2$，且 $|B| \neq 0$，故全空間必为按綫性开关的可控区.

設計系統的控制时，可利用对应的自由系統是漸近稳定的，故可选李雅普諾夫函数为

$$V = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}xy + \frac{9}{32}y^2 + \frac{1}{2}z^2.$$

此时它对系統(57)的全导数为

$$\frac{dV}{dt} = -(x^2 + y^2 + z^2) + u_1\left[\frac{5}{8}x + \frac{11}{16}y + 2z\right] + u_2\left[\frac{1}{8}x + \frac{9}{16}y\right] + u_3 z. \tag{60}$$

由此可知，控制应按

$$\begin{aligned} &u_1 = -\mathrm{sign}[10x + 11y + 32z], \quad u_2 = -\mathrm{sign}[2x + 9y), \\ &u_3 = -\mathrm{sign}\, z \end{aligned} \tag{61}$$

进行.

按此控制設計的系統結构图如图 4 所示.

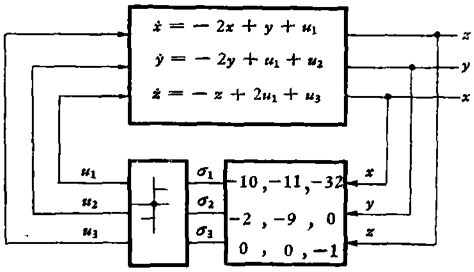


图 4

經过計算,不难証明选取上述的 V 将满足微分不等式

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -2V - \frac{1}{2}\sqrt{V}. \tag{62}$$

由此可知,若考虑 $\mu = \sqrt{V}$ 为新变数,則我們有一切初值取在椭球 $\mu \leqslant \mu_0$ 內的运动其击中原点的时間,将一致地满足

$$T \leqslant \log[4\mu_0 + 1]. \tag{63}$$

参 考 文 献

[1] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, Москва, 1950.
[2] 秦元勋,运动稳定性理论一般问题讲义,科学出版社,北京, 1958.
[3] 黄 琳 (Hwang Ling), On the Estimation of the Decaying Time. The Preprints of the Proceedings of the 2nd IFAC, 1963, No. 103.
[4] Kalman, R. E. and Bertram, J. E., Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Liapunov, J. of Basic Eng., *Trans. of ASME*, **82**(1960), No. 2, 371—395.
[5] Летов, А. М., Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, Москва, 1962.
[6] 高维新, Ляпунов 函数的构造法,北京大学学报, 1962, 第 8 卷,第 3 期, 225—244.
[7] 黄 琳,郑应平,张 迪,李雅普诺夫第二方法与最优控制器分析设计问题,自动化学报, 1964, 第 2 卷,第 4 期, 202—218.

AN APPLICATION OF THE LIAPUNOV'S "SECOND METHOD"

HWANG LING