

# 广义的D-域分划法\*

楊志堅

## 摘 要

文中提出了对线性自动调节系统的一个环节或一个组成部分进行D-域分划的方法。利用这种方法可以判定当该环节或该部分具有各种频率特性时系统特征方程的负实部根的相对数目。文中也提出了利用分划曲线来判定系统特征方程具有全部负实部根的方法。在本文的后一部分,以一个具体系统为例,说明所提出的方法有时可以和谐波平衡法结合使用,以解决含有单值非线性元件的系统的稳定问题。文中列有计算结果与实验数据。

## 一、引 言

当系统的结构和除了一个或两个参数以外的其他参数均已确定,求这一个或两个参数对系统稳定的影响,关于这样的问题已经发表了不少工作。当系统各部分的特性均可用微分方程表示出来时,可用文献[2]所述的方法做出对参数的稳定域分划。当控制对象的特性以试验曲线的形式给出,而包含待定参数的调节器的特性能用微分方程给出时,可以用文献[3]、[4]中所述的方法处理。

实践中,有时由我们选择和调整的不只是一个或两个参数,而是整个一个环节,甚至是系统的一部分,其中可能有许多参数以至整个环节的结构都待确定。有时不仅系统中已经确定的部分的特性是由试验测得的,待定部分的特性也不能用简单的解析式来表示,只能拿各种情况下测得的特性曲线来研究。有时,系统的一个环节或一部分的实际的频率特性和我们用来计算的频率特性有一定的偏离,或者即使计算时我们使用了准确的频率特性,但在运行过程中这部分的频率特性渐渐地改变了,必须研究这时系统是否还保持稳定,或者为了使系统仍能保持稳定,改变这部分频率特性必须受到怎样的限制。

为解决这类的问题,在本文中将对一个参数的稳定域分划法推广到一个环节或系统的一个组成部分上去,并且结合实例说明这种方法有时可以和谐波平衡法结合使用以解决含有单值非线性元件的系统的稳定问题。

顺便指出,文献[5]、[6]建议过从构成系统的两部分的频率特性上,找出具有相同的频率 $\omega$ 和相同的相角 $\varphi$ 的点,以判断整个系统的开环频率特性与横轴交点在 $(-1, 0)$ 点的哪一侧,进而用Nyquist判据来判断系统的稳定。使用该方法,对于比较复杂的系统,必须搜索出每一对这样的点,而且还要判断出每一个“穿越”的方向。

## 二、对一个环节的稳定域分划

设系统的开环传递函数为 $KW(s)$ ,则闭环的传递函数为

\* 本文曾在1962年12月中国自动化学会理论会议上宣读,原标题为:“含有一个可变环节的系统的稳定判据”。  
本文于1964年5月4日收到。

$$\phi(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)}, \quad (1)$$

令

$$1 + KW(s) = 0, \quad (2)$$

解出待定环节的传递函数

$$X(s) = H(s), \quad (3)$$

令  $s = j\omega$ , 将  $H(j\omega)$  画在复数平面上, 即为对待定环节频率特性的分划曲线。如果函数  $X(j\omega)$  是常数, 则式(3)即给出对一个参数的稳定域分划。在一般的情况下,  $X(j\omega)$  是一条以  $\omega$  为参量的曲线。

如果对于某个  $\omega = \omega_k$ , 下列关系式成立

$$X(j\omega_k) = H(j\omega_k), \quad (4)$$

则系统的特征方程(2)有一对纯虚根  $\pm j\omega_k$ 。这时开环的频率特性曲线经过  $(-1, 0)$  点。就是说, 当  $X$ 、 $H$  两条曲线的交点对应的两个参量相等时, 系统的特征方程有一对纯虚根。这种情况相当于对一个参数进行稳定域分划时, 将该参数选在分划曲线之上。

我们知道, 在对一个参数的稳定域分划中, 若该参数由边界上移到阴影侧邻域时, 则相应的虚根便从虚轴上移到虚轴左侧的邻域。与此相似, 对于我们的情况则有如下的定理: 设  $X$  曲线上交点处的频率为  $\omega_x$ , 若  $H$  上对应  $\omega_x$  之点在  $X$  曲线的阴影侧邻域(与此同时,  $X$  曲线上对应交点处  $H$  上的频率  $\omega_H$  之点, 亦必在  $H$  的阴影侧邻域)则系统的特征方程有一负实部根, 在相反的情况下, 系统的特征方程有一正实部根。

现在我们来证明这一定理。设交点  $o$  对应  $X$  曲线上的频率为  $\omega_x$ , 对应  $H$  曲线上的频率为  $\omega_H$ ,  $H$  曲线上对应  $\omega_x$  频率之点  $a$  在  $X$  曲线的阴影侧邻域。在  $s$  平面上, 当  $s$  由  $j\omega_x$  变到  $j\omega_H$  时,  $H$  曲线上对应之点由  $a$  变到  $o$ ,  $X$  曲线上对应之点由  $o$  变到  $b$ , 如图 1 所示。

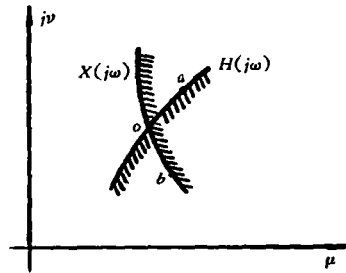


图 1.

因为我们暂时只讨论  $a$ 、 $b$  在交点  $o$  邻域的情况, 所以可以把  $ao$ 、 $ob$  看做两条直的线段。

做满足下式的  $p$  点的轨迹

$$\frac{pa}{po} = \frac{ao}{ob} = k.$$

我们知道,  $p$  的轨迹是一个圆, 其圆心在  $ao$  所在的直线上, 离  $a$  点的距离为

$$X_0 = \frac{-k^2}{1 - k^2} ao,$$

其半径为

$$R = \frac{k}{1 - k^2} ao.$$

随着  $k > 1, k < 1, k = 1$ , 圆心分别在  $o$  的外侧、 $a$  的外侧和无穷远处\*.

我们分别来讨论这三种情况:

1.  $k > 1$  的情况(图 2)

令

$$\angle \varphi = \angle pao - \angle pob.$$

当  $p$  由  $p'$  变到  $p''$  时,  $\angle \varphi$  由  $-\angle aob$  变到  $\angle p''ao$ . 由  $\angle \varphi$  变化的连续性, 知道必然存在一点  $p$ , 使  $\angle \varphi = 0$ , 即使  $\triangle pao$  与  $\triangle pob$  相似.

2.  $k < 1$  的情况(图 3)

当  $p$  由  $p'$  运动到  $p''$  时,  $\angle \varphi = \angle pao - \angle pob$  由  $-\angle aob$  变到  $\pi - \angle aob$ . 由  $\angle \varphi$  变化的连续性, 知道必然存在一点  $p$ , 使  $\angle \varphi = 0$ , 即使  $\triangle pao$  与  $\triangle pob$  相似.

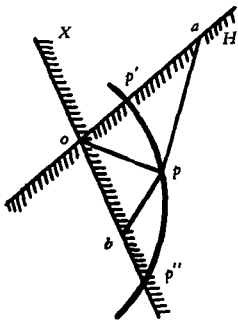


图 2.

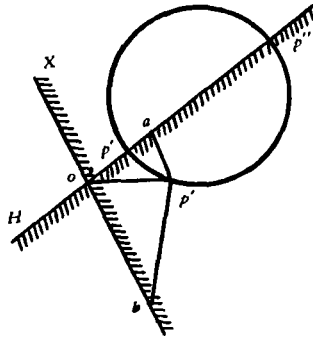


图 3.

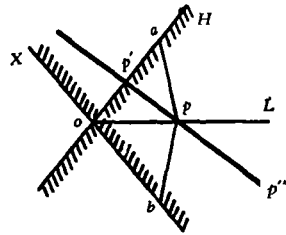


图 4.

3.  $k = 1$  的情况(图 4)

这时  $p$  之轨迹为一直线. 做  $\angle aob$  之等分线  $L$ , 与直线  $p'p''$  相交于  $P$  点, 则

$$\triangle pao \equiv \triangle pob.$$

既然在  $s$  平面上(图 5)座标为  $(0, j\omega_x), (0, j\omega_H)$  的两个点  $\alpha, \beta$  被函数  $H(s)$  变换成  $a, o$  两点, 则由保角变换理论可知, 满足关系式

\* 实际上, 若取新的坐标轴, 使点  $a, o$  位于横轴上, 则点  $p$  之座标满足方程式

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}} = k,$$

即

$$x^2 + y^2 + 2 \frac{k^2 x_1}{1 - k^2} x - \frac{k^2 x_1^2}{1 - k^2} = 0.$$

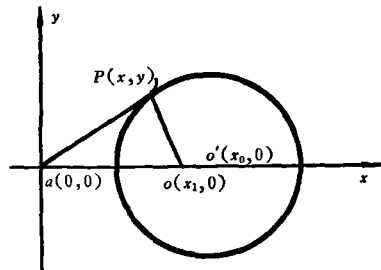
于是得半径

$$R = x_1 \sqrt{\left(\frac{k^2}{1 - k^2}\right)^2 + \frac{k^2}{1 - k^2}} = \frac{k x_1}{1 - k^2},$$

圆心的座标为

$$x_0 = -\frac{k^2 x_1}{1 - k^2},$$

$$y_0 = 0.$$



$$\Delta\eta\alpha\beta \cong \Delta p\alpha o$$

的点  $\eta$  必然被  $H(s)$  变换成  $p$  点. 根据同样的道理,  $\eta$  也被  $X(s)$  变换成  $p$  点. 因而将  $\eta$  点的坐标代入  $X(s)$  和  $H(s)$ , 能使方程(3)成立, 则方程(2)成立; 而  $\eta$  在虚轴的左侧. 这样, 我们的证明便完成了.

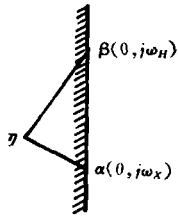


图 5.

用同样的方法可以证明方程(2)有正实部根的情况.

在对一个参数的稳定域分划中, 当参数离开边界, 只要没经过另外的边界, 系统特征方程的负实部根的数目便不改变. 在对一个环节的稳定域分划中, 如果  $a, b$  不在  $o$  点的邻域, 而远离  $o$  点时, 则特征方程的根也要在根平面上做相应的移动. 但只要  $a, b$  离开  $o$

的过程中, 未出现过新的  $X(j\omega'_k) = H(j\omega'_k)$  的情况, 便不会有根穿过虚轴.

可是, 在根运动的过程中, 会不会有根经无穷远处由左半平面过渡到右半平面, 或由右半平面过渡到左半平面, 这还是一个需要讨论的问题.

设

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} = \frac{b_{H0}s^q + b_{H1}s^{q-1} + \dots + b_{Hq}}{a_{H0}s^p + a_{H1}s^{p-1} + \dots + a_{Hp}} \quad (5)$$

$$X(s) = \frac{N_X(s)}{D_X(s)} = \frac{b_{X0}s^n + b_{X1}s^{n-1} + \dots + b_{Xn}}{a_{X0}s^m + a_{X1}s^{m-1} + \dots + a_{Xm}} \quad (6)$$

于是方程(3)可化为

$$f(s) = D_H(s)N_X(s) - D_X(s)N_H(s) = 0. \quad (7)$$

我们知道, 对于有任意数值系数的多项式  $f(s)$ , 数

$$1 + \frac{A}{|a_0|}$$

为它的所有实根或复根的模的上限, 式中  $a_0$  为首项系数,  $A$  为各系数的模的最大值. 因此, 如果在  $X(s)$  改变的过程中, 不出现  $a_{X0} = 0$ , 或  $b_{X0} = 0$  的情况, 则  $f(s)$  的根便只在有限大的范围内活动. 若  $p - q > m - n$ , 即使出现  $a_{X0} = 0$ , 只要  $b_{X0} \neq 0$ , 也不会有根到无穷远处去. 同样, 若  $p - q < m - n$ , 即使出现  $b_{X0} = 0$ , 只要  $a_{X0} \neq 0$  也不会有根到无穷远处去. 对于  $p - q = m - n$  这种很难遇到的情况, 只要  $a_{H0}b_{X0} - b_{H0}a_{X0} \neq 0$ , 也不会有根到无穷远处去.

稳定域分划总是针对根的总数保持不变的情况. 如果上述条件不满足, 根的总数便减少了.

应该指出, 要想知道  $p - q$  与  $m - n$  的数值, 并不需要写出  $H(s)$  和  $X(s)$  的解析式, 只要看图形上当  $\omega \rightarrow \infty$  时  $H(j\omega)$  和  $X(j\omega)$  扫过多少个象限就够了. 同样  $a_{X0} = 0$  或  $b_{X0} = 0$  等情况, 也可以从图形上看出.

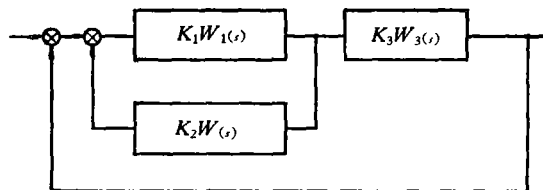


图 6.

至此, 我们就把对邻域得到的结果, 推广到不是邻域的情况了.

现在以图 6 所示的方框图为例, 说明这种方法的应用. 设已知  $K_1W_1(s)$  与  $K_3W_3(s)$ ,

求使系统稳定的  $K_2W_2(s)$ 。

系统开环的传递函数为

$$KW(s) = \frac{K_1W_1(s)K_3W_3(s)}{1 + K_1W_1(s)K_2W_2(s)}, \quad (8)$$

系统闭环的传递函数为

$$\phi(s) = \frac{K_1W_1(s)K_3W_3(s)}{1 + K_1W_1(s)K_2W_2(s) + K_1W_1(s)K_3W_3(s)}, \quad (9)$$

令

$$1 + K_1W_1(s)K_2W_2(s) + K_1W_1(s)K_3W_3(s) = 0, \quad (10)$$

在这种情况下

$$X(s) = K_2W_2(s), \quad (11)$$

所以

$$H(s) = - \left[ \frac{1}{K_1W_1(s)} + K_3W_3(s) \right] \quad (12)$$

曲线  $H(j\omega)$  示于图 7 中。

如图所示, 在有限的范围内,  $H(j\omega)$  不与实数轴相交。由对一个参数的稳定域分划理论可知, 若取校正环节为单纯的硬反馈, 即  $X(s) = K_2$ , 则不论  $K_2$  取怎样的数值, 系统都不会稳定。被  $H(j\omega)$  的阴影线所包围的区域在第一象限, 这就提示我们选用其频率特性在第一象限的校正环节。

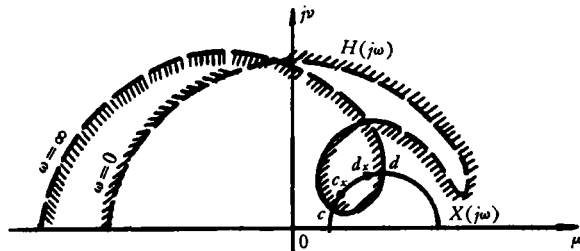


图 7.

将  $X(j\omega)$  曲线也画在图 7 上。设  $H$  与  $X$  有两个交点  $c$ 、 $d$ , 对应  $H$

上的频率分别为  $\omega_c$ 、 $\omega_d$ ; 在  $X$  上与  $\omega_c$ 、 $\omega_d$  相对应的点为  $c_x$ 、 $d_x$ 。如前所述, 当  $c_x$  与  $c$  重合时, 系统有一对纯虚根。若将微分效应减弱, 使  $c_x$  移至  $c$  点之下, 则这一对虚根便移到右半平面; 反之, 将微分效应增强, 则这一对虚根便移到左半平面。但是, 若将微分效应过分增强, 以致使  $d_x$  越过  $d$  点时, 便又有另外的根由左半平面过渡到右半平面了。因而, 只有当  $c_x$  与  $d_x$  均在  $H$  的阴影侧时, 系统才有可能稳定。

### 三、稳定情况的判断

正如对一个参数的稳定域分划只能确定各区域的负实部根的相对数目一样, 在上述对一个环节的分划中, 也只能确定各种情况下负实部根的相对数目。负实部根的数目最多, 只是系统稳定的必要条件, 为了判别系统是否稳定, 还至少需要知道一种情况下负实部根的绝对数目。

为了这个目的, 可以取一种极端的情况来研究。我们知道, 一个环节当某些参数往极端变化时, 常可蜕化为一点。这样我们就可以象对待一个参数的分划那样, 来解决这一问题, 譬如说, 可以用文献[7]中第 276 页所推荐的公式。

如图 8 所示。假定已经知道当  $X(j\omega)$  取常数值  $K_2$  时, 系统是稳定的, 即所有根全

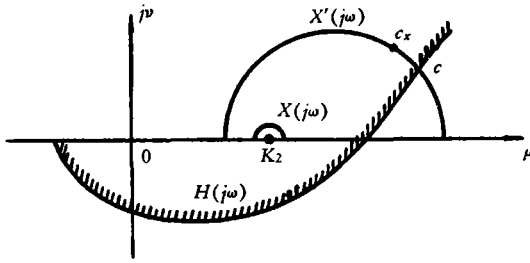


图 8.

在左半平面上。由物理概念可知，当  $X(j\omega)$  为  $K_2$  点附近之无穷小圆时，系统仍然是稳定的。将此小圆增大，只要  $c_x$  在  $H(j\omega)$  的阴影侧，系统还是稳定的。

对于其方框图如图 6 所示的这种经常遇到的情况，由多项式的幅角定理，可以导出一种便于应用的稳定判据。

设

$$K_1W_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}; \quad K_2W_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}; \quad K_3W_3 = \frac{N_3(s)}{D_3(s)}. \quad (13)$$

式中  $N_i(s)$ 、 $D_i(s)$  为  $s$  的多项式。

由(9)式得

$$\phi(s) = \frac{N_1(s)N_3(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s)D_3(s) + N_1(s)N_2(s)D_3(s) + N_1(s)N_3(s)D_2(s)}. \quad (9')$$

系统的特征方程为

$$D_1(s)D_2(s)D_3(s) + N_1(s)N_2(s)D_3(s) + N_1(s)N_3(s)D_2(s) = 0. \quad (14)$$

我们来研究函数

$$\psi(s) = \frac{D_1(s)D_2(s)D_3(s) + N_1(s)N_2(s)D_3(s) + N_1(s)N_3(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s)D_3(s)}, \quad (15)$$

由物理概念知道， $N_1(s)N_2(s)D_3(s)$ 、 $N_1(s)N_3(s)D_2(s)$  的阶数不比  $D_1(s)D_2(s)D_3(s)$  的阶数高，所以(8)式中分子与分母的阶数相等。如果系统是由稳定环节组成的，即  $D_1(s)D_2(s)D_3(s) = 0$  的根全在左半平面上，为使系统稳定，即特征方程的根全在左半平面上，则须下列条件成立，即当  $s = j\omega$ ，且  $\omega$  由 0 变到  $\infty$  时， $\psi(s)$  转过的相角之和为零。

将(15)式除以  $K_1W_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$  得

$$\frac{\psi(s)}{K_1W_1(s)} = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} + \frac{D_1(s)}{N_1(s)} + \frac{N_3(s)}{D_3(s)} = X(s) - H(s). \quad (16)$$

因而

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg [X(j\omega) - H(j\omega)] = \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg \psi(j\omega) + \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg \frac{1}{K_1W_1(j\omega)}. \quad (17)$$

如前所述，若使系统稳定，则须

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg \psi(j\omega) = 0, \quad (18)$$

即

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg [X(j\omega) - H(j\omega)] = \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg \frac{1}{K_1W_1(j\omega)}, \quad (19)$$

于是，我们得出下面的判断稳定的方法：如果  $D_1(s)D_2(s)D_3(s) = 0$  的根全在左半平面上，当  $\omega$  由 0 变到  $\infty$  时，向量  $X - H$  所转过的角度与  $\frac{1}{K_1W_1(j\omega)}$  所转过的角度相等，则系统是稳定的。

对于  $D_1(s)D_2(s)D_3(s) = 0$  有零根的情况，可以用在根平面上绕原点右边做一无穷小

的补充弧, 相应地在频率特性曲线上做一无穷大半径的圆弧的方法来处理。(文献[7]中第 253—254 页)这时上述的判据不变。

用类似的方法可以证明, 若  $D_1(s)D_2(s)D_3(s) = 0$  有  $m$  个正实部根, 当  $\omega$  由 0 变到  $\infty$  时, 如果

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg [X(j\omega) - H(j\omega)] = \Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg \frac{1}{K_1 W_1(j\omega)} + m\pi, \quad (20)$$

则系统稳定。

向量  $X(j\omega) - H(j\omega)$  是由  $X$  上的点到  $H$  上相应频率的点的连线。这样, 我们便可以根据曲线  $X(j\omega)$ 、 $H(j\omega)$  和  $K_1 W_1(j\omega)$  来判断系统的稳定。

对于图 7 所示的情况,  $m = 0$ ,  $\frac{1}{K_1 W_1(j\omega)}$  转过四个象限,  $H$  的无穷大半径的补充弧如虚线所示。显然, 如果  $c_x$ 、 $d_x$  在曲线  $H$  的阴影侧, 则向量  $X - H$  也转过四个象限, 因而系统是稳定的。如果  $c_x$  在  $c$  之下, 即在  $H$  的无阴影侧, 而  $d_x$  在  $H$  曲线的阴影侧, 则向量  $X - H$  转过的象限为零, 故系统不稳定。以此类推。

作为一种特例, 令  $X(j\omega) = 0$ , 则此判据归结为 Nyquist 判据。应该提到的是, M. Satche 在解决带时滞系统的稳定问题时, 曾建议过类似的使向量首尾均在平面上移动的方法<sup>[1]</sup>。

做如图 9 所示的辅助线, 使  $a$  与  $a'$ 、 $b$  与  $b'$  所对应的频率相等。显然,

$ob'/ob$  为系统对  $X(j\omega)$  的放大系数的稳定储备,  $\angle a'o a$  为系统对  $X(j\omega)$  的相角的稳定储备。

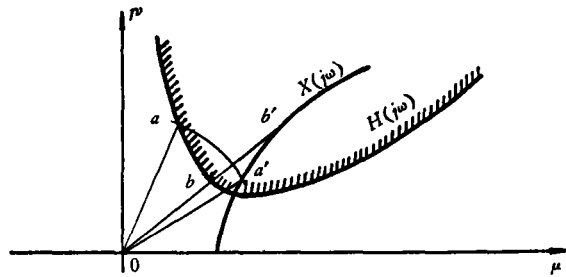


图 9.

#### 四、对整个环节的的稳定域分划法在非线性的情况下的应用

就其实质说来, 上面所讨论的方法属于频率法的范畴。因而, 用于处理含有非线性元件的系统的谐波平衡法, 在这里也是适用的。自然, 在应用谐波平衡法时, 也要求系统的线性部分必须具有滤波器的特性<sup>[8]</sup>。

使用谐波平衡法时, 一般趋向于将线性部分和非线性部分分开, 将系统变为由此两部分组成的单环系统<sup>[9-11]</sup>。这种方法当可变环节以较复杂的关系包含在线性部分之内时, 用起来就不够方便了。用下面的方法, 不必做这种方框图的变换, 可以直接求出可变环节必须满足的条件。

仍以图 6 所示的方框图为例。准确的  $K_1 W_1(j\omega)$ 、 $K_3 W_3(j\omega)$  如图 10 所示。  $K_1 W_1(j\omega)$  表示的具体结构是由电子管放大器、欠补偿情况下的交磁放大机和伺服电动机组成的;  $K_3 W_3(j\omega)$  中包含伺服机构的积分环节和核子反应堆的传递函数, 其解析式如下<sup>[13]</sup>

$$K_3 W_3(s) = \frac{1}{l^* s^2 \left[ 1 + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{l^*(s + \lambda_i)} \right]}. \quad (21)$$

取可变环节的频率特性为下列形式

$$X(j\omega) = K_2W_2(j\omega) = K \left( \alpha_1 + \frac{\alpha_2 T_1 j\omega}{1 + T_2 j\omega} \right), \tag{22}$$

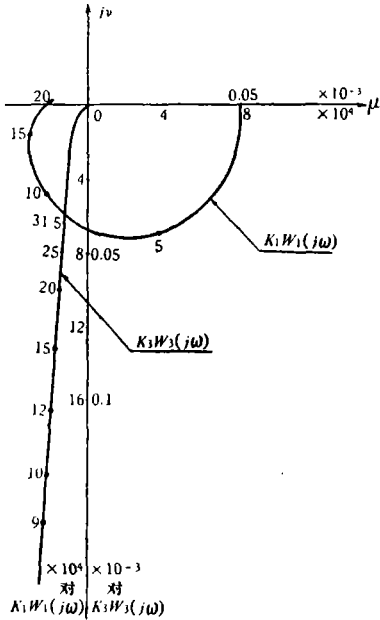


图 10.

曲线  $K_2W_2(j\omega)$  系以  $\left[ K \left( \alpha_1 + \frac{\alpha_2 T_1}{2T_2} \right), 0 \right]$  为圆心, 以  $\frac{KT_1\alpha_2}{2T_2}$  为半径的圆, 如图 11 所示.  $\alpha_1$  决定圆上  $\omega = 0$  的点与纵轴的距离;  $\alpha_2$  决定圆的大小. 当  $\alpha_1$  一定时, 改变  $\alpha_2$  所得的一族圆之间的关系是一种放射变换.

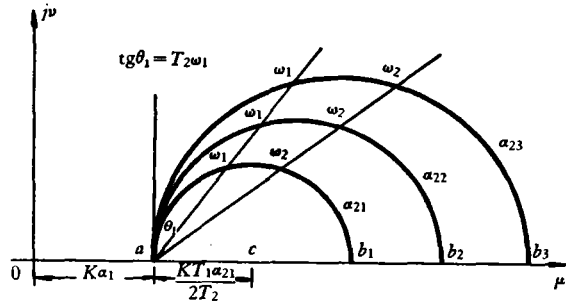


图 11.

取  $K = 0.25 \cdot 10^{-3}$ ,  $T_1 = 0.04$ ,  $T_2 = 0.0039$ ,  $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha_2 \leq 1$  为可调参数, 则

$$K_2W_2(j\omega) = 0.25 \cdot 10^{-3} \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_1 0.0039 j\omega + \alpha_2 0.04 j\omega}{1 + 0.0039 j\omega} \right) \approx 0.25 \cdot 10^{-3} (\alpha_1 + \alpha_1 0.0039 j\omega + \alpha_2 0.04 j\omega).$$

由于参数选择得合适, 在我们感兴趣的频率范围内,  $K_2W_2(j\omega)$  中的分母的作用可以忽略. 如果这一因素必须考虑, 可以用  $1 + T_2 j\omega$  因子来修正  $H$ .

设  $K_1W_1(j\omega)$  中串有如图 12 所示的非线性元件(相当于放大元件的饱和情况)让我们来求为使系统稳定,  $\alpha_1, \alpha_2$  应取的值.

在线性的情况下,  $H$  是一条仅以  $\omega$  为参量的曲线, 如图 7 所示. 在现在的情况下,  $K_1$  的大小随着非线性元件输入端信号的振幅按图 13 所示的关系而改变<sup>[10]</sup>. 随着  $K_1$  的减小,  $\frac{1}{K_1W_1(j\omega)}$  曲线向离开原点的方向扩展, 于是  $H(j\omega)$  连续地改变,  $H$  与  $X$  的交点的位置以及对应的频率也都相应地改变, 这就使问题复杂化了.

不过我们可以用另外的方法来避开这一困难. 我们知道, 在单值非线性的情况下,  $K_1$  减小时,  $W_1(j\omega)$  的方向不变. 因而对应某一  $\omega$  值在  $H$  上不是一点, 而是由此点继续向  $-\frac{1}{W_1(j\omega)}$  方向延伸的半射线. 显然为使系统在任何振幅的初始扰动之下均能稳定, 必须使  $X(j\omega)$  上相应的点, 在这些相应的半射线的阴影侧.



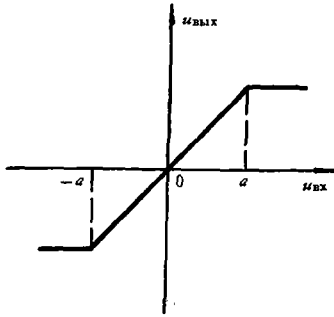


图 12.

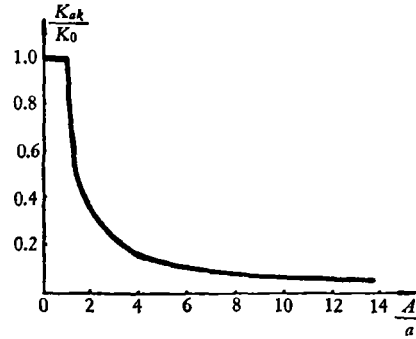


图 13.

为了求出满足上述条件的最小的 \$\alpha\_2\$ 值, 可以用下面的方法: 在横轴上截取对应 \$\alpha\_{1i}\$ 的诸点 \$(\mu\_i, 0)\$, 通过这些点做垂直线, 如图 14. 这些垂直线与半射线的交点的座标为 \$(\mu\_i, jv\_{ij})\$, 而

$$\begin{aligned} \mu_i &= K\alpha_{1i} = 0.25 \cdot 10^{-3} \alpha_{1i}, \\ i &= 1, 2, 3, \dots \\ v_{ij} &= K(\alpha_{1i}T_2 + \alpha_{2j}T_1)\omega_j = \\ &= 0.25 \cdot 10^{-3}(0.0039\alpha_{1i} + \\ &\quad + 0.04\alpha_{2j})\omega_j, \\ j &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

式中 \$\omega\_j\$ 为半射线所对应的频率, \$\alpha\_{2j}\$ 为使 \$X\$ 上对应 \$\omega\_j\$ 的点能在 \$(\mu\_i, jv\_{ij})\$ 处所需的值. 在图 15 中标出 \$(\omega\_j, v\_{ij})\$ 诸点, 将对应同一 \$\alpha\_{1i}\$ 的各点连起来, 得如图 15 所示的一族曲线. 过原点做这些曲线的切线, 其斜率便是对应 \$\alpha\_{1i}\$ 的最小的

$$\text{tg } \varphi_i = K(\alpha_{1i}T_2 + \alpha_{2kp}T_1). \quad (24)$$

最后可以求出对应 \$\alpha\_{1i}\$ 的最小的

$$\alpha_{2ikp} = \frac{\text{tg } \varphi_i}{KT_1} - \frac{\alpha_{1i}T_2}{T_1} \approx 10^5 \text{tg } \varphi_i - \frac{\alpha_{1i}}{10}, \quad (25)$$

将相应的 \$\alpha\_1, \alpha\_2\$ 值做出曲线如图 16 所示. 图中虚线所表示的是按线性理论算得的结果. 这样, 在理论上就将 \$\alpha\_1, \alpha\_2\$ 平面分为 \$A, B, C\$ 三个区域:

参数选在 \$A\$ 区里, 系统稳定; 参数选在 \$B\$ 区里, 系统是否稳定视扰动大小而定; 参数选在 \$C\$ 区里, 系统不稳定.

在图 16 中也标出了在大扰动之下实验所得的使系统稳定的 \$\alpha\_1, \alpha\_2\$ 的临界值\*. 可以

\* 在实验过程中, 反应堆是用模拟机来代替的, 其他部分用实际的元件.

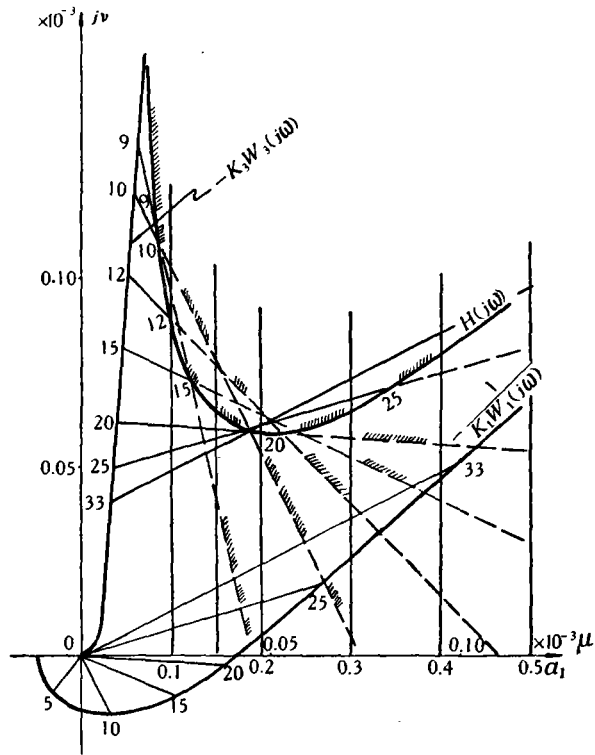


图 14.

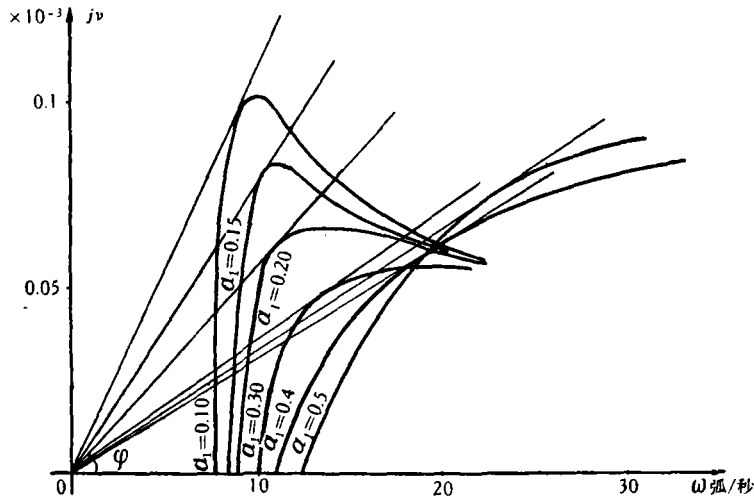


图 15.

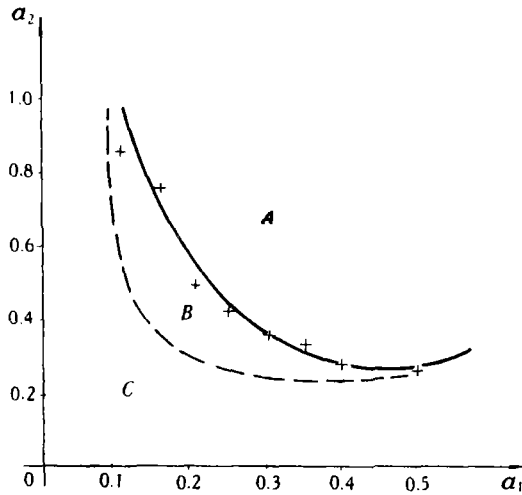


图 16.

+——实验数据。 实线——按非线性理论计算的结果。  
 虚线——按线性理论计算的结果。A——稳定区；B——稳定取决于扰动的区域；C——不稳定区

看出,实验结果与计算结果是符合得很好的。

如果  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  取区域 A 以外的值, 可以很容易地求出系统自振荡的参数。实际上, 按给定的  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  做  $X(j\omega)$ , 然后由  $-K_3W_3(j\omega)$  上的点向  $X$  上具有相同频率的点连线, 则得向量  $X(j\omega) + K_3W_3(j\omega)$ 。这一向量的方向随着  $\omega$  而改变, 当这一向量的方向与  $-\frac{1}{K_1W_1(j\omega)}$  的方向一致时, 便对应一种自振荡的情况。相应的频率  $\omega_{ak}$  便是自振荡的频率; 由比值

$$\frac{K_{ak}}{K_0} = \frac{\left| \frac{1}{K_1 W_1(j\omega_{ak})} \right|}{|X(j\omega_{ak}) + K_3 W_3(j\omega_{ak})|}, \quad (26)$$

在图 13 中可查出自振荡过程中非线性元件输入信号的基波振幅。

限于文章的篇幅, 这里不去讨论自振荡参数的稳定问题。

## 五、结 束 语

1. 利用文中提出的对系统的一个环节或一个组成部分进行稳定域分划的方法可以判定, 当待定环节取各种频率特性时, 系统特征方程的负实部根的相对数目。利用分划曲线  $H$ 、 $X$  和  $K_1 W_1(j\omega)$  可以判断系统特征方程是否具有全部负实部根。

2. 使用文中提出的方法时, 可以直接利用实验测得的系统各环节或各部分的频率特性曲线, 这些曲线有时用数学公式描写起来是很复杂的。

象对一个参数的稳定域分划一样, 利用现在这个方法比较容易从综合的角度解决问题。特别是, 我们可以在结构的综合上得到启示。

3. 文中的例题说明这种方法有时可以和谐波平衡法结合使用以解决含有单值非线性元件的系统的稳定问题。因为无需将系统化为由线性部分和非线性部分组成的单环系统, 所以计算过程比较简便。计算结果与实验相符合。

## 参 考 文 献

- [1] 钱学森, 工程控制论, 科学出版社, 1958 年。
- [2] Нейпарк, Ю. И., Об определении значений, при которых система автоматического регулирования устойчива, *АиТ*, **9** (1948) № 3, 190—203.
- [3] Дудников, Е. Г., Определение настройки регулятора по динамическим характеристикам регулируемого объекта и регулятора, полученным из опыта. *АиТ*, **14** (1953), № 3, 294—307.
- [4] Поповский, А. М., О построении D и D<sub>ε</sub>-разбиений для систем регулирования взаимосвязанных величин, заданных экспериментально снятыми характеристиками, *АиТ*, **14** (1953), № 3, 308—321.
- [5] Leonhard, A., Die selbsttätige Regelung, Berlin (1957), 259—263.
- [6] Опельт, В., Критерий устойчивости, основанный на методе двух годографов, *АиТ*, **22** (1961) № 9, 1175—1178.
- [7] Под ред. В. В. Солодовникова, Основы теории автоматического регулирования, Машгиз, 1953.
- [8] Айзерман, М. А., Проблема определения периодических режимов в системах автоматического регулирования, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. Изд. АН СССР, 1955, т. 1, 105—130.
- [9] Гольдфарб, Л. С., О некоторых нелинейностях в системах регулирования, *АиТ*, **8** (1947), № 5, 349—383.
- [10] Kochenburger, R. J., A Frequency Response Method for Analyzing and Synthesizing Contactor Servomechanism, *AIEE*, **69**, Part I (1950), pp. 270—284.
- [11] Гольдфарб, Л. С., К теории систем регулирования с исполнительным механизмом ограниченной скорости, *АиТ*, **22** (1961), № 10, 1324—1332.
- [12] Розенман, Е. А., Выступление на прениях, Труды Второго Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, т. II, 1955, 236—237.
- [13] Schultz, M. A., Control of Nuclear Reactors and Power Plants, McGraw-Hill, 1955.

## A GENERALIZED METHOD OF D-DECOMPOSITION

YANG CHIH-JIAN

In this paper a method is proposed for the construction of the D-decomposition curve for an element or a part of a linear control system to determine its stability. For various frequency responses of the element or part, the relative number of roots of the characteristic equation with a negative real part can be determined by this method. Methods of using the D-decomposition curves to judge whether all the roots of the characteristic equation possess a negative real part are also discussed. It is illustrated in the last part of the paper that the proposed method can sometimes be employed together with the describing function method to solve the stability problem of a system with single-valued, nonlinear elements.