

绝对不变性与不变性到 ε 自适应控制系统

吕应祥

摘要

本文讨论了按不变性原理设计自适应控制系统的问题。提出了利用继电器的滑动工作状态及改变等效放大倍数来实现自适应控制的方案。给出了产生连续滑动的必要条件。

一、问题的提出

无论是在飞行物体还是在生产过程的控制系统中，对象的动力学特性都随着飞行状态或工作条件而变化。为使系统在所有工作条件下都能满足某一给定的质量指标，人们开始采用自适应原理来进行控制^[1]。但是按照一般自适应原理设计的自适应系统，并不能满足“瞬时适应”的要求，因而在很多情况下达不到自适应的目的。本文将讨论按照不变性原理设计自适应控制系统问题。按照这一原理设计的自适应系统，具有下列几个特点：

1. 不需要在测量对象特性和参数的搜索整定上花费时间，因而能够达到“瞬时适应”的目的；
2. 能够获得系统的某一个或几个广义座标，不仅与对象特性的变化无关，而且也与干扰无关；
3. 可以得到便于进行最佳控制的理想对象特性，因而可以进行最佳适应控制。

在文献[2,3]中，曾提出按干扰原理实现变系数系统绝对不变性的条件，但是这些条件实际上是不可能实现的。在本文的第二节中，提出了利用放大器饱和和限制的非线性实现不变性的方案。在第三节中提出了利用改变等效放大倍数实现不变性的原理及其具体方案，而在文末，则附有一个简单例子的实验结果。

二、按干扰控制原理实现不变性的自适应控制系统

假定控制对象的动力学特性可用变系数线性微分方程

$$L_1(p, t)x(t) = Y_1(p, t)\{u(t) + f(t)\} \quad (1)$$

来描述，

式中

$$L_1(p, t) = \sum_{i=0}^n a_i(t)p^i;$$

$$Y_1(p, t) = \sum_{j=0}^m b_j(t)p^j; \quad (m < n)$$

$$p = \frac{d}{dt};$$

x ——系统的输出坐标;

u ——控制讯号;

f ——干扰讯号,它是时间的有规则的函数.

而需要保持的理想对象特性的方程为

$$L_0(p)x(t) = Y_0(p)u(t), \tag{2}$$

式中

$$L_0(p) = \sum_{i=0}^k a_i^0 p^i;$$

$$Y_0(p) = \sum_{j=0}^l b_j^0 p^j. \quad (l < k)$$

为了方便起见,下面我们一律用算子的形式来描述. 这样,可将方程(1)写成下列形式

$$x = L_1^{-1}Y_1\{u + f\}, \tag{3}$$

式中 L_1^{-1} 为 L_1 的逆算子.

由式(3)可得

$$x = L_1^{-1}Y_1\{u + f\} = L_1^{-1}Y_1\{u + f\} + L_0^{-1}Y_0u - L_0^{-1}Y_0u = L_0^{-1}Y_0\{u + \varphi\}, \tag{4}$$

式中

$$\varphi = Y_0^{-1}L_0[L_1^{-1}Y_1\{u + f\} - L_0^{-1}Y_0u]; \tag{5}$$

L_0^{-1} 为 L_0 的逆算子,而 Y_0^{-1} 为 Y_0 的逆算子; φ 称为等效干扰.

由式(5)可以看出,等效干扰 φ 不仅包含着因对象参数变化所引起的影响,而且还包含着外加干扰 $f(t)$. 因此,如果能够保证对象输出座标 $x(t)$ 对等效干扰 $\varphi(t)$ 保持不变,因而也就对干扰 $f(t)$ 保持不变,则对象特性将能始终保持为理想特性.

由式(4)可以看出,控制对象的等效方块图可用图 1 表示.

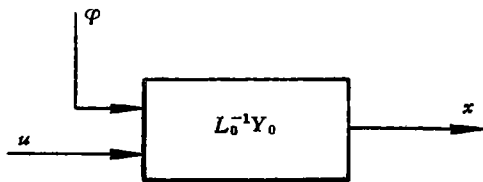


图 1.

由图 1 或方程(4)可以看出,如果在控制对象的输入端再加入一个 $-\varphi(t)$,则加在控制对象输入端的合成干扰将等于零,即 $\varphi - \varphi \equiv 0$. 等效干扰 $\varphi(t)$ 可按公式(5)获得,其方块图如图 2 所示.

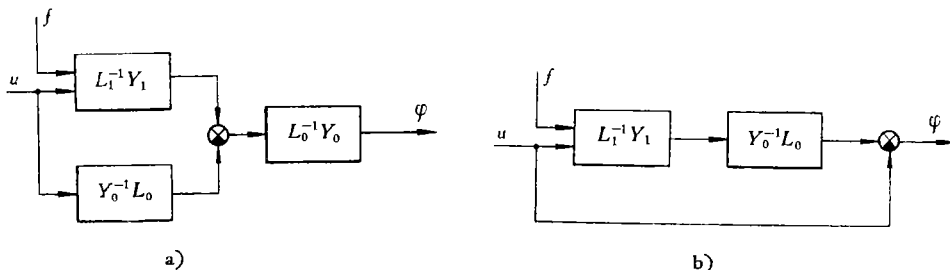


图 2.

按干擾控制原理實現 x 對 φ 保持絕對不變的方塊圖如圖 3 所示。

由圖 3 可以看出

$$x_{\text{HHB}} = L_1^{-1} Y_1 \{u - \varphi + f\}, \quad (6)$$

而

$$\begin{aligned} \varphi &= Y_0^{-1} L_0 [L_1^{-1} Y_1 \{u - \varphi + f\} - \\ &\quad - L_0^{-1} Y_0 \{u - \varphi\}] = \\ &= u + f - Y_0^{-1} L_0 \cdot Y_1^{-1} L_1 u. \end{aligned} \quad (7)$$

將式(7)代入式(6),得

$$x_{\text{HHB}} = L_0^{-1} Y_0 u. \quad (8)$$

由此可見,對象輸出座標 x 不僅與對象的特性參數的變化無關,而且也與外加干擾 f 無關,即 x 對 φ 保持不變。

其實,我們可以不必要直接測量等效干擾 φ 而用多迴路反饋的辦法來達到 x 對 φ 的絕對不變性。為此,我們將對象方程改寫成下列形式

$$a_{11}^0 x + a_{13}^0 u = -a_{13}^0 \varphi, \quad (9)$$

式中

$$a_{11}^0 = L_0; \quad a_{13}^0 = -Y_0.$$

執行機構和調節器的方程為

$$\begin{cases} a_{21}x + a_{22}y + a_{23}u = g(t), \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}u = 0, \end{cases} \quad (10)$$

式中

- y ——調節器的輸出座標;
- $g(t)$ ——控制訊號;
- u ——執行機構的輸出座標。

對應於方程(9)和(10)的系統,其方塊圖如圖 4 所示。

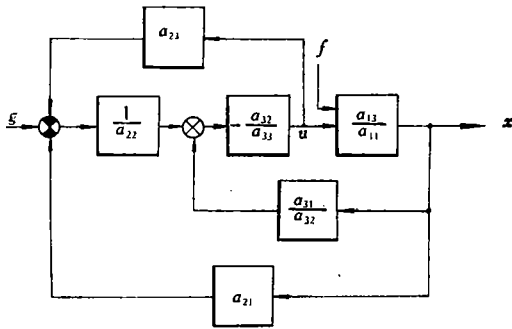


圖 4.

由不變性原理得 x 對 φ 的絕對不變性條件為

$$\begin{cases} \Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \\ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & 0 & a_{13}^0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \end{cases} \quad (11)$$

按照條件(11)選擇圖 4 中的參數,即可實現 x 對 φ 的不變性。

但是,無論是按照圖 3 還是圖 4 來實現 x 對 φ 的絕對不變性,都要求系統的放大倍數無限制地增大 ($k = \infty$),因此,實際上這是不可能的。因為一方面我們無法獲得無限大的放大倍數,另一方面,當放大倍數比較大時,在實際的部件中總會產生飽和現象,而使系統變成一個非線性系統。將圖 3 略加變換,即可得到圖 5。

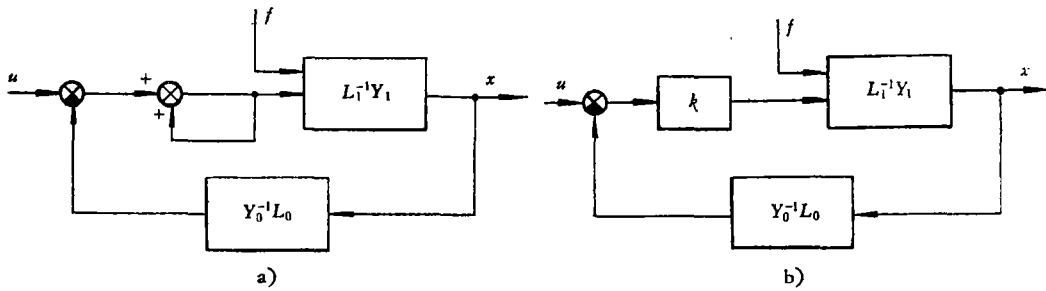


图 5.

在图 5 中, $k = \frac{1}{1 - 1} = \infty$, 实际上这是不可能做到的. 但如果 k 足够大, 则

$$x_{\text{HFB}} = \frac{k L_1^{-1} Y_1}{1 + k Y_0^{-1} L_0 \cdot L_1^{-1} Y_1} u \doteq L_0^{-1} Y_0 u.$$

因此, 采用图 5 所示的高增益控制系统, 将可近似地实现 x 对 φ 的不变性. 但是当 k 比较大时, 必然使得放大器产生饱和现象, 而使系统变成一个非线性系统. 在这种情况下, 系统的品质将是怎样的呢? 还能保证 x 对 φ 保持不变吗? 现在我们就对这一问题作出回答.

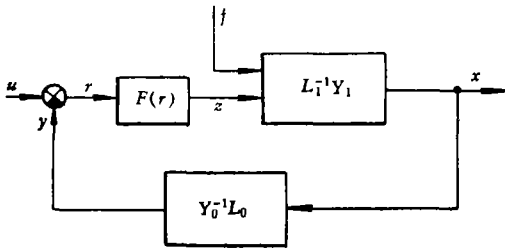


图 6.

显然, 如果 k 足够大, 使得放大器产生饱和现象, 则系统的方块图可用图 6 表示. 在图 6 中

$$F(r) = k_p \text{sign } r.$$

显然, 当 r 趋近于零时, 放大倍数

$$k = F'(r)|_{r=0} = \infty.$$

因此, 如果能够保持 r 等于零, 则 x 对 φ 的不变性就可得到实现. 为此, 就必需满足下列条件

$$r \frac{dr}{dt} \leq 0,$$

亦即在所有工作时间内, 下列不等式成立:

$$\left| \frac{d}{dt} u(t - \tau) \right| < \left| \frac{d}{dt} y(t, \tau) \right|. \quad t \geq \tau \tag{12}$$

不等式(12)是对于变系数系统继电器工作于滑动状态的充要条件. 从式(12)不难看出, 必需使 $\frac{d}{dt} y(t, \tau)|_{t=\tau} = \pm k_p \omega(t, \tau)|_{t=\tau} \approx 0^1)$, 式中 $\omega(t, \tau)$ 为由 z 到 y (见图 6) 的脉冲过渡函数. 为了求得 $\omega(t, \tau)$, 首先需求出由 z 到 y 的总体方程.

因 $L_1 x = Y_1 z$, $L_0 x = Y_0 y$, 故可求得算子 V_1 和 V_2 而使得 $V_1 * L_1 = V_2 * L_0$. 这样便可得到总体方程为

$$V_1 * Y_1 z = V_2 * Y_0 y.$$

1) 这里, 我们假定 $f(t) = 0$.

因为 L_1 的阶次为 n , 而 L_0 的阶次为 k , 故 V_1 的阶次必需为 k , V_2 的阶次必需为 n , 以使 $V_1 * L_1$ 的阶次与 $V_2 * L_0$ 的阶次相等. 就是说, 算子 V_1 和 V_2 应当具有下列形式:

$$V_1 = \sum_{i=0}^k \eta_i p^i,$$

$$V_2 = \sum_{j=0}^n r_j p^j,$$

式中 η_i 和 r_j 由下列方程组确定:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \eta_i N_{i q}^{\eta} - \sum_{j=0}^n r_j N_{j q}^{\tau} = -N_{k q}^{\eta},$$

$$q = 0, 1, 2, \dots, r; \quad r = n + k.$$

这里

$$N_{i q}^{\eta} = \sum_{\lambda=0}^i T_i^{i-\lambda} p^{i-\lambda} a_{q-\lambda};$$

$$N_{j q}^{\tau} = \sum_{\lambda=0}^j T_j^{j-\lambda} p^{j-\lambda} a_{q-\lambda}^0;$$

$$T_i^{i-\lambda} = T_i^{\lambda} = \frac{i(i-1)\cdots(i-\lambda+1)}{\lambda!};$$

$$T_j^{j-\lambda} = T_j^{\lambda} = \frac{j(j-1)\cdots(j-\lambda+1)}{\lambda!}.$$

这样, 算子 V_1 和 V_2 就可以被求得, 算子 V_0 和 W_0 也可以完全被确定. 算子 V_0 和 W_0 的形式为:

$$V_0 = V_1 * Y_1 = \sum_{\lambda=0}^{k+m} \beta_{\lambda} p^{\lambda},$$

$$W_0 = V_2 * Y_0 = \sum_{\theta=0}^{n+l} \alpha_{\theta} p^{\theta}.$$

因此, 总体方程可写成下列形式

$$\left(\sum_{\theta=0}^{n+l} \alpha_{\theta} p^{\theta} \right) y = \left(\sum_{\lambda=0}^{k+m} \beta_{\lambda} p^{\lambda} \right) z.$$

由于准脉冲过渡函数 $g(t, \tau)$ 为方程

$$\sum_{\theta=0}^{n+l} \alpha_{\theta} \frac{d^{\theta}}{dt^{\theta}} g(t, \tau) = \delta(t - \tau)$$

在初始条件

$$\frac{d^y}{dt^y} g(t, \tau) \Big|_{t=\tau} = \begin{cases} 0 & (y = 0, 1, 2, \dots, (n+l-2)) \\ \frac{1}{\alpha_{n+l}} & (y = n+l-1) \end{cases} \quad (13)$$

时的解, 故脉冲过渡函数 $\omega(t, \tau)$ 可由下式决定:

$$\omega(t, \tau) = \int_0^t g(t, u) \left[\sum_{\lambda=0}^{k+m} \beta_{\lambda} \delta_{\alpha}^{(\lambda)}(u - \tau) \right] du.$$

又因

$$(-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{d\tau^{\nu}} [g(t, \tau)\beta_{\nu}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t, \tau)\beta_1(t)] \delta_{\tau}^{(\nu)}(t - \tau) d\tau,$$

故脉冲过渡函数 $\omega(t, \tau)$ 可写成下列形式:

$$\begin{aligned} \omega(t, \tau) = & (-1)^{k+m} \frac{d^{k+m}}{d\tau^{k+m}} [g(t, \tau)\beta_{k+m}(\tau)] + \dots + \\ & + g(t, \tau)\beta_0(\tau). \end{aligned} \tag{14}$$

从条件(12)出发,首先要求

$$\omega(t, \tau)|_{t=\tau} \cong 0.$$

考虑到初始条件(13),由公式(14)可看出,只有当

$$k + m = \begin{cases} n + l - 1 \\ n + l \end{cases} \tag{15}$$

时,才可得到

$$\omega(t, \tau)|_{t=\tau} \cong 0.$$

条件(15)就是产生連續滑动的必要条件,也是选择理想模型 $Y_0^{-1}L_0$ 的条件之一(决定着模型的结构)。不难証明,在满足了条件(15)之后,系統也就满足了稳定性条件。

适当地选择模型参数以改变 β_k 和 α_0 (因而也就改变了 $\omega(t, \tau)$) 使得条件(12)得到满足,就可得到 x 对 φ 的不变性,即

$$x_{\text{ннв}} = L_0^{-1}Y_0 u.$$

三、用改变等效放大倍数实现不变性到 ε 的自适应控制系统

按干扰控制原理实现 x 对 φ 保持不变性的方案,对于高阶系統比較困难。实际上,由式(15)可以看出,当 $n - m \geq 4$ 时,必需使 $k - l \geq 3$ 。这意味着必需获得高阶导数,而这一点在很多情况下都比較困难。現在我們来研究一下用改变等效放大倍数实现不变性到 ε 的自适应控制系统。

由式(4)得

$$\begin{aligned} x = L_1^{-1}Y_1\{u, f\} &= L_0^{-1}Y_0\{u + \varphi\} = L_0^{-1}Y_0 \cdot \left(1 + \frac{\varphi}{u}\right) \cdot u = \\ &= L_0^{-1}Y_0 \cdot k(u, \varphi) \cdot u, \end{aligned} \tag{16}$$

式中

$$k(u, \varphi) = 1 + \frac{\varphi}{u} = \frac{u + \varphi}{u}; \tag{17}$$

$k(u, \varphi)$ 为等效放大倍数。

按照式(16),控制对象的等效方块图可用图7表示。

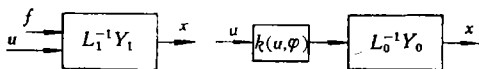


图 7.

由公式(16)和图7可以看出,如果給輸入

訊号 $u(t)$ 乘以 $\frac{1}{k(u, \varphi)}$, 則可得到 x 对 φ 的不

变性,亦即

$$x_{\text{HNB}} = L_0^{-1}Y_0 \cdot k(u, \varphi) \cdot \frac{1}{k(u, \varphi)} \cdot u \equiv L_0^{-1}Y_0 u. \quad (18)$$

按照式(18),即可得到 x 对 φ 保持不變的等效方塊圖(如圖 8 所示)。

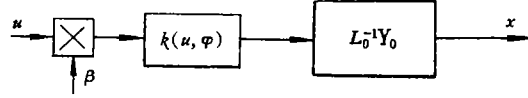


圖 8.

現在來研究一下如何獲得 $\beta = \frac{1}{k(u, \varphi)}$. 由式(17)可得

$$\beta = \frac{1}{k(u, \varphi)} = \frac{u}{\varphi + u}. \quad (19)$$

將式(5)代入式(19),得

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{k(u, \varphi)} = \frac{u}{\varphi + u} = \frac{u}{Y_0^{-1}L_0[L_1^{-1}Y_1(u+f) - L_0^{-1}Y_0u] + u} = \\ &= \frac{L_0^{-1}Y_0u}{[L_1^{-1}Y_1(u+f) - L_0^{-1}Y_0u] + L_0^{-1}Y_0u} = \\ &= \frac{L_0^{-1}Y_0u}{L_1^{-1}Y_1(u+f)}. \end{aligned} \quad (20)$$

由式(18)–(20)和圖 8 可得用改變等效放大倍數實現 x 对 φ 絕對不變的方塊圖(如圖 9 所示)。

事實上,由圖 9 可以看出,

$$\begin{aligned} x_{\text{HNB}} &= \beta x_1 = \frac{L_0^{-1}Y_0u}{L_1^{-1}Y_1(u+f)} \cdot x_1 = \frac{L_0^{-1}Y_0u}{L_1^{-1}Y_1(u+f)} \cdot L_1^{-1}Y_1(u+f) \equiv \\ &\equiv L_0^{-1}Y_0u. \end{aligned} \quad (21)$$

但是在圖 9 中, x_1 是實際系統的真正輸出座標,而 x_{HNB} 的獲得是給 x_1 乘以 β . 因此,這種情況对動力學系統來講是沒有什麼實際意義的,因為我們無法給 x_1 乘上一個 β 值來獲得所謂不變的 x_{HNB} .

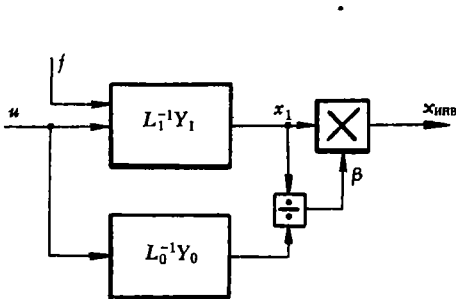


圖 9.

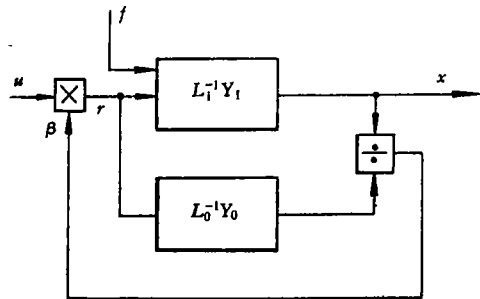


圖 10.

不难看出,在某些条件下(下面我們將談到這些條件),如果採用圖 10 所示的辦法,則可以獲得 x 对 φ 保持到 ε 的不變性。事實上,由圖 10 可以看出

$$x = L_1^{-1}Y_1(r+f) = L_1^{-1}Y_1(\beta u + f) = \beta L_1^{-1}Y_1\left(u + \frac{f}{\beta}\right), \quad (22)$$

而

$$\beta = \frac{L_0^{-1}Y_0 r}{L_1^{-1}Y_1(r+f)} = \frac{L_0^{-1}Y_0 u}{L_1^{-1}Y_1\left(u + \frac{f}{\beta}\right)}. \quad (23)$$

将 β 值代入式(21),得

$$x_{\text{ннб}} = \frac{L_0^{-1}Y_0 u}{L_1^{-1}Y_1\left(u + \frac{f}{\beta}\right)} \cdot L_1^{-1}Y_1\left(u + \frac{f}{\beta}\right) \equiv L_0^{-1}Y_0 u. \quad (24)$$

应当指出,在推导式(22)~(24)时,我们是假定

$$\dot{\beta} \approx 0. \quad (25)$$

现在我们来讨论 $\dot{\beta} \approx 0$ 意味着什么。很显然,由条件(25)求得 β 它应等于某个常数。这就是说,对于不同的飞行状态或工作条件,控制对象的放大倍数变化是主要的,而其他参数的变化都较小,并且干扰 $f(t)$ 较弱。而在同一个飞行状态或工作条件下控制对象的所有参数变化,比起系统的过渡过程时间来讲,都是比较缓慢的。因此,用图 10 所示的办法对许多系统均能实现 x 对 φ 保持到 ε 的不变性。

综上所述,利用改变等效放大倍数来实现 x 对 φ 的不变性,不需要对任何量求导数,因而比按干扰控制原理来保证 x 对 φ 的不变性要容易实现。但是图 10 所示的办法只有当对象的变参数为放大倍数且变化比较慢时,才能比较准确地实现 x 对 φ 的不变性。

四、举 例

假定控制对象的动力学特性可用下列方程来描述:

$$\ddot{x} + \beta_1(t)\dot{x} = \alpha_1(t)u, \quad (26)$$

即

$$L_1(p, t) = p^2 + \beta_1(t)p,$$

$$Y_1(p, t) = \alpha_1(t),$$

$$|u| \leq 1.$$

希望得到的理想对象特性为

$$\ddot{x} + \beta_0\dot{x} = \alpha_0 u, \quad (27)$$

即

$$L_0 = p^2 + \beta_0 p,$$

$$\beta_0 \geq \beta_1(t),$$

$$Y_0 = \alpha_0.$$

选择模型 M_1 和 M_2 (见图 11)的结构为

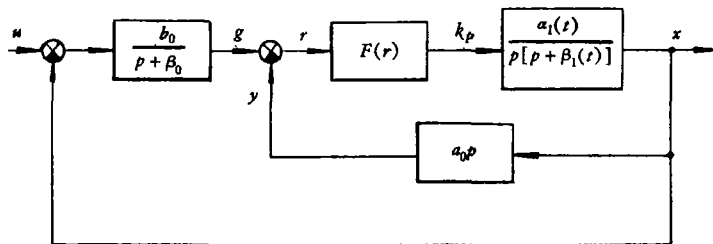


图 11.

$$M_1 = a_0 p, \quad (28)$$

$$M_2 = \frac{b_0}{p + \beta_0}. \quad (29)$$

由於 $k + m - l - n = 1 - 2 = -1$ ，故產生連續滑動的必要條件(15)是滿足的。

現在我們來校驗一下條件(12)。為了簡單起見，假定方程(26)的係數在某一段時間內可認為是常數，則由式(26)得

$$\dot{y}(t) = a_0 k_p \alpha_1 e^{-\beta_1 t}.$$

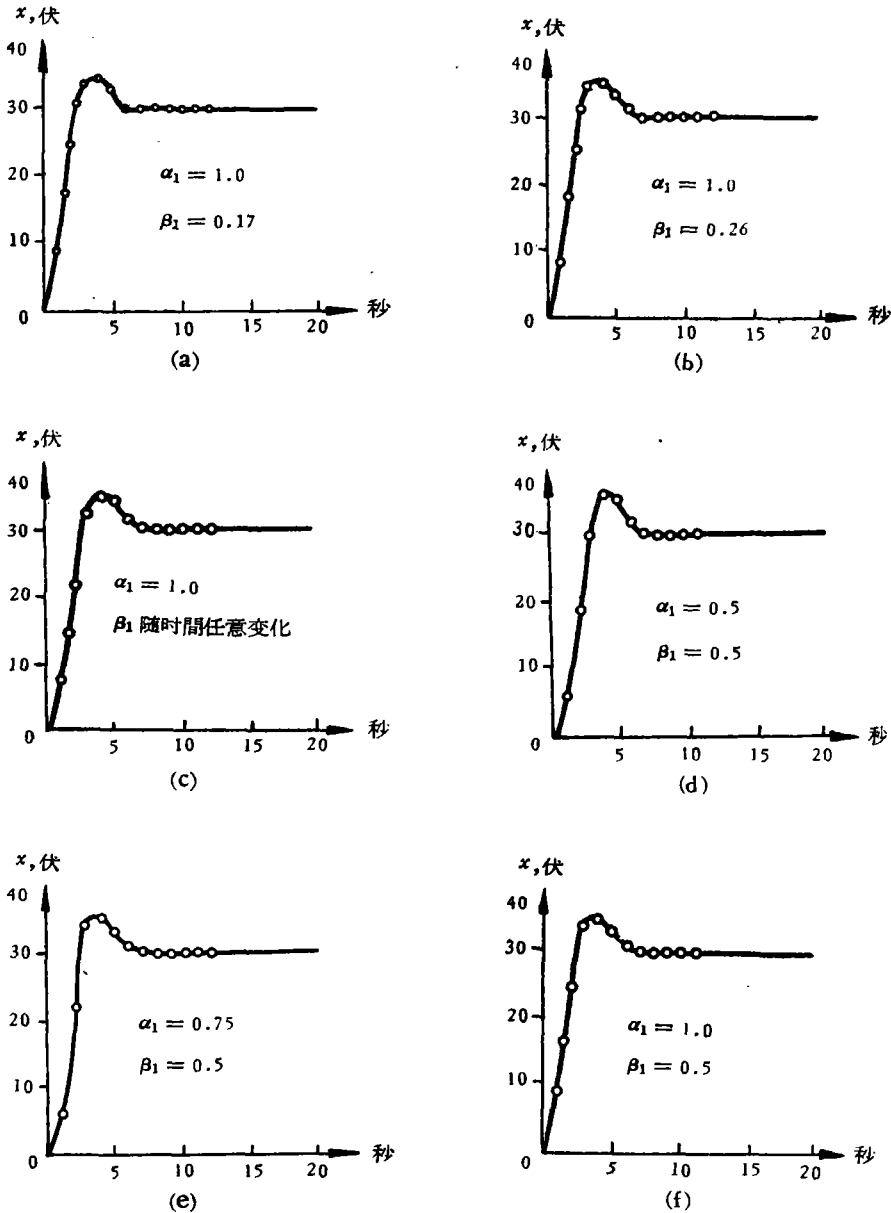


圖 12.

当 $u(t) = 1(t)$ 时,

$$\dot{g}(t) = b_0 e^{-\beta_0 t}.$$

这样根据条件(12), 只要

$$b_0 e^{-\beta_0 t} < a_0 k_p \alpha_1 e^{-\beta_1 t},$$

就能产生連續滑动. 另外, 根据原来要求 $\beta_0 \geq \beta_1$ (即希望系统的过渡过程快一点), 故

$$e^{-\beta_0 t} \leq e^{-\beta_1 t}.$$

因此只要选择参数满足下列不等式

$$b_0 < a_0 k_p \alpha_1, \quad (30)$$

就可产生連續滑动.

这样, 我们就可得到不随工作状态而变化的对象特性为

$$\frac{x}{u} = \frac{a_0}{p(p + \beta_0)}. \quad (31)$$

选取 $k_p = 20$, $a_0 = b_0 = \beta_0 = 1$, 对应于不同的 $\alpha_1(t)$ 和 $\beta_1(t)$, 其模拟試驗結果示于图 12 中¹⁾. 由图 12 可以看出, 系统的品质并不因对象的参数 $\alpha_1(t)$ 和 $\beta_1(t)$ 的变化而改变.

五、結 論

外加干扰 $f(t)$ 和控制对象参数的变化, 都可看作是加在其参数不随工作条件变化的理想控制对象輸入端的等效干扰 $\varphi(t)$. 按照不变性原理, 可以得到系統輸出座标 x 对等效干扰 φ 保持不变的条件.

利用繼电器的滑动工作状态, 可实现系統輸出座标 x 对控制对象参数的变化保持完全不变. 理想模型的结构, 必需满足連續滑动的必要条件, 而其参数应当满足連續滑动的充分条件.

当控制对象参数的变化比較慢, 而主要变参数是放大倍数时, 則可利用模型改变等效放大倍数实现到 ε 的不变性.

参 考 文 献

- [1] 王新民、吕应祥, 自适应控制系统, 自动化技术进展, I, 科学出版社, 北京, 1963.
- [2] Василенко, В. А., О реализуемости принципа абсолютной инвариантности в линейных системах с переменными параметрами, *Изв. АН СССР, ОТН, Энер. и авт.*, 1961, № 3.
- [3] Беля, К. К., Об инвариантности регулируемой величины автоматического устройства от некоторых его параметров, *Изв. АН СССР, ОТН, Энер. и авт.*, 1960, № 6, 96—106.
- [4] Цыпкин, Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1955.
- [5] Солодов, А. В., Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, *Оборогиз*, 1962.

1) 該試驗是李基全同志与作者共同完成的.

ADAPTIVE CONTROL SYSTEMS WITH ABSOLUTE INVARIANCE AND INVARIANCE TO ϵ

LUI YING-SJAN

In this paper the problem of design of an adaptive control system by the principle of invariance is discussed. The methods of realizing adaptive control with a relay working on sliding mode and the adjustment of equivalent gain coefficient are proposed. The necessary conditions for the existence of the sliding mode are presented.