第2卷 第3期 自动化学报 Vol. 2, No. 3
1964年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1964

# 用諧波平衡法研究具有几个非綫性元件的单廻路調节系統[1)]

高为炳

**摘 要**

本文利用諧波平衡法研究了有几个非綫性元件的单廻路調节系統. 首先将廻路分拆为一些簡单廻路，其中每一个廻路只有一个非綫性元件. 然后研究了自振（过去这方面的研究有[1]及[2]）及其稳定性，这时假定所有元件都是单值对称的. 最后研究了强迫振动，此时有一个非綫性元件可以是任意型的.

## 一、自 振 研 究

### 1. 求有二个非綫性元件的系統自振的"分拆法"

首先将系統(图1)分为二个开路系統(图2)来加以考虑. $A_1$ 及 $A_2$ 表示綫性部分，$H_1$ 及 $H_2$ 表示非綫性元件. 第一个开路系統的微分方程为:

$$D_1(p)y_1 = k_1(p)x_1, \qquad x_1 = -f_1(y_2).$$

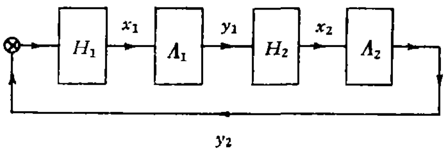


图 1.

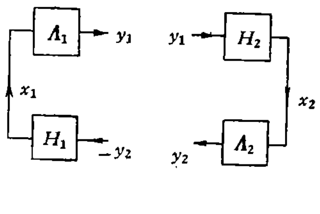


图 2.

取 $y_1$ 及 $y_2$ 之一次諧波: $y_1 = A_1 \sin \omega t$, $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha)$,其中 $A_1$, $A_2$, $\omega$, $\alpha$ 均为待求量. 經过熟知的运算，可得 $H_1$ 的等效放大系数及第一开路（图2a）的"自振頻率特性方程":

$$\frac{D_1(i\omega)}{k_1(i\omega)} = -R_1(A_2)\frac{A_2}{A_1}e^{i\alpha}, \tag{1}$$

$$R_1(A_2) = B_1(A_2) + iC_1(A_2),$$

$$B_1(A_2) = \frac{1}{\pi A_2}\int_0^{2\pi} f_1(A_2 \sin u)\sin u\, du,$$

1）本文曾在1962年8月中国力学学会一般力学会議上宣讀.

$$C_1(A_2) = \frac{1}{\pi A_2}\int_0^{2\pi} f_1(A_2 \sin u)\cos u\, du.$$

第二个开路系統的微分方程为：

$$D_2(p)y_2 = k_2(p)x_2,\ x_2 = f_2(y_1).$$

用同样方法，可得第二开路（图 2b）的"自振频率特性方程"：

$$\frac{D_2(i\omega)}{k_2(i\omega)} = R_2(A_1)\frac{A_1}{A_2}e^{-i\alpha}. \tag{2}$$

以上結果可以用以下一劳永逸的方法来建立．将第一开迴路以一个假想元件 $\Phi_{12}$ 使之閉合（图 3a），而第二开迴路則利用 $\Phi_{21}$（图 3b）．此二元件的频率特性分别为：

$$\Phi_{12} = \frac{A_2}{A_1}e^{i\alpha}, \qquad \Phi_{21} = \frac{A_1}{A_2}e^{-i\alpha}.$$


(a)　　　　(b)

图 3.

于是得到的二个簡单迴路各只有一个非綫性元件．它們的自振频率方程可写成：

$$\frac{D_1(i\omega)}{k_1(i\omega)} = -R_1(A_2)\Phi_{12}, \qquad \frac{D_2(i\omega)}{k_2(i\omega)} = R_2(A_1)\Phi_{21}.$$

上述方法我們称之为"分拆法"．假想的元件 $\Phi_{12}$ 及 $\Phi_{21}$ 具有明显的物理概念，如 $\Phi_{12}$ 是 $y_1$ 到 $y_2$ 的幅相变换器，输入經过 $\Phi_{12}$ 后，振幅增加 $\frac{A_2}{A_1}$ 倍，相位增加 $\alpha$ 角．

## 2. 有二个非綫性元件的系統的自振求法

現从式(1)及(2)来求出 $A_1$, $A_2$, $\omega$ 及 $\alpha$．假定 $f_1$ 及 $f_2$ 均为单值对称的，則 $R_1(A_2) = B_1(A_2)$, $R_2(A_1) = B_2(A_1)$．式(1)及(2)可写作：

$$\frac{D_1(i\omega)}{k_1(i\omega)} = R_1(A_2)\frac{A_2}{A_1}e^{i(\alpha+\pi)}, \qquad \frac{D_2(i\omega)}{k_2(i\omega)} = R_2(A_1)\frac{A_1}{A_2}e^{-i\alpha}. \tag{3}$$

首先求出 $\alpha$ 及 $\omega$．綫性部分的倒频特性 $I_1(i\omega) = \frac{D_1(i\omega)}{k_1(i\omega)}$ 及 $I_2(i\omega) = \frac{D_2(i\omega)}{k_2(i\omega)}$ 是已知的，它們可以从微分方程作出，亦可以从实驗得来．将之作于同一图上，并令实軸重合而虚軸反向；过原点作一直綫并轉动之，直到它与 $I_1$ 及 $I_2$ 之交点 $m$ 及 $n$ 有相同的 $\omega$ 标值．这个 $\omega$ 及直綫与实軸的交角 $\alpha$（图 4），就是我們要求的．証明是容易的，因为在下二向量等式中，

$$\overline{om} = I_2(i\omega) = ome^{-i\alpha}, \qquad \overline{on} = I_1(i\omega) = one^{i(\alpha+\pi)},$$

如果选择 $A_1$ 及 $A_2$，使之滿足下式，正好得到式(3)

$$om = R_2(A_1)\frac{A_1}{A_2}, \qquad on = R_1(A_2)\frac{A_2}{A_1}. \tag{4}$$

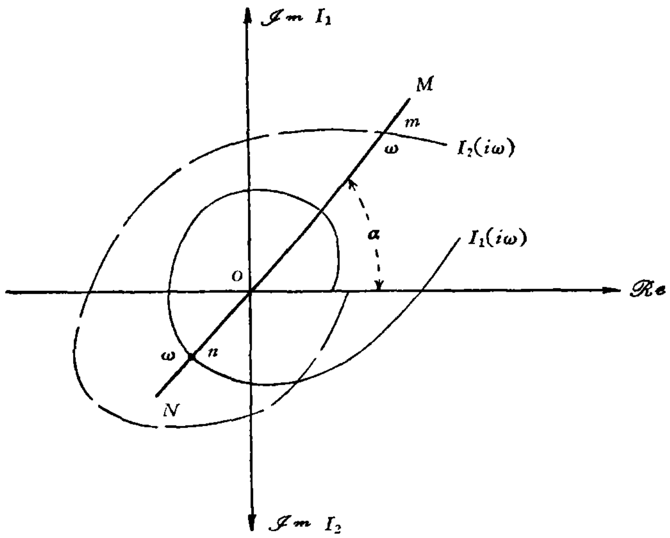


图 4.

式(4)决定着 $A_1$ 及 $A_2$，它又可写作：

$$A_1 = \frac{1}{on} R_1(A_2)A_2 = F_1(A_2), \qquad A_2 = \frac{1}{om} R_2(A_1)A_1 = F_2(A_1). \tag{5}$$

式 (5) 中的 $F_1$ 及 $F_2$ 的图，可从熟知的典型元件等效放大系数的特性图作出. 图 5 給出了 $A_1$ 及 $A_2$ 的作图求法. 对图中所示情况，我們得到二个自振.

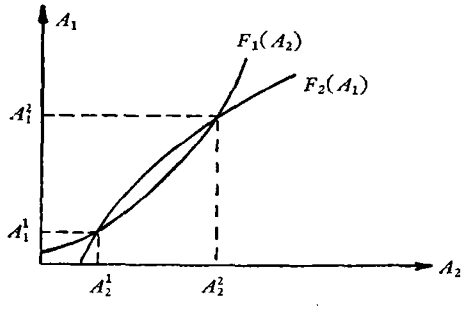


图 5.

### 3. 有几个非綫性元件的系統的"分拆法"

假定系統有 $n$ 个非綫性元件(图 6). 經过与第 2 小节中相同的方法加以处理，可証

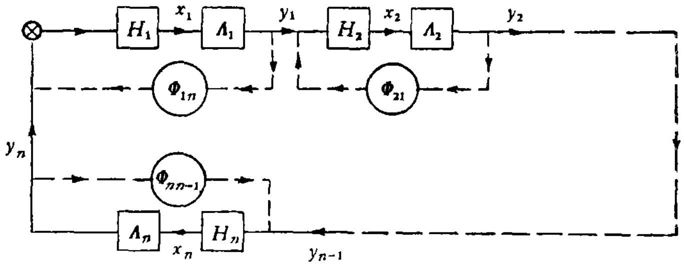


图 6.

明它等价于 $n$ 个簡单迴路（图 7），并可写出系統的自振頻率特性方程：

$$I_1(i\omega) = R_1(A_n)\frac{A_n}{A_1}e^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+\pi)}, \tag{6a}$$

$$I_2(i\omega) = R_2(A_1)\frac{A_1}{A_2}e^{-i\alpha_1}, \tag{6b}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_n(i\omega) = R_n(A_{n-1})\frac{A_{n-1}}{A_n}e^{-i\alpha_{n-1}}, \tag{6z}$$

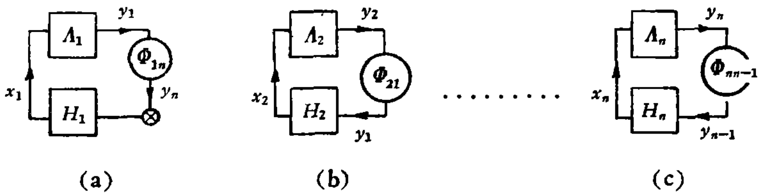


图 7.

式中 $A_i$，$\alpha_i$，$\omega$ 为各坐标第一諧量：$y_1 = A_1\sin\omega t$，$y_2 = A_2\sin(\omega t+\alpha_1)$，$\cdots$，$y_n = A_n\sin(\omega t+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1})$ 的振幅、相差及頻率. 将 (6b)$\cdots$(6z) 相乘，式 (6) 又可写成：

$$I_1(i\omega) = R_1(A_n)\frac{A_n}{A_1}e^{i(\alpha+\pi)}, \qquad I(i\omega) = R\frac{A_1}{A_n}e^{-i\alpha}, \tag{7}$$

$$I(i\omega) = I_2(i\omega)\cdots I_n(i\omega), \qquad \alpha = \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j, \qquad R = R_2(A_1)\cdots R_n(A_{n-1}).$$

用第 2 小节的方法，从式(7)可求出 $\omega$ 及 $\alpha$（图 8），同时得到二个代数方程：

$$om = R\frac{A_1}{A_n}, \quad on = R_1(A_n)\frac{A_n}{A_1}. \tag{8}$$

因 $\omega$ 已知，故研究式 (6b)$\cdots$(6z) 即可求出 $A_1$，$A_2, \cdots, A_n$ 及 $\alpha_1, \alpha_2\cdots, \alpha_{n-1}$. 例如，在 $I_2(i\omega)$ 平面上（图 9），由求得的 $\omega$ 可得 $b$ 点，于是确定了 $\alpha_1$，并得到：

$$ob = R_2(A_1)\frac{A_1}{A_2}. \tag{9}$$

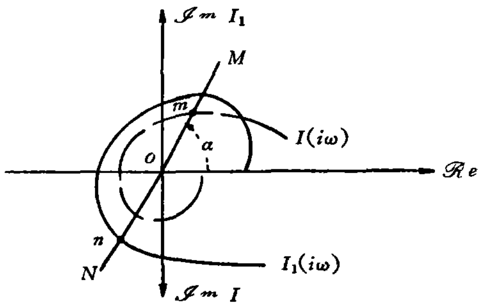


图 8.

用同样的办法，可求得 $\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}$，并得：

$$\cdots, \ oz = R_n(A_{n-1})\frac{A_{n-1}}{A_n}. \tag{10}$$

式(8)，(9)，(10)給出：

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{on}R_1(A_n)A_n = F_1(A_n), \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n &= \frac{1}{oz}R_n(A_{n-1})A_{n-1} = F_n(A_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

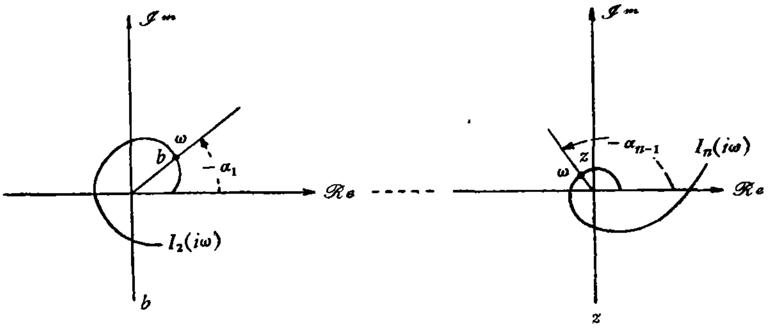


图 9.

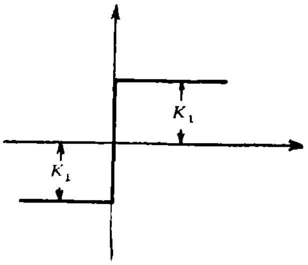


图 10.

方程組(11)是一递归方程組，它可用作图法或迭代法[3] 求解.

現考虑一个特殊情况. 如果非綫性元件中至少有一个簡单継电器（图 10)，例如是 $H_1$，則可得到全部最后解答:

$$A_1 = \frac{1}{on} R_1(A_n)A_n = \frac{4K_1}{on\pi},$$

$$A_2 = F_2(A_1) = F_2\left(\frac{4K_1}{on\pi}\right), \cdots.$$

## 二、强迫振动研究

### 1. 具有一个非綫性元件的系統的强迫振动(图 11)

这个問題早已用作图法获得解决，即便在频率特性是实驗給出的情况下，亦可用下述分析法求出強迫振动. 令 $y = A\sin(\omega t + \alpha)$，強迫振动的频率方程为:

$$I(i\omega) = \frac{S}{A} e^{-i\alpha} - R(A).$$

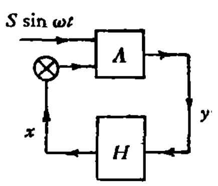


图 11.

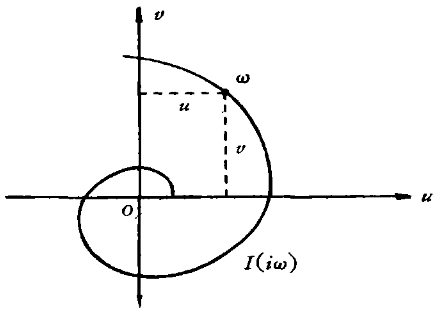


图 12.

令 $I(i\omega) = u + iv$，$u$ 及 $v$ 为已知常数(图 12). 从上式可得:

$$u = \frac{S}{A}\cos\alpha - B(A), \quad v = -\frac{S}{A}\sin\alpha - C(A). \tag{12}$$

由式(12)可解出 $A$ 及 $\alpha$. 順便可以看出，为了求強迫振动，不需要知道綫性部分的全部頻率特性，而只要一点就够了. 非綫性元件是任意型的.

**2. 具有二个非綫性元件的系統的强迫振动**

第 1 小节中的分拆法不难証明仍然是有效的. 这里可将系統(图 13)分拆为二个簡单迴路(图 14)，其中仅 $H_2$ 是单値对称的. 設 $y_1=A_1\sin(\omega t+\alpha)$, $y_2=A_2\sin(\omega t+\alpha+\beta)$,

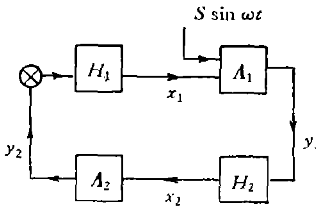


图 13.

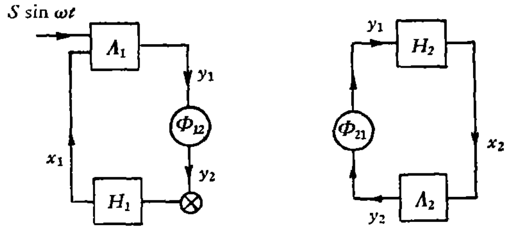


图 14.

于是強迫振动的頻率方程可写成：

$$I_1(i\omega)=\frac{S}{A_1}e^{-i\alpha}-R_1(A_2)\frac{A_2}{A_1}e^{i\beta},\qquad I_2(i\omega)=R_2(A_1)\frac{A_1}{A_2}e^{-i\beta}. \tag{13}$$

問題归結为求出 $A_1$, $A_2$, $\alpha$ 及 $\beta$. 現研究式(13)之第二式(图 15). 因 $\omega$ 为已知，故可求得 $\beta$ 及一个代数方程：

$$om=R_2(A_1)\frac{A_1}{A_2}\quad\text{或}\quad A_2=\frac{1}{om}R_2(A_1)A_1. \tag{14}$$

代入式(13)之第一式，有：

$$I_1(i\omega)=\frac{S}{A_1}e^{-i\alpha}+R(A_1)e^{i\beta},$$

$$R(A_1)=-R_1(A_2)\frac{A_2}{A_1}=-R_1\left[\frac{1}{om}R_2(A_1)A_1\right]\frac{1}{om}R_2(A_1). \tag{15}$$

于是可用(1)中的方法求出 $A_1$ 及 $\alpha$, 然后由式(14)給出 $A_1$.

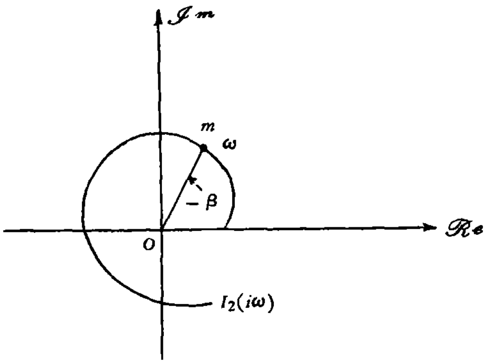


图 15.

当非綫性元件 $H_2$ 是簡单繼电器时，式(14)中的 $A_2=\dfrac{4K_2}{om\pi}$, 而式(15)中的 $R(A_1)=-\dfrac{4K_1}{\pi A_1}$. 于是式(15)可写成：

$$I_1(i\omega) = \frac{S}{A_1} e^{-i\alpha} - \frac{4K_1}{\pi A_1} e^{i\beta}.$$

介 $I_1(i\omega) = u + iv$. 分开实部及虚部后,得:

$$A_1 u = S\cos\alpha - \frac{4K_1}{\pi}\cos\beta, \quad A_1 v = -S\sin\alpha - \frac{4K_1}{\pi}\sin\beta.$$

消去 $\alpha$、得 $A_1$ 的二次方程:

$$A_1^2(u^2+v^2) + A_1\frac{8K_1}{\pi}(u\cos\beta + v\sin\beta) + \frac{16K_1^2}{\pi^2} - S^2 = 0.$$

对 $A_1$ 有解的条件及其簡化結果分别为:

$$\frac{16K_1^2}{\pi^2}(u\cos\beta + v\sin\beta)^2 - (u^2+v^2)\left(\frac{16K_1^2}{\pi^2} - S^2\right) \geqslant 0;$$

$$S \geqslant \frac{4K_1}{\pi}|\sin(v-\beta)|, \quad v = \operatorname{tg}^{-1}\frac{v}{u}.$$

这就是強迫振动出現的条件.

以上結果不难推广到有 $n$ 个非綫性元件的系統.

## 三、关于自振的稳定性

### 1. 一个非綫性元件的情况(图 16)

有一个非綫性元件的系統的自振稳定性間題,早已解决. 这里再給出一个方法,为的是进一步推广,以便解决多个非綫性元件的情况. 将系統开断(图 17),令輸入及輸出分别为: $y_2 = A_2\sin(\omega t)$, $y_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi)$. 二振幅之間的关系为:

$$A_1 = R(A_2)A_2\left|\frac{k(i\omega)}{D(i\omega)}\right| = R(A_2)A_2\frac{1}{|\Gamma(i\omega)|} = F(A_2). \tag{16}$$

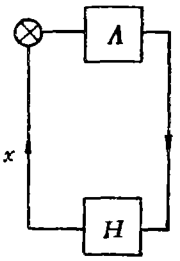


图 16.

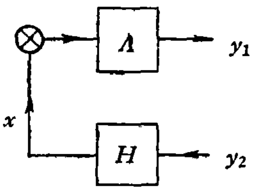


图 17.

在 $A_1A_2$ 平面上作出式(16)的图,并称之为"自振时开路的振幅关系". 再作出 $A_1 = A_2$ 的直綫,二者的交点(图 18)便給出自振振幅. $\omega$ 为自振頻率,是已經求得的已知量,而自振时亦有 $\varphi = 0$. $A^2$ 对应之自振的稳定性可用建立类似柯尼克-拉麦莱梯綫(图 18)的方法决定. 这条梯綫可称之为"自振振幅建立梯綫". 此自振是稳定的. 这个論断是根据如下的物理概念得到的. 当輸入 $y_2$ 之振幅大于 $A^2$ 时, $y_1$ 之振幅取一个較之 $y_2$ 的振幅为小的值. 再以这个振幅作为 $y_2$ 的振幅作为輸入,于是 $y_1$ 之振幅又变小. 这样継續下去, $y_1$ 及 $y_2$ 之振幅都趋向于 $A^2$. 当 $y_2$ 之振幅小于 $A^2$ 时, $y_1$ 及 $y_2$ 之振幅将逐漸增加,并趋向于 $A^2$. 于是可說 $A^2$ 之自振是稳定的. 同样可看出 $A^1$ 对应的自振是不稳定的.

不难写出判定自振稳定性的解析式：

$$|F'(A)| < 1, \quad 或 \quad \left|\frac{dA_1}{dA_2}\right| < 1. \tag{17}$$

当 $F'(A) > 0$ 时，这个条件的意义卽是图 18 所示的情况．当 $F'(A) < 0$ 时，以同样的方式作出"自振振幅建立梯綫"，亦可得到条件（17）．$F'(A)$ 的值是在交点处計算的．容易証明，条件(17)和 Гольдфарб 判据全同．

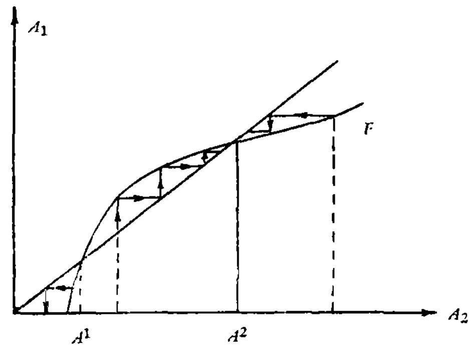


图　18.

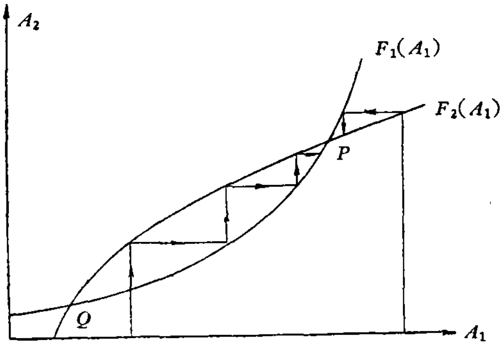


图　19.

**2. 有几个非綫性元件的情况**

先研究有二个非綫性元件的系統．我們曾得到决定振幅的代数方程（5）．在 $A_1$ 及 $A_2$ 平面上画出此二曲綫，其交点卽是自振振幅的值．可以和上一小节一样作出"自振振幅建立梯綫"，而各自振的稳定性則一目了然(图 19)．$P$ 为稳定自振，$Q$ 为不稳定的自振．

这里亦可以写出判定自振稳定性的分析条件：

$$|[F_1'(A_2)]^*[F_2'(A_1)]^*| < 1, \tag{18}$$

其中 * 号表示微分后应代入待研究的自振振幅值．这个条件可以这样导出，卽将式(5)写成复合函数形式：$A_1' = F_1(A_2) = F_1[F_2(A_1)]$．此式与式（16）的情况完全一样．由式(17)可以得到：

$$\left|\frac{dA_1'}{dA_1}\right| = |F_1' \cdot F_2'| < 1,$$

卽条件（18）．当然也可以用作"自振振幅建立梯綫"的方法，直观地得到条件（18）．不过这时应考虑 $F_1'$ 及 $F_2'$ 取正及負的四种可能情况．不难确信，在这四种情况中，式(18)是成立的．

有 $n$ 个非綫性元件的系統的情况，可用各种办法加以解决，如对式(11)的 $n$ 个方程組可采用迭代法．很明显，用迭代法得到的自振全是稳定的(不稳定自振用此法一般是求不到的)．亦可用作图法分别在不同紙上画出(11)，进行与上述情况类似的分析．

## 四、举　　例

**1. 研究系統(图 20)**

該系統的微分方程式为：

$$(p^2 + ap + 1)y_1 = -bx_1, \qquad x_1 = f_2(y_2),$$

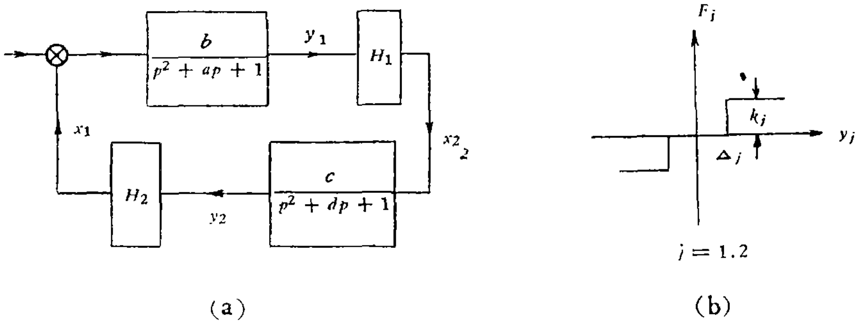


图 20.

$$(p^2+dp+1)y_2=cx_2, \qquad x_2=f_1(y_1).$$

令 $K_1=bk_2$, $K_2=ck_1$, 上述方程組可写作:

$$(p^2+ap+1)y_1=-K_1x_1, \qquad x_1=F_2(y_2),$$
$$(p^2+dp+1)y_2=K_2x_2, \qquad x_2=F_1(y_1),$$

其中 $F_1$ 及 $F_2$ 如图 21 所示. 可以求出自振频率 $\omega=1, a=\frac{\pi}{2}$, 如图 22 所示, 其中 $I_1(i\omega)=u_1+iv_1$, $I_2(i\omega)=u_2+iv_2$. 決定振幅的方程式为:

$$A_2=\frac{4K_1}{\pi a}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta_1}{A_1}\right)^2}, \qquad A_1=\frac{4K_2}{\pi d}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta_2}{A_2}\right)^2}. \tag{19}$$

图 23 給出了求 $A_1$ 及 $A_2$ 的几种可能情况及自振的稳定性.

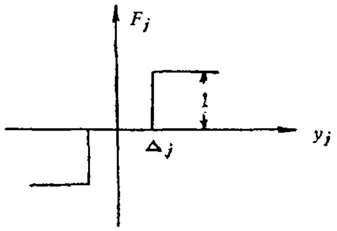


图 21.

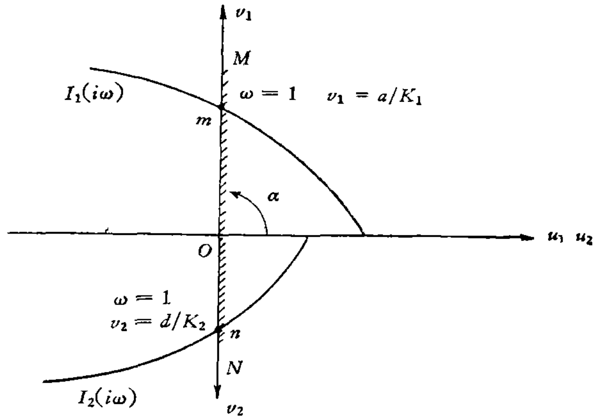


图 22.

**2. 研究参数对自振的影响**

令 $A=\left(\frac{4K_1}{\pi a}\right)^2$, $B=\left(\frac{4K_2}{\pi d}\right)^2$, $C=\Delta_1^2$, $D=\Delta_2^2$, $X=A_1^2$, $Y=A_2^2$, 于是式(19)可写作:

$$X=B\left(1-\frac{D}{Y}\right), \quad Y=A\left(1-\frac{C}{X}\right).$$

消去 $Y$, 得 $X^2+\left(\frac{BD}{A}-B-C\right)X+BC=0$. 此式有实根的条件为:

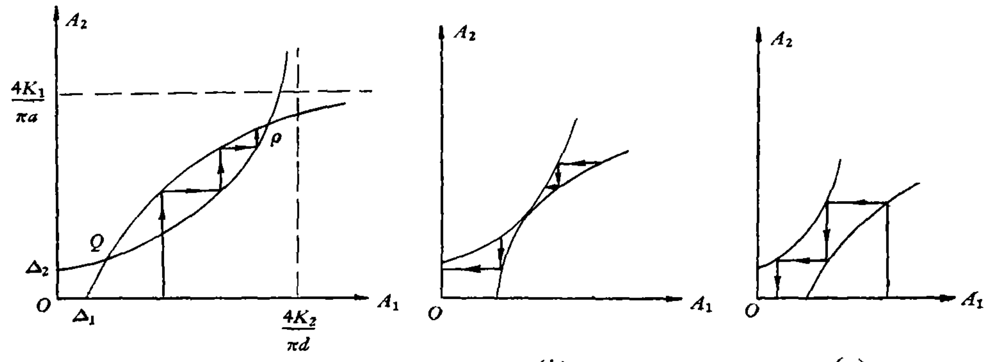


图 23.

$$\left(B + C - \frac{BD}{A}\right)^2 - 4BC > 0. \tag{20}$$

式(20)表示图 23a 的情况．系統有二个自振：当式(20)取 $< 0$ 时，为图 23c 的情况，系統是全局漸近稳定的；当式(20)取等号时，为临界情况．因之，参数 $ABCD$ 空間被 $\left(B + C - \frac{BD}{A}\right)^2 = 4BC$ 分成二个区域，其一为全局漸近稳定区，另一为自振区．如果系統只有二个或三个待定参数，则参数空間为平面或三維空間，这二个区域的界面是可以作出的．

## 参　考　文　献


[1] Наджафов, Э. М., Приближенное определение периодичных решений в системах автоматического регулирования, содержащих несколько нелинейностей, Труды 2-го совещания по теории автоматического регулирования, том I, Изд. АН СССР, Москва, 1955, 204—218.

[2] Ту Сюй-янь (涂序彦), Тэй Жу-вы (戴汝为), Автоколебания в одноконтурной системе автоматического регулирования, содержащих два симметричных реле, *Автоматика и телемеханика*, 1959, № 1, 90—94.

[3] 华罗庚，高等数学引論，第一卷，第一分册，科学出版社，北京，1963，236—237.


# DESCRIBING-FUNCTION METHOD FOR THE STUDY OF SINGLE LOOP CONTROL SYSTEMS CONTAINING SEVERAL NONLINEARITIES

KAO WEI-BIN

The single-loop control systems containing several nonlinearities are studied by describing-function method. A method is proposed by which the entire system can be divided into simple sections each of which contains but one nonlinearity. Then the self-sustained oscillation and its stability are studied for the case when the nonlinearities are single-valued and symmetric. Finally, systems with forced oscillations are also analysed.